ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ELEKTRYKA z. 32 Nr kol. 320

JÓZEF PARCHAŃSKI

Katedra Technologii i Metrologii Elektrycznej

MOSTEK Z DETEKTOREM WARTOŚCI ŚREDNIEJ

Streszczenie: W artykule przeprowadzono analizę dokładności pomiarów liniowymi mostkami prądu przemiennego z detektorem reagującym na średnią wartość napięcia występującego na przekątnej pomiarowej mostka. Wskazano źródła dużego błędu nieczułości i błędu równowagi pozornej mostka.

1. Detektor reagujący na wartość średnią napięcia wyprostowanego

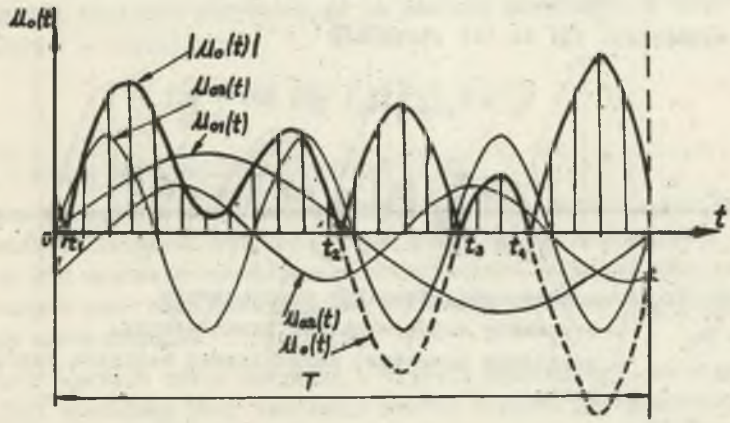
Odchylenie tego typu wskaźnika przy założeniu dwupołówkowego prostowania, proporcjonalne jest do wartości całki F za okres T z modułu napięcia u_o występującego na przekątnej pomiarowej (na rys. 1 powierzchnia zakreskowana). Całkę F oblicza się z wzoru

$$F = \frac{1}{T}\int_0^T |u_o|\,dt = \frac{1}{T}\left(\pm\int_0^{t_1} u_o\,dt \pm \ldots \pm \int_{t_1}^{T} u_o\,dt\right) \qquad (1)$$

gdzie:

$t_1, \ldots, t_l$ - miejsca zerowe funkcji $u_o = 0$,

u_o - wartość chwilowa napięcia na przekątnej pomiarowej mostka



Rys. 1. Napięcie i moduł napięcia na przekątnej pomiarowej dla: $U_{o3m}=1{,}25\,U_{o1m}$, $U_{o2m} = 0{,}62\,U_{o1m}$, $\gamma_3 = 0$ rad, $\gamma_2 = \pi/6$ rad.

Jak wiadomo

$$u_o = I_m \underline{U}_o(t)$$

gdzie

$\underline{U}_o(t)$ - wartość zespolona czasowa napięcia na przekątnej pomiarowej.

Na podstawie wzoru (2) podanego w [3], po przekształceniach można napisać (szczegóły [4]).

$$u_o = I_m \underline{U}_{z1}(t) \left\{ K_1 + \sum_{k=2}^{n} K_k \cdot m_k \, e^{j\left[\alpha_k + (k-1)\omega t\right]} \right\} \tag{2}$$

gdzie:

$\underline{U}_{z1}(t)$ - wartość zespolona czasowa pierwszej harmonicznej napięcia zasilającego mostek,

K_1, K_k - zespolone współczynniki przenoszenia mostka odpowiednio dla pierwszej i k-tej harmonicznej,

m_k - współczynnik zawartości k-tej harmonicznej,

e - podstawa logarytmu naturalnego,

α_k - kąt fazowy napięcia $\underline{U}_{zk}$, w chwili $t = 0$,

k - indeks określający daną harmoniczną,

$\omega = 2\pi f$ - pulsacja,

Ponieważ

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_{z1}(t) &= \underline{U}_{z1} \, e^{j\omega t} \\ K_1 &= |K_1| \, e^{j\beta_1} \\ K_k &= |K_k| \, e^{j\beta_k} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

to po wstawieniu (3) do (2) otrzymamy

$$u_o = U_{z1m} \left[|K_1| \sin(\omega t + \beta_1) + \sum_{k=2}^{n} |K_k| \, m_k \sin(k\omega t + \vartheta_k) \right] \tag{4}$$

gdzie:

$|K_1|$, $|K_k|$ - moduły współczynników przenoszenia,

β_1, β_k - argumenty współczynników przenoszenia,

U_{z1m} - amplituda pierwszej harmonicznej napięcia zasilającego mostek,

$\vartheta_k = \alpha_k + \beta_k$.

Znaki "plus" w równaniu (1) obowiązują, gdy pierwsza pochodna napięcia u_o obliczona dla górnej granicy całkowania jest ujemna, czyli gdy

$$\left.\frac{du_o}{dt}\right|_{t=t_i} < 0 \tag{5}$$

a znaki "minus" obowiązują, gdy

$$\left.\frac{du_o}{dt}\right|_{t=t_i} > 0 \tag{6}$$

gdzie t_i - górna granica całkowania.

Po wstawieniu (4) do (1) i podzieleniu przez U_{z1m}, otrzymamy

$$F' = \frac{F}{U_{z1m}} = \frac{1}{T}\int_0^T |u'_o|\, dt \tag{7}$$

gdzie:

$u'_o = \frac{u_o}{U_{z1m}}$ - względne napięcie na przekątnej pomiarowej;

$$u'_o = |K_1| \sin(\omega t + \beta_1) + \sum_{k=2}^{n} |K_k|\, m_k \cdot \sin(k\omega t + \vartheta_k) \tag{8}$$

Po rozwiązaniu równania $u'_o = 0$ i znalezieniu miejsc zerowych $t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_l$ oblicza się wartość całki F' za okres T.

Odchylenie α przyrządu magnetoelektrycznego jest proporcjonalne do średniej wartości napięcia przyłożonego na zaciski przyrządu, a więc do wartości całki F' - czyli

$$\alpha = K \cdot F' \tag{9}$$

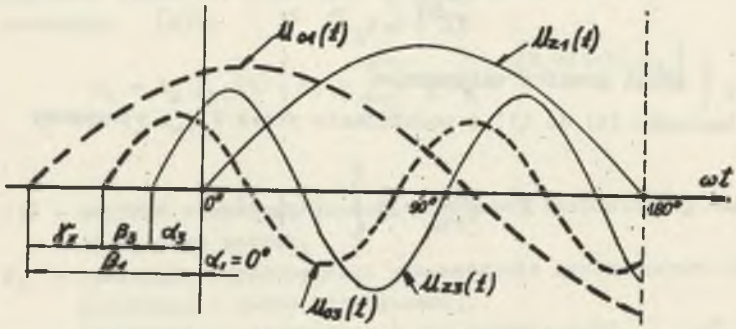
gdzie K - stała konstrukcyjna przyrządu.

Analiza wpływu wyższych harmonicznych napięcia zasilającego na dokładność pomiarów liniowymi mostkami prądu przemiennego w przypadku ogólnym, to znaczy gdy napięcie zasilające mostek zawiera pierwszą oraz n wyższych harmonicznych jest mało przejrzysta. W związku z tym autor wprowadza następujące uproszczenia:

a) napięcie zawiera tylko pierwszą i trzecią harmoniczną, co w przybliżeniu jest spełnione przy zasilaniu mostka z sieci energetycznej (patrz rys. 1 [3]),

b) napięcie zawiera tylko pierwszą i drugą harmoniczną, co w przybliżeniu jest spełnione przy zasilaniu mostka z generatora elektrocznego (patrz rys. 2 i 3 [3]).

2. Napięcie zasilające mostek zawiera tylko pierwszą i trzecią harmoniczną (rys. 2)



Rys. 2. Napięcie na przekątnej zasilania U_z i napięcie na przekątnej pomiarowej U_o

Zgodnie z wzorem (8) mamy

$$u'_o = |K_1| \sin(\omega t+\beta_1) + |K_3| \; m_3 \cdot \sin(3\omega t + \vartheta_3) \qquad (10$$

Po podstawieniu

$$n_3 = \frac{|K_1|}{|K_3|}; \quad u''_o = \frac{u'_o}{|K_3|} \qquad (11)$$

do (10) otrzymamy

$$u''_o = n_3 \sin(\omega t + \beta_1) + m_3 \sin(3\omega t + \vartheta_3) \qquad (12)$$

gdzie:

n_3 - stopień niezrównoważenia mostka dla pierwszej harmonicznej.

Na podstawie (1) oraz (9) mamy

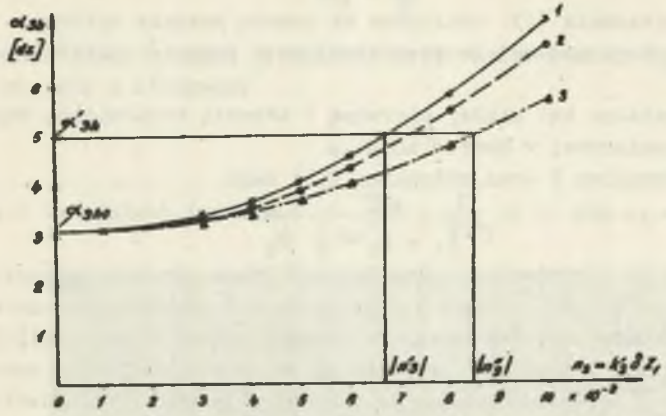
$$\alpha_{3h} = \frac{K}{T}\left(\pm \int_0^{t_1} u''_o \, dt \pm \ldots\ldots \pm \int_{t_l}^{T} u''_o \, dt\right) \qquad (13)$$

gdzie:

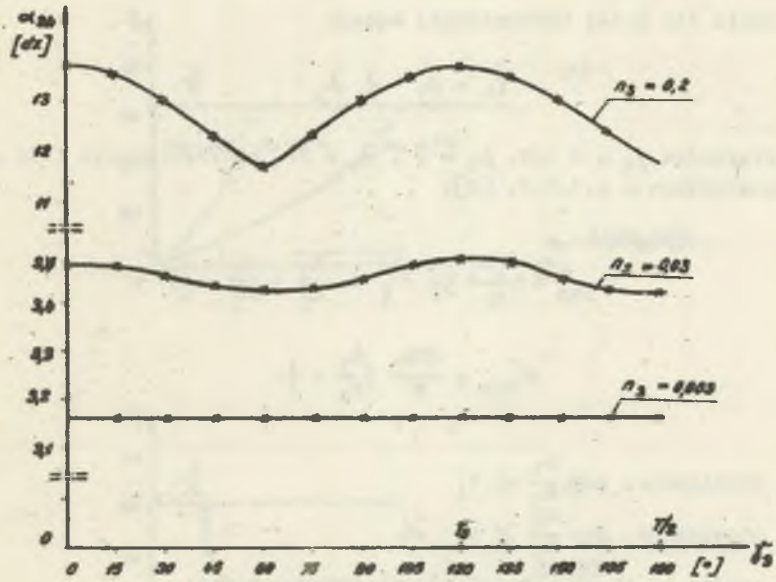
$t_1, \ldots, t_l$ - miejsca zerowe równania

$n_3 \sin(\omega t + \beta_1) + m_3 \sin(3\omega t + \vartheta_3) = 0$,

α_{3h} - odchylenie detektora dla przypadku gdy napięcie zawiera tylko pierwszą i trzecią harmoniczną.



Rys. 3. Odchylenie detektora dla m_3 = 5%
Krzywa 1 – γ_3 = 0; $2\pi/3$; $4\pi/3$ rad; krzywa 2 – γ_3 = $\pi/6$; $5\pi/6$; $3\pi/2$ rad;
krzywa 3 – γ_3 = $\pi/3$; π; $5\pi/3$ rad



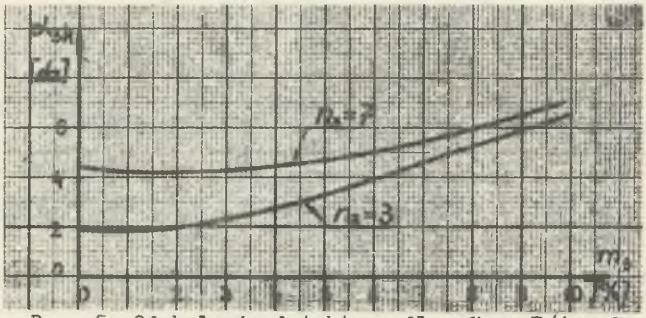
Rys. 4. Odchylenie dektektora
dla m_3 = 5%

Wartość wyrażenia (13) obliczona za pomocą maszyny cyfrowej dla podanych przez autora parametrów przedstawiono w formie wykresów na rysunkach 3, 4, 5.

Przez γ_3 oznaczono kąt między pierwszą i trzecią harmoniczną napięcia na przekątnej pomiarowej w chwili t = 0.

Zgodnie z rysunkiem 2 oraz równaniem (12) mamy

$$\gamma_3 = \beta_1 - \frac{1}{3}\vartheta_3$$



Rys. 5. Odchylenie detektora dla $\gamma_3 = \pi/4$ rad

Analogicznie dla k-tej harmonicznej będzie

$$\gamma_k = \beta_1 - \frac{1}{k}\vartheta_k$$

Dla przypadku $\gamma_3 = 0$ (np. $\beta_1 = 0$ i $\vartheta_3 = 0$), po rozwiązaniu (13) i (14) mamy (szczegółowo w p.3.1.1. [4])

$$\alpha_{3ha} = \frac{2Km_3}{\pi}\left(\frac{2}{3}\sqrt[\frac{3}{2}]{1-\frac{n_3}{m_3}} + \frac{n_3}{m_3} + \frac{1}{3}\right) \tag{15}$$

$$\alpha_{3hb} = \frac{2Km_3}{\pi}\left(\frac{n_3}{m_3} + \frac{1}{3}\right) \tag{16}$$

gdzie

α_{3ha} obowiązuje, gdy $\frac{n_3}{m_3} \leqslant 1$,

α_{3bh} obowiązuje, gdy $\frac{n_3}{m_3} \geqslant 1$,

m_3 - współczynnik zawartości trzeciej harmonicznej.

Różniczukjąc (15) i (16) względem n_3, otrzymujemy wzory określające czułość S układu mostkowego

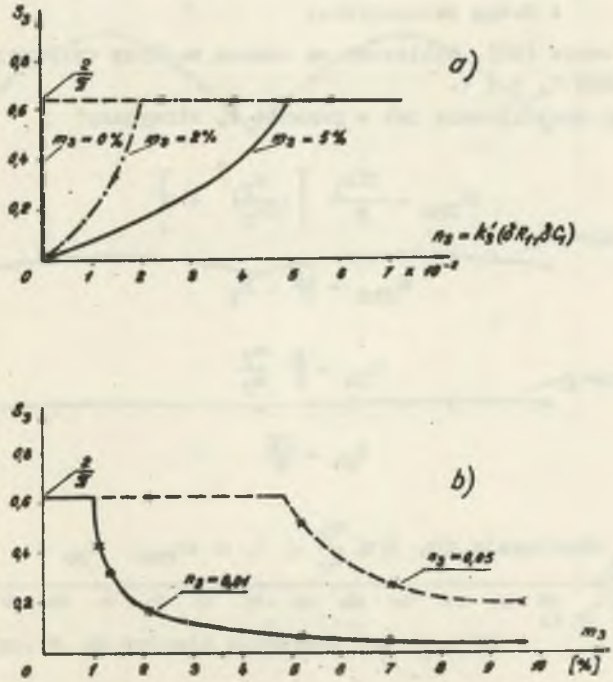
$$S_{3a} = \frac{2K}{\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{n_3}{m_3}}\right) \tag{17}$$

$$S_{3b} = \frac{2K}{\pi} \tag{18}$$

Dla znalezienia minimum odchylenia detektora w funkcji n_3, przyrównujemy (17) do zera i otrzymamy

$$n_3 = 0$$

Znaczy to, że minimum (ponieważ $\frac{d^2 \alpha_{3ha}}{dn_3^2} = \frac{K}{\pi m_3} > 0$ dla $n_3 = 0$) wyrażenia (15) przypada w punkcie $n_3=0$. Inaczej można powiedzieć, że minimum odchylenia detektora przypada w punkcie $n_3 = 0$ (czyli $\delta R_1 = \delta C_1 = 0$ - patrz rys. 6 [3]), czyli w stanie równowagi rzeczywistej mostka dla pierwszej harmonicznej. Jest to bardzo ważny wniosek, ponieważ w pracy [1] wykazano, że w mostkach nieliniowych w pewnych warunkach występuje przesunięcie minimum odchylenia detektora poza równowagę rzeczywistą mostka dla pierwszej harmonicznej. Wiadomo, że dla detektora jest zupełnie obojętne, czy odkształcone napięcie na przekątnej pomiarowej jest wynikiem zasilania mostka liniowego napięciem odkształconym, czy też wynikiem zasilania mostka nieliniowego napięciem ściśle sinusoidalnym. Wartość wyrażeń (17) i (18) przedstawiono na rys. 6 dla K=1.



Rys. 6. Czułość mostka z detektorem wartości średniej dla K=1

3. Napięcie zasilające mostek zawiera tylko pierwszą i drugą harmoniczną

Zgodnie z (8) mamy

$$u_o'' = n_2 \sin(\omega t + \beta_1) + m_2 \sin(2\omega t + \vartheta_2) \tag{19}$$

gdzie:

$n_2 = \frac{|K_1|}{|K_2|}$ - stopień nierzównoważenia mostka dla pierwszej harmonicznej

m_2 - - współczynnik zawartości drugiej harmonicznej,

$u_o'' = \frac{u_o'}{|K_2|}$.

Na podstawie (1) oraz (9) mamy

$$\alpha_{2h} = \frac{K}{T}\left(\pm \int_0^{t_1} u_o'' \, dt \pm \ldots \pm \int_{t_l}^{T} u_o'' \, dt\right) \tag{20}$$

gdzie:

$t_1, \ldots, t_l$ - miesca zerowe równania

$n_2 \sin(\omega t + \beta_1) + m_2 \sin(2\omega t + \vartheta_2) = 0$,

α_{2h} - - odchylenie detektora gdy napięcie zawiera tylko pierwszą i drugą harmoniczną.

Wartość wyrażenia (20), obliczona za pomocą maszyny cyfrowej przedstawiono na rysunkach 7, 8 i 9.

Postępując analogicznie jak w punkcie 2, otrzymamy

$$\alpha_{2ha} = \frac{2Km_2}{\pi}\left[\left(\frac{n_2}{2m_2}\right)^2 + 1\right] \tag{21}$$

$$\alpha_{2hb} = \frac{2K}{\pi} \cdot n_2 \tag{22}$$

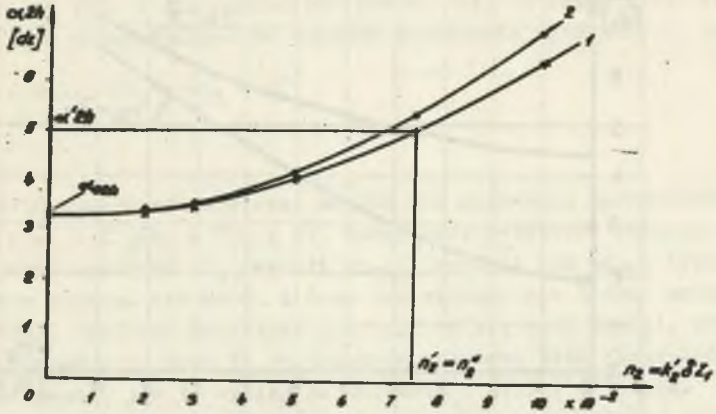
$$S_{2a} = \frac{K}{\pi} \frac{n_2}{m_2} \tag{23}$$

$$S_{2b} = \frac{2K}{\pi} \tag{24}$$

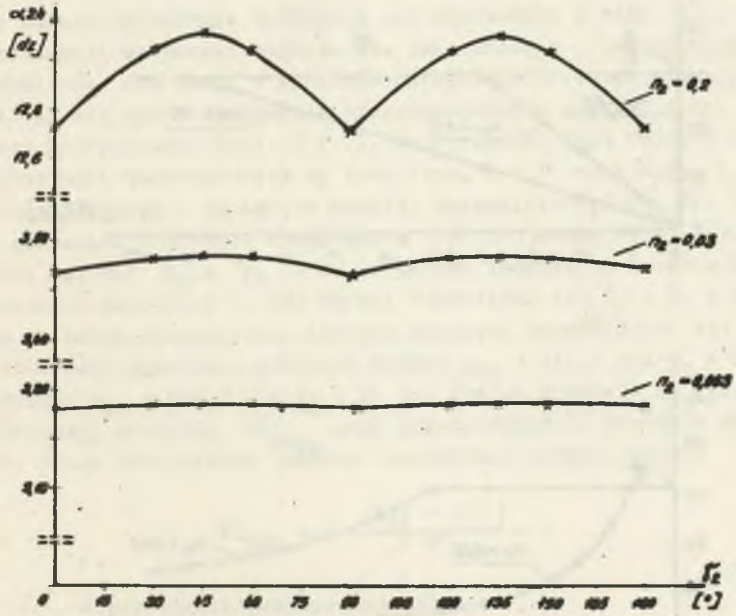
gdzie

α_{2ha}, S_{2a} obowiązuje dla $0 \leqslant \frac{n_2}{m_2} \leqslant 2$, a α_{2hb}, S_{2b}

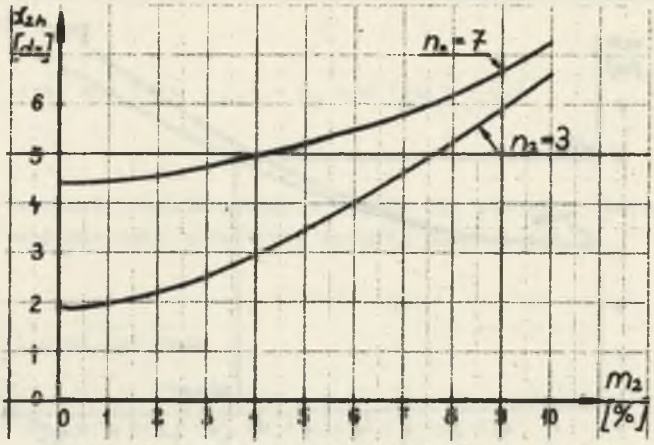
dla $\frac{n_2}{m_2} \geqslant 2$.



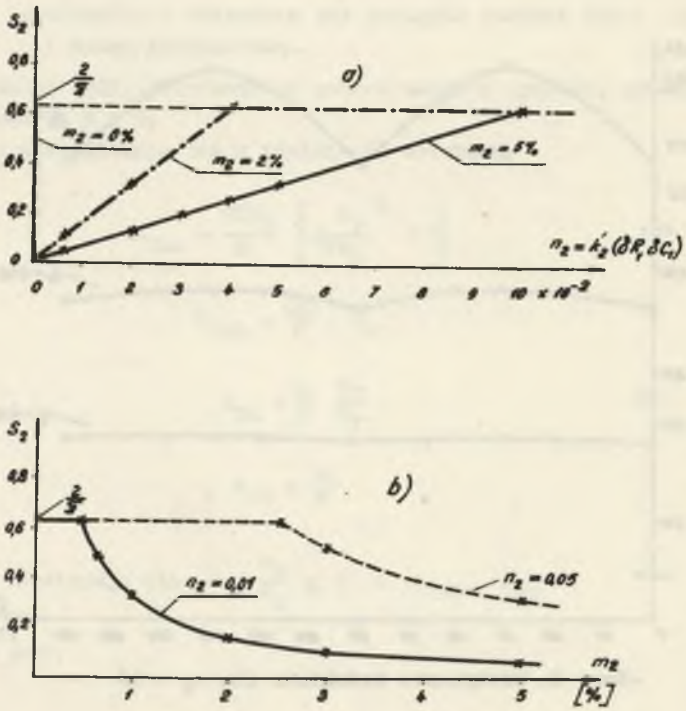
Rys. 7. Odchylenie dektektora dla m_2 = 5%
Krzywa 1 - γ_2 = 0; $\pi/2$; π; $3\pi/2$ rad; krzywa 2 - γ_2 = $\pi/4$; $3\pi/4$; $5\pi/4$; $7\pi/4$ rad



Rys. 8. Odchylenie detektora dla m_2 = 5%



Rys. 9. Odchylenie detektora dla $\gamma_2 = \pi/4$ rad



Rys. 10. Czułość mostka z detektorem wartości średniej dla K = 1

Wartość wyrażeń (23) i (24) przedstawiono na rys. 10 dla K = 1. Podobnie jak w punkcie 2 można wykazać że minimum odchylenia detektora przypada dla $\frac{n_2}{m_2} = 0$ (czyli $\delta R_1 = \delta C_1 = 0$).

4. Wnioski

W stanie równowagi rzeczywistej mostka dla pierwszej harmonicznej, czyli dla $n_2 = n_3 = 0$ ($\delta R_1 = \delta C_1 = 0$), odchylenie detektora reagującego na srednią wartość napięcia U_o wynosi α_{3ho} (rys. 3) lub α_{2ho} (rys. 7) i jest niestety większe niż zero. Z tego też względu nie można wykorzystać wyższych stopni czułości detektora (odchylałby się poza skalę), zwłaszcza dla dużych wartości m_k oraz K_k co znacznie zwiększa błąd nieczułości mostka. Równoczesnie, jak to wynika za zależności (17) i (23) oraz rysunku 6a i 10a w miarę zbliżania się do stanu równowagi rzeczywistej mostka czyli do $n_2 = n_3 = 0$), czułość mostka maleje do zera. W związku z tym w praktyce wykonuje się dwa pomiary przy pewnej nierównowadze mostka dla pierwszej harmonicznej. Mianowicie, wyprowadza się mostek ze stanu równowagi w kierunku wzrastającej impedancji ($+\delta Z$) do uzyskania odchylenia detektora np. α'_{2h}, α'_{3h} (rys. 3 i 7), oraz drugi pomiar wyprowadzając tym razem mostek z równowagi w kierunku malejącej impedancji ($-\delta Z$) aż do uzyskania takiego samego odchylenia detketora jak poprzednio a więc α'_{2h}, α'_{3h}. Wartość impedancji mierzonej oblicza się jako średnią arytmetyczną tych dwóch pomiarów. Jak widać z wykresów odchylenie α detektora wartości średniej zależy nie tylko od stopnia niezrównoważenia mostka ($n2$, n_3) dla pierwszej harmonicznej (rys. 3 i 7), lecz również jest funkcją współczynnika zawartości harmonicznych m_2 i m_3 (rys. 5 i 9) oraz kąta γ_2 między napięciem pierwszej a napięciem drugiej harmonicznej (rys. 8), lub kąta γ_3 między napięciem pierwszej a napięciem trzeciej hamonicznej (rys. 4).

Jeżeli np. kąt $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ odpowiada impedancji wzrastającej ($+\delta Z$) to impedancji malejącej ($-\delta Z$) będzie odpowiadał kąt $\gamma_2 = \gamma_3 = \pi$ rad. Stąd wniosek że druga harmoniczna (gólnie parzyste harmoniczne) nie powoduje błędu równowagi pozornej, ponieważ krzywa $\alpha_{2h} = f(n_2)$ dla $\gamma_2 = 0$ pokrywa się z krzywą $\alpha_{2h} = f(n_2)$ dla $\gamma_2 = \pi$ rad (patrz krzywa 1 na rys. 7). A więc błąd równowagi pozornej δZ_{p2h} przy zniekształceniu napięcia zasilającego tylko drugą harmoniczną (ogólnie parzystymi harmonicznymi)

$$\delta Z_{p2h} = \pm \frac{|n'_2| - |n''_2|}{2\,k'_2} = 0 \qquad 225)$$

gdzie k'_2 - współczynnik proporconalności.

Natomiast trzecia harmoniczna (ogólnie nieparzysta harmoniczne) jest źródłem błędu równowagi pozornej δZ_{p3h}, ponieważ krzywa $\alpha_{3h} = f(n_3)$ dla $\gamma_3 = 0$ jest przesunięta względem krzywej $\alpha_{3h} = f(n_3)$ dla $\gamma_3 = \pi$ rad (patrz krzywe 1 i 3 na rys. 3).

Dla otrzymania tego samego odchylenia α_{3h} należy bardziej wyprowadzić mostek z równowagi cprzy $\gamma_3 = \pi$ rad niż przy $\gamma_3 = 0$, czyli zgodnie z rysunkiem 3.

$$\left| n_3'' = k_3' \left(- \delta Z_1'' \right) \right| > \left| n_3' = k_3' \left(+ \delta Z_1' \right) \right|$$

W związku z tym powstaje błąd równowagi pozornej

$$\delta Z_{p3h} = \pm \frac{|n_3'| - |n_3''|}{2\, k_3'} = \pm \frac{|+ \delta Z_1''| - |- \delta Z_1'|}{2} > 0$$

A zatem tylko przy zasilaniu mostka napięciem ściśle sinusoidalnym ($m_k = 0$), czułość mostka jest stała, niezależna od stopnia nierównowagi mostka i wynosi $2K/\pi$. Jest to równocześnie maksymalna czułość tego mostka.

Natomiast przy zasilaniu mostka zależnego od częstotliwości napięciem odkształconym (np. praktycznie sinusoidalnym) występuje w poblużu równowagi mostka dla pierwszej harmonicznej znaczne zmniejszenie czułości układu mostkowego, a tym samym znaczne zwiększenie błędu nieczułości, w porównaniu z błędem nieczułości jaki byłby przy zasilaniu tego mostka napięciem ściśle sinusoidalnym. Prócz tego powstaje błąd równowagi pozornej spowodowany nieparzystymi harmonicznymi.

Przytoczone obliczenia i wykresy odnoszą się do prostownika o idealnej charakterystyce prostowania ($R_{przew} = 0$, $R_{zap} = \infty$) np. prostownik mechaniczny. Jeżeli zamiast prostownika idealnego zastosuje się diody półprzewodnikowe, to w poblużu równowagi mostka nastąpi dodatkowe zmniejszenie czułości układu, spowodowane nieliniowością charakterystyki $U = f(I)$ tego typu prostowników.

Jak wykazały pomiary (szczegóły w p.5.2 [4]), błędy nieczułości oraz błędy równowagi pozornej mostka z detektorem wartości średniej, zasilanego napięciem praktycznie sinusoidalnym, mogą wynosić nawet kilka procent, a więc bardzo dużo.

Stąd wniosek, że detektor wartości średniej można stosować w liniowych mostkach prądu przemiennego niezależnych od częstotliwości lub w mostkach zależnych od częstotliwości, ale zasilanych napięciem ściśle sinusoidalnym. W innym przypadku wystąpi błąd równowagi pozornej oraz znacznie zwiększony błąd nieczułości

LITERATURA

[1] Zagajewski T.: Nieliniowe mostki prądu zmiennego. Prace badawcze PIT. 1950, nr 2.

[2] Żurawlewa T.A.: Czuwstwitielność mostowych schiem pieremiennowo toka. IWUZ Priborostrojenje 1965, nr 6.

[3] Parchański J.: Współczynnik przenoszenia mostka prądu przemiennego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 1971, nr 32.

[4] Parchański J.: Wpływ harmonicznych napięcia zasilającego na dokładność mostków liniowych. Praca doktorska. Politechnika Śląska 1968.

Wpłynęło do redakcji w kwietniu 1971 r.

МОСТ С ДЕТЕКТОРОМ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Р е з ю м е

Проведен анализ точности измерений линейными мостами переменного тока с детектором реагирующим на среднее значение напряжения. Указаны причины большой ошибки нечувствительности и ошибки кажущегося равновесия моста.

BRIDGE WITH A MEAN VALUE DETECTOR

S u m m a r y

An analysis of the accuracy of a.c. linear bridges measurements with a detector responding to mean voltage value is performed. The causes of big insensitivity error and error of apparent bridge equilibrium are shown.