ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975

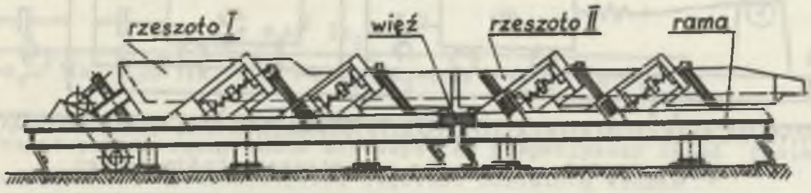
Seria: Górnictwo z. 62 Nr kol. 407

Tadeusz Banaszewski
Instytut Maszyn Górniczych, Przeróbczych i Automatyki AGH w Krakowie

ANALIZA DRGAŃ PRZESIEWACZA REZONANSOWEGO TRÓJMASOWEGO

Streszczenie. W oparciu o model mechaniczny trójmasowy wyprowadzono równanie częstości drgań własnych przesiewacza, a następnie wzory na amplitudy drgań nietłumionych i tłumionych poszczególnych mas. Przykładowo zostały wykreślone przez maszynę cyfrową krzywe rezonansowe rzeszot i ram dla różnych intensywności tłumień.
Wyniki rozważań teoretycznych skonfrontowano z przeprowadzonymi badaniami przesiewacza przemysłowego.

Przedstawiony na rys. 1 przesiewacz stanowi układ czterech drgających mas. W rozwiązaniu tym nie ma bezpośrednich połączeń pomiędzy rzeszotami, natomiast ramy połączone są ze sobą więzią, która zezwala na względne ich przemieszczenie w kierunku pionowym. Dokładna analiza takiego układu wymagałaby rozwiązania 7 równań różniczkowych, co napotykałoby na bardzo duże trudności, a końcowe wzory byłyby wyjątkowo skomplikowane. W związku z tym ze względów praktycznych i z wystarczającą dla praktyki dokładnością analizę takiego układu przeprowadza się w oparciu o model mechaniczny posiadający trzy stopnie swobody [1],[2].



Rys. 1. Schemat przesiewacza trójmasowego

Rozpatrzmy drgania takiego przesiewacza w oparciu o model pokazany na rys. 2. Model ten odpowiada ściśle przesiewaczowi, w którym wahacze byłyby ustawione pionowo. W rzeczywistości wahacze są pochylone o kąt około 0,44 rad (25°).

Przeanalizujmy najpierw drgania nietłumione. Przyjmując przemieszczenia mas x_1, x_2 i x_3 o zwrotach dodatnich, pokazanych na rys. 2, równania różniczkowe dla takiego układu można zapisać następująco:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 (x_1 - x_3) = k_0 (r \sin\omega t - x_1 + x_3)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = k_2 (x_3 - x_2) \tag{1}$$

$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 = k_0 (-r \sin\omega t + x_1 - x_3) + k_2 (x_2 - x_3) + k_1 (x_1 - x_3)$$

gdzie:

m_1 – masa rzeszota I,

m_2 – masa rzeszota II,

m_3 – masa obydwu ram,

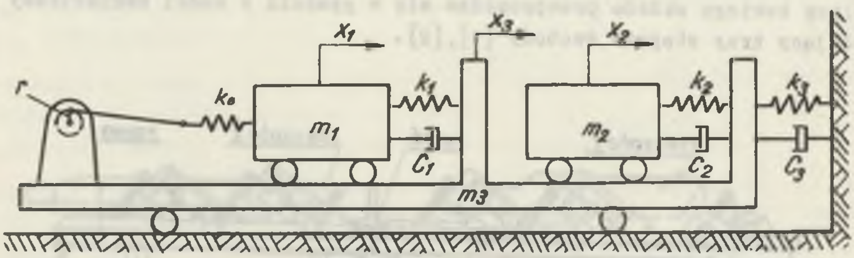
k_0 – współczynnik sprężystości więzi sprężystej,

k_1 – współczynnik sprężystości zawieszenia rzeszota I,

k_2 – współczynnik sprężystości zawieszenia rzeszota II,

k_3 – współczynnik sprężystości podparcia ram,

r – amplituda drgań dźwigni napędowej w punkcie styku z krążkami gumowymi więzi sprężystej.



Rys. 2. Model mechaniczny przesiewacza trójmasowego

Całki szczególne równań (1) określające drgania wymuszone mają postać:

$$x_1 = A_1 \sin\omega t \qquad x_2 = A_2 \sin\omega t \qquad x_3 = A_3 \sin\omega t \tag{2}$$

gdzie:

A_1, A_2 i A_3 – amplitudy drgań rzeszota I, rzeszota II i ram.

Podstawiając funkcję (2) i ich pochodne do równania (1) otrzymamy układ równań algebraicznych ze względu na amplitudy A_1, A_2 i A_3. Przyrównując wyznacznik charakterystyczny tych równań do zera otrzymamy następujące równanie częstości drgań własnych:

$$-m_1m_2m_3\omega^6 + \left[m_1m_2(k + k_2 + k_3) + m_2m_3k + m_1m_3k_2\right]\omega^4 - \left[k\,k_2(m_1 + m_2 + m_3) + m_1k_2k_3 + m_2k\,k_3\right]\omega^2 + k\,k_2k_3 = 0 \tag{3}$$

gdzie:

$k = k_o + k_1$

Równanie (3) jest równaniem stopnia trzeciego kwadratów częstości. Rozwiązując to równanie można wyliczyć trzy częstości rezonansowe rozpatrywanego układu.

W wyniku rozwiązania równań (1) otrzyma się następujące wzory na amplitudy drgań

$$A_1 = \frac{k_or\left[(k_2-m_2\omega^2)(k_3-m_3\omega^2) - k_2m_2\omega^2\right]}{(k-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)(k_3-m_3\omega^2)-km_1\omega^2(k_2-m_2\omega^2)-k_2m_2\omega^2\cdot(k-m_1\omega^2)} \tag{5}$$

$$A_2 = \frac{k_ork_2m_1\omega^2}{(k-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)(k_3-m_3\omega^2)-km_1\omega^2(k_2-m_2\omega^2)-k_2m_2\omega^2(k-m_1\omega^2)} \tag{6}$$

$$A_3 = \frac{k_rr\,m_1\omega^2(k_2-m_2\omega^2)}{(k-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)(k_3-m_3\omega^2)-km_1\omega^2(k_2-m_2\omega^2)-k_2m_2\omega^2(k-m_1\omega^2)} \tag{7}$$

Analizując podane wzory można zauważyć, że rozpatrywany układ posiada jedną szczególnie charakterystyczną częstość określoną wzorem

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \tag{8}$$

Przy tej częstości wzory na amplitudy przyjmują proste postacie

$$A_1 = \frac{k_or}{k - m_1\omega^2} \tag{9}$$

$$A_2 = \frac{-k_0 r m_1}{m_2(k - m_1 \omega^2)} \tag{10}$$

$$A_3 = 0$$

Stosująo zatem ozęstość drgań wymuszających $\omega = \omega_{20}$ drgania ramy zanikają do zera, a jak wynika ze wzorów (9) i (10) przy tej częstości i warunku $m_1 = m_2$ amplitudy A_1 i A_2 są sobie równe. Jest to więc najbardziej korzystna ozęstość robooza rozpatrywanego układu.

Przejdźmy z kolei do układu tłumionego. Równania różniczkowe ruchu dla modelu przedstawionego na rys. 2 można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_1(x_1 - x_3) &= k_0(r\sin\omega t - x_1 + x_3) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2(x_3 - x_2) + c_2(\dot{x}_3 + \dot{x}_2) \\ m_3\ddot{x}_3 + c_3\dot{x}_3 + k_3x_3 &= -k_0(r\sin\omega t - x_1 + x_3) + k_1(x_1 - x_3) + \\ &+ \alpha_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_2(x_2 - x_3) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

c_1, c_2 i c_3 – współczynniki tłumienia pochodzące od sprężyn głównych rzeszota I, rzeszota II i od sprężyn podporowych.

Przy rozwiązywaniu równań (11) najwygodniej posłużyć się metodą impedancji [3], przyjmując całki drgań wymuszonych w formie:

$$x_1 = x_{01}e^{i\omega t} \qquad x_2 = x_{02}e^{i\omega t} \qquad x_3 = x_{03}e^{i\omega t} \tag{12}$$

gdzie:

$i = \sqrt{-1}$ a x_{01}, x_{02} i x_{03} przedstawiają zespolone amplitudy.

Po obliczeniu pochodnych funkcji (12) i podstawieniu ich do równań (11) otrzyma się układ trzech równań algebraicznych ze względu na zespolone amplitudy.

Obliczając amplitudy zespolone, a następnie przechodząc na amplitudy rzeczywiste, otrzyma się następujące wzory:

$$A_1 = \frac{k_0 r\sqrt{(j\omega^4 - l\omega^2 + n)^2 + (-p\omega^3 + q\omega)^2}}{(-a\omega^6 + b\omega^4 - d\omega^2 + e)^2 + (f\omega^5 - g\omega^3 + h\omega)^2} \tag{13}$$

$$A_2 = \frac{k_0 r \sqrt{(r\omega^2)^2 + (s\omega^3)^2}}{\sqrt{(-a\omega^6 + b\omega^4 - d\omega^2 + e)^2 + (f\omega^5 - g\omega^3 + h\omega)^2}} \tag{14}$$

$$A_3 = \frac{k_0 r \sqrt{(-u\omega^4 + v\omega^2)^2 + (s\omega^3)^2}}{\sqrt{(-a\omega^6 + b\omega^4 - d\omega^2 + e)^2 + (f\omega^5 - g\omega^3 + h\omega)^2}} \tag{15}$$

gdzie:

$a = m_1 m_2 m_3$

$b = m_1 m_2 \ (k+k_2+k_3) + m_2 m_3 k + m_1 m_3 k_2 + c_1 c_2 \ (m_1+m_2+m_3) + m_1 c_2 c_3 + m_2 c_1 c_3$

$d = k\,k_2 \ (m_1+m_2+m_3) + m_1 k_2 k_3 + m_2 k k_3 + k c_2 c_3 + k_2 c_1 c_3 + k_3 c_1 c_2$

$e = k k_2 k_3$

$f = m_1 m_2 \ (c_1+c_2+c_3) + m_2 m_3 c_1 + m_1 m_3 c_2$

$g = c_1 \left[k_2 \ (m_1+m_2+m_3) + k_3 m_2\right] + c_2 \left[k \ (m_1+m_2+m_3) + k_3 m_1\right] +$
$+ c_3 \ (k m_2 + k_2 m_1) + c_1 c_2 c_3$

$h = c_1 k_2 k_3 + c_2 k k_3 + c_3 k k_2$

$j = m_2 m_3$

$l = k_2 m_3 + (k_2+k_3) \ m_2 + c_2 c_3$

$n = k_2 k_3$

$p = m_3 c_2 + (c_2+c_3) \ m_2$

$q = k_2 c_3 + k_3 c_2$

$r = k_2 m_1$

$s = c_2 m_1$

$u = m_1 m_2$

$v = k_2 m_1$

Jak widać, wzory (13), (14) i (15) są bardzo skomplikowane i dlatego też najlepiej będzie prześledzić przebieg krzywych rezonansowych na konkretnym przykładzie, w którym przyjęto następujące dane dotyczące przesiewacza:

$m_1 = 2450$ kg $\quad m_2 = 2350$ kg $\quad m_3 = 17000$ kg

$k_0 = 2{,}55 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^{-1} $\quad r = 0{,}0151$ m

$k_1 = k_2 = 6{,}9 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^{-1} $\quad k_3 = 11{,}8 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^{-1}

Oprócz tych wartości do analizy potrzebne są jeszcze wartości współczynników tłumień. Założono, że $c_1 + c_2 = 3\, c_3$ i przyjęto następujące wartości tłumień.

Tablica 1

Przypadek	I	II	III	IV	V	VI
$c_1=c_2\, [N.s.m^{-1}]$	0	$14{,}7.10^3$	$29{,}4.10^3$	$44{,}1.10^3$	$58{,}8.10^3$	$73{,}5.10^3$
$c_3\, [N.s.m^{-1}]$	0	$9{,}8.10^3$	$19{,}6.10^3$	$29{,}4.10^3$	$39{,}2.10^3$	49.10^3

Podstawiając do równania (3) odpowiednie wartości a następnie rozwiązując go otrzyma się następujące wartości rezonansowe drgań przesiewacza

$$\omega_1 = 22{,}7\ s^{-1}$$

$$\omega_2 = 56{,}7\ s^{-1}$$

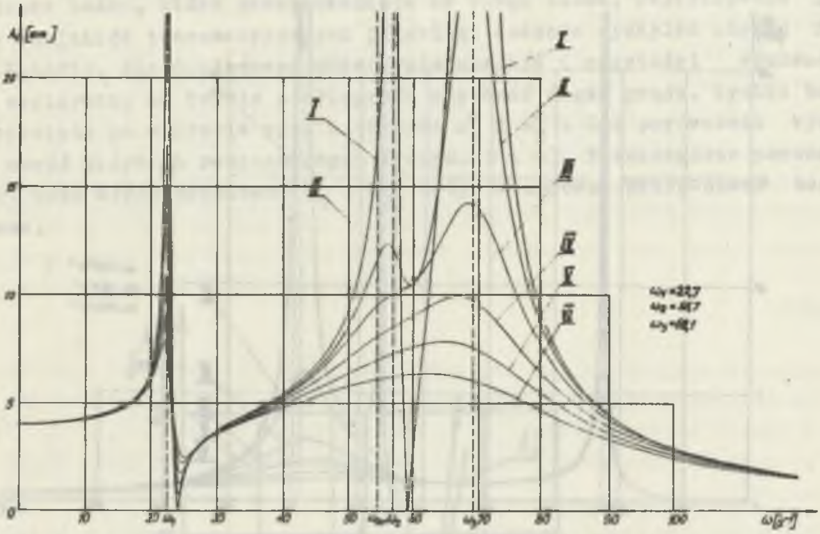
$$\omega_3 = 69{,}1\ s^{-1}$$

Częstość charakterystyczna ω_{20} obliczona wzorem (8) wynosi

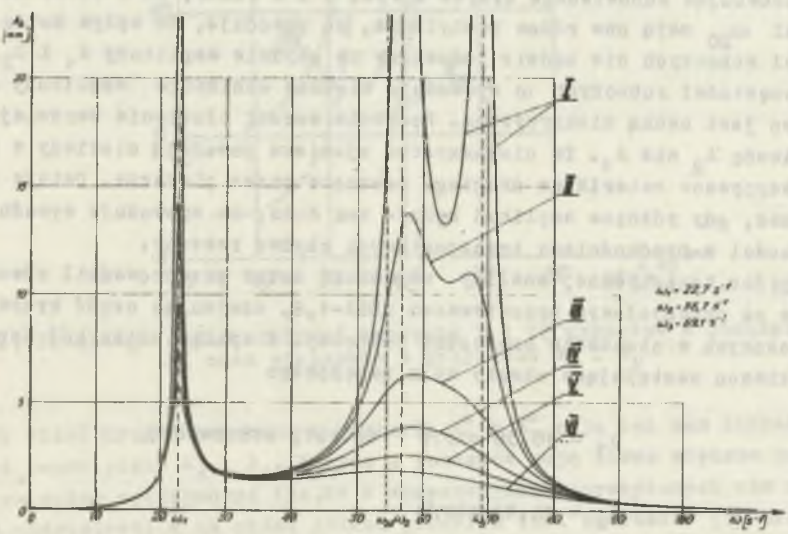
$$\omega_{20} = 54{,}4\ s^{-1}$$

Przytoczone powyżej dane posłużyły do wykreślenia przez maszynę cyfrową krzywych rezonansowych dla poszczególnych mas, których przebiegi pokazano na rys. 3, 4 i 5. Cyfry rzymskie od I ÷ VI odnoszą się do poszczególnych tłumień podanych w tablicy 1. Początkowe przebiegi amplitud drgań rzeszota I (rys. 3) i ramy (rys. 5) są podobne do tych, jakie otrzymano dla przesiewacza dwumasowego (rys. 4). Natomiast w zakresie $\omega_2 - \omega_3$ otrzymano skomplikowane przebiegi. W przedziale tym wzrost tłumienia może spowodować zarówno zmniejszanie amplitud drgań (rys. 4 i 5) jak i zwiększanie (rys. 3). Praca w tym zakresie jest praktycznie niemożliwa z uwagi na duże wahania amplitud przy zmianie wartości tłumień roboczych. Ponadto w zakresie $\omega_2 - \omega_3$ otrzymanie tych samych amplitud drgań rzeszota I i II jest praktycznie niemożliwe.

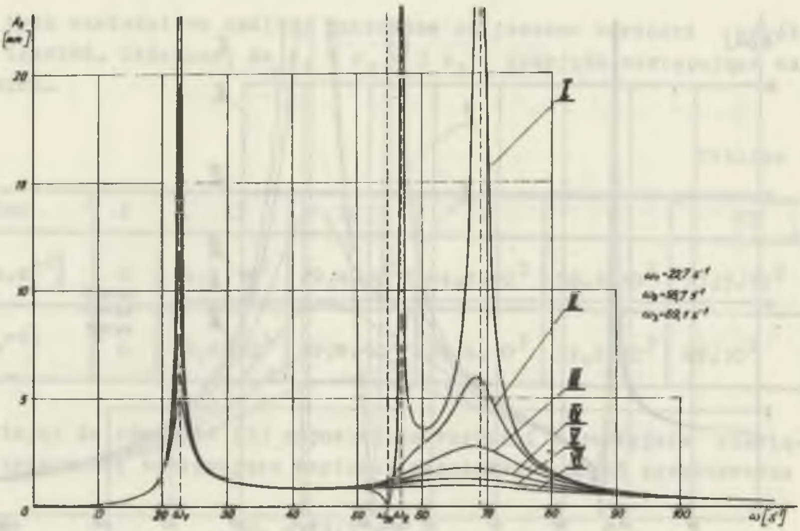
W rzeczywistości przesiewacze te pracują poniżej drugiej częstości rezonansowej w pobliżu częstości ω_{20}. Przy tej częstości można otrzymać w przybliżeniu jednakowe amplitudy drgań obydwu rzeszot i jednocześnie bardzo małe drgania ramy (rys. 5).



Rys. 3. Przebiegi amplitud drgań rzeszota I dla różnych wartości tłumień



Rys. 4. Przebiegi amplitud drgań rzeszota II dla różnych wartości tłumień



Rys. 5. Przebiegi amplitud drgań ram przesiewacza dla różnych wartości tłumień

Porównując odpowiednie krzywe z rys. 3 i 4 widać, że w otoczeniu częstości ω_{20} mają one różne pochylenia, co powoduje, że wpływ zmian częstości roboczych nie będzie jednakowy na obydwie amplitudy A_1 i A_2. Spadek częstości roboczych ω spowoduje większe obniżenia amplitudy A_2 niż A_1, co jest cechą niekorzystną. Podobnie wzrost tłumienia bardziej obniża amplitudę A_2 niż A_1. Te niekorzystne zjawiska powodują niekiedy w praktyce zasypywane materiałem drugiego rzeszota przez pierwsze. Dzieje się to wówczas, gdy różnica amplitud będzie tak duża, że spowoduje wyraźne rozbieżności w prędkościach transportowych obydwu rzeszot.

Oprócz teoretycznej analizy zagadnień autor przeprowadził również badania na przemysłowym przesiewaczu ZDRA-1,8, zdejmując część krzywych rezonansowych w otoczeniu częstości roboczej. W wyniku zmian kół napędowych uzyskiwano następujące obroty wału napędowego

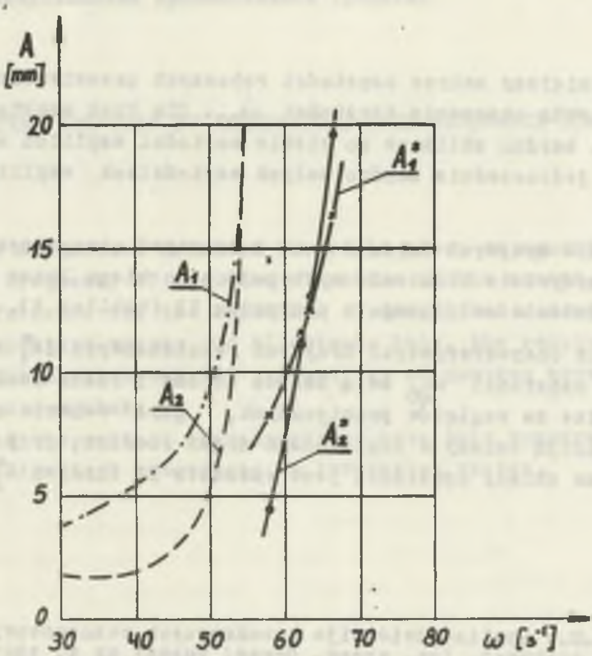
n_1 = 10,58 obr/s (obroty stosowane)

n_2 = 10,13 obr/s

n_3 = 9,83 obr/s

n_4 = 9,17 obr/s

Podczas badań, które przeprowadzono na biegu luzem, rejestrowano przy pomocy czujników tensometrycznych przebiegi czasowe wychyleń obydwu rzeszot. Ponadto, dla dokładnego określenia obrotów i częstości wymuszających, zapisywano na taśmie oscylografu częstość drgań prądu. Wyniki badań przedstawiono na wykresie rys. 6 (krzywa A_1^* i A_2^*). Dla porównania wykreślono część krzywych rezonansowych I (rys. 3 i 4). Poszczególne parametry układu, poza współczynnikami k_1 i k_2, były w obydwu przypadkach bardzo zbliżone.



Rys. 6. Przebiegi amplitud drgań rzeszota I i II uzyskane z pomiarów A_1^* i A_2^* oraz otrzymane z przykładu A_1 i A_2

Jak widać krzywe uzyskane z pomiarów A_1^* i A_2^* mają ten sam charakter co krzywe teoretyczne A_1 i A_2. Krzywe z pomiarów mają nieco większe pochylenie, co można wytłumaczyć tym, że w rozważaniach teoretycznych nie uwzględniono oddziaływania na układ półkul gumowych tzw. zderzaków [5] oraz tym, że krzywe A_1 i A_2 dotyczą przypadku, gdy $c_1 = c_2 \longrightarrow 0$.

Bezpośrednim efektem tego jest obniżenie punktu przecięcia się obydwu krzywych w stosunku do krzywych z przykładu.

Przesunięcie w prawo krzywych z pomiarów jest spowodowane tym, że w rzeczywistości współczynniki k_1 i k_2 były większe niż założono w przykładzie

Jak wykazano w pracy [6], wpływ współczynnika k_2 na przesunięcie drugiej częstości rezonansowej jest bardzo duży.

Z badań wynika, że równe amplitudy drgań obydwu rzeszot przesiewacza ZDRA-1,8 otrzymuje się tylko przy częstości wymuszającej $\omega = 69{,}5\ s^{-1}$ (rys. 6). Powyżej tej częstości rzeszoto II będzie miało większą amplitudę drgań niż rzeszoto I. Natomiast poniżej tej częstości jest na odwrót. Obydwie krzywe mają strome nachylenie, a to nie zapewnia stałych amplitud przy niedużych wahaniach częstości, których trudno w praktyce uniknąć.

Wnioski

- Najkorzystniejszy zakres częstości roboczych przesiewacza trójmasowego leży w bliskim otoczeniu częstości ω_{20}. Dla tych częstości można otrzymać duże i bardzo zbliżone do siebie wartości amplitud A_1 i A_2 (rys. 3 i 4) przy jednocześnie bardzo małych wartościach amplitud drgań ramy (rys. 5).
- Z porównania krzywych (rys. 3 i 4) z krzywymi otrzymanymi z badań wynika, że rzeczywiste tłumienie występujące na biegu luzem jest dużo mniejsze do tłumienia założonego w przypadku II (tablica 1).
- Rzeczywiste charakterystyki krzywych rezonansowych (A_1^* i A_2^* - rys. 6) w otoczeniu częstości ω_{20} mają bardzo strome i różne nachylenia, co jest niekorzystne ze względów praktycznych, gdyż wahania częstości roboczych powodują zmiany w amplitudach drgań rzeszot, przy czym bardziej wrażliwe na zmiany częstości jest rzeszoto II (krzywa A_2^* - rys. 6).

LITERATURA

[1] Agaew A.M.: Analiza dwiżenija trechmasnych rezonansowych grochotow s uprugim szatunom. Izw. wyzow. Gornyj żurnal nr 4, 1961.

[2] Krjukow B.I.: Dynamika wibracjonnych maszyn rezonansnowo tipa. Naukowa Dumka. Kijew 1967.

[3] Ziemba S.: Analiza drgań. PWN, Warszawa 1957.

[4] Banaszewski T.: Analiza drgań przesiewacza rezonansowego dwumasowego. Zeszyty Naukowe AGH nr 316. Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Zeszyt 46, 1971 r.

[5] Banaszewski T., Łaszczak K.: Oddziaływanie nieliniowych elementów sprężystych na krzywe rezonansowe przesiewaczy dwumasowych (w druku).

[6] Banaszewski T.: Analiza drgań przesiewacza ZDRA-1,8. Sprawozdanie z pracy wykonanej dla COBPWiUK "Separator". Kraków 1971.

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАНСНОГО ТРЕХМАССОВОГО ГРОХОТА

Р е з ю м е

На базе механической трехмассовой модели выведено уравнение частот собственных колебаний грохота, затем формулы амплитуды незатухающих и затухающих колебаний отдельных масс. Цифровой вычислительной машиной вычерчены основанные на примерах резонансные кривые грохотов и рам для разных интенсивностей затухания. Результаты теоретических рассуждений были сопоставлены с проведенными исследованиями промышленного грохота.

AN ANALYSIS OF THE VIBRATION OF A THREEFOLD-MASS RESONANCE SCREEN

S u m m a r y

Basing on the mechanical model of threefold mass, an equation has been derived for the frequency of the free vibration of the screen, and subsequently also formulae for the amplitude of damped and undamped vibrations of the respective masses. To illustrate this, the resonance curves of riddles and frames with varying intensities of damping have been plotted by means of a computer.

The results of theoretical considerations have been compared with the results of investigations concerning an industrial screen.