

Władysław DUDEK

WŁASNOŚCI WIĄZAŃ ZAKAZANYCH WIELOARGUMENTOWYCH
W FUNKCJACH LOGICZNYCH NIEZUPEŁNIE OKREŚLONYCH

Streszczenie. Omówiono metodę minimalizacji słabo określonych funkcji logicznych, tworzących wiązania zakazane wieloargumentowe [4]. Podano algorytmy minimalizacji i przykłady rozwiązań. Na ich tle omówiono niektóre problemy techniczne operacji minimalizacyjnych.

Wiązania zakazane, wyprowadzone w pracach [2], [3], okazały się bardzo skutecznym elementem minimalizacji funkcji logicznych słabo określonych [8]. Omówione tam wiązanie zakazane obejmuje składnik jedynkowy i zerowy sumiloczynowej postaci kanonicznej funkcji wg zależności:

$$\frac{ABCD \dots}{1} + \frac{A\bar{B}CD \dots}{0} = (B + \bar{B})ACD \dots \quad (1)$$

Udowodniono, że w takiej zależności B jest quasi-implikantem, który po zredukowaniu, w przypadku braku dalszych wiązań zakazanych, jest implikantem prostym, pochłaniającym określony składnik jedynkowy postaci kanonicznej. Zaproponowana w pracy [3] metoda minimalizacji drogą redukcji quasi-implikantów uzyskanych z wiązań zakazanych nie może być wykorzystana w tych przypadkach, gdy minimalizowana funkcja nie tworzy takich wiązań zakazanych. Wiązanie zakazane wg zależności (1) nazwiemy wiązaniem pojedynczym, gdyż wiąże ono tylko jeden argument jedynkowego i zerowego składnika postaci kanonicznej (w przypadku zależności (1) argument B).

Istnieć mogą jednak funkcje słabo określone, w których wiązania zakazane pojedyncze nie występują. Przykład takiej funkcji przedstawia siatka Karnaugh na rysunku 1. W przypadku prostej funkcji o kilku argumentach wygodny sposób minimalizacji przedstawiają siatki Karnaugh. Zminimalizowana tą metodą funkcja wg rysunku 1 byłaby określona zależnością:

$$F = E + \bar{A}B \quad (2)$$

Ponieważ do minimalnej postaci nie weszły argumenty C i D, więc wynikałoby stąd, że funkcja jest od tych argumentów niezależna i jest równoważ-

na funkcji trójargumentowej przedstawionej na rysunku 2 [4]. Podgrupy minimalizacyjne obu tych funkcji według rysunku 1 i 2) prowadzą do tej samej postaci minimalnej (2). Schemat tak zminimalizowanego układu (rys. 3) dowodzi w oczywisty sposób zbędności argumentów CiD.

	CDE							
AB	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0						1	
01		1			1			
11				0				0
10								

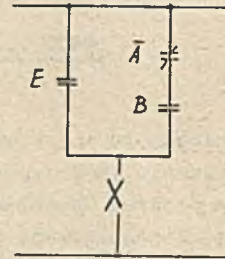
Rys. 1. Siatka Karnaugh'a funkcji logicznej bez wiązań zakazanych pojedynczych

4. Najskuteczniej zminimalizowana zostanie funkcja w wyniku utworzenia podgrup np. jak na rysunku 4, do postaci:

$$F = \bar{A}E + CE \quad (3)$$

	E	
AB	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	
10		1

Rys. 2. Siatka Karnaugh'a funkcji logicznej wg rysunku 1 po wyeliminowaniu zbędnych argumentów



Rys. 3. Schemat układu wg rysunku 2

	CDE							
AB	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0					1		
01		1		0				1
11	0					0		
10			0		1		0	

Rys. 4. Siatka Karnaugh'a funkcji logicznej bez wiązań zakazanych pojedynczych

Z zapisu zminimalizowanej postaci funkcji wynika jednak znowu, że jest to funkcja tylko trzech argumentów (ACE), co potwierdza siatka na rysunku 5. Minimalizując układ wg tej siatki dochodzimy również do wyniku przedstawionego w wyrażeniu (3). Załóżmy jednak, że informacja o zbędności elementów B i D w układzie według rysunku 3 nie jest znana i spróbujmy ułożyć

	E	
AC		
0	1	
1	1	
1	0	
0	0	

Rys. 5. Siatka Karnaugh funkcji logicznej wg rysunku 4 po wyeliminowaniu zbędnych argumentów

tablicę redukcyjną pięcioargumentową (tabl.1). Po ułożeniu tablicy składników jedynekowych i zerowych i wyznaczeniu indeksów jedynekowych stwierdzimy, że w tablicy tej brak jest wiązań zakazanych pojedynczych. Wyznamy wobec tego wiązania zakazane podwójne. Wynikają z nich cztery quasi-implikanty podwójne.

Dwa z nich w wierszach 2 i 3 pochłaniają również zerowy składnik w wierszu 9, czyli nie są implikantami prostymi i wymagają redukcji. Natomiast quasi-implikanty w wierszach 1 i 4 są wynikiem dwu wiązań podwójnych w każdym z wierszy. Uzasadnienie metody postępowania w przypadku wyznaczania implikantów prostych z wiązań zakazanych poprzedzimy poniższymi rozważaniami teoretycznymi, dotyczącymi słabo określonych funkcji logicznych.

Założmy, że funkcja sześćoargumentowa zawiera jeden tylko składnik jedynekowy (rys. 6) oraz jeden składnik zerowy. Kratki puste są składnikami obojętnymi. Z tablicy redukcyjnej 2 wynika, że tworzą one wiązanie zakazane podwójne BE, czyli quasi-implikantem podwójnym jest iloczyn logiczny BE. Już jednak spojrzenie na rysunek 6 pozwala stwierdzić, że tak sformułowana funkcja ma dwa implikanty proste (na rysunku 6 dwie podgrupy), a mianowicie implikant prosty B oraz implikant prosty E. Zaznaczono, je podgrupami na rysunku 6. Przed sformułowaniem wyników ogólnych rozważmy sytuację (rys. 7a) w której funkcja zawiera jeden składnik jedynekowy i dwa, tym razem, składniki zerowe, tworzące ze składnikiem jedynekowym dwa różne

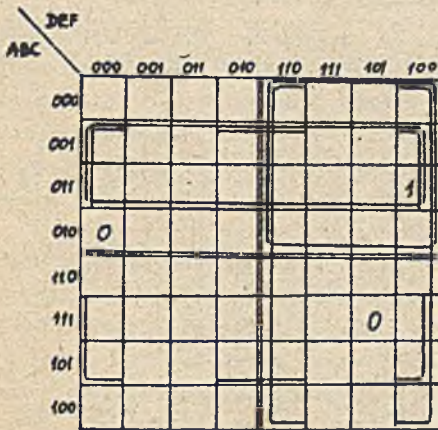
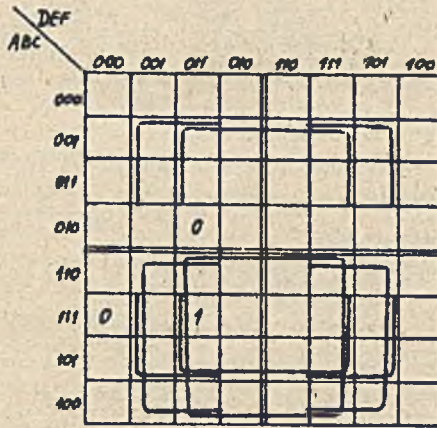
	DEF							
ABC								
000	000	001	011	010	110	111	101	100
000								0
001								
011								
010					1			
110								
111								
101								
100								

Rys. 6. Siatka Karnaugh funkcji złożonej z jednego wiązania zakazanego podwójnego

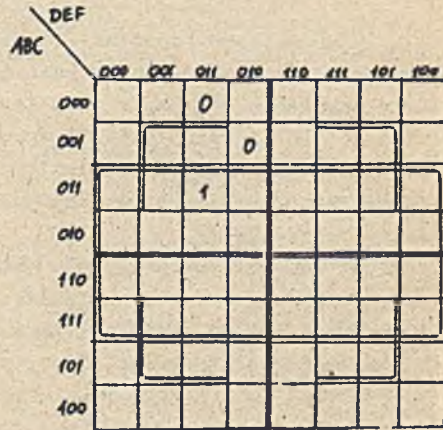
tę (rys. 7a) w której funkcja zawiera jeden składnik jedynekowy i dwa, tym razem, składniki zerowe, tworzące ze składnikiem jedynekowym dwa różne

Tablica redukcyjna funkcji bez wiązań zakazanych pojedynczych

Lp	Argumenty funkcji					Indeks funkcji	Quasi-implikant	Numer implikanta	Implikant	Implikant prosty	
	A	B	C	D	E						
Składowiki jednostkowe	1	\bar{X}^2	\bar{X}^2	\bar{X}^2	+	\bar{X}^2	$\bar{A}\bar{B}CE_2 - 1$	[7], [17]	$\bar{A}\bar{B}CE_2 - 1$	$[\bar{A}C]_2 - [1], [\bar{A}E]_2 - [1^*]$	
	2		\bar{X}^2			\bar{X}^2	$BE_2 - 2$	[7] (2)	$(\bar{A}BE)_2 - (2)$	$[\bar{A}E]$	
	3		\bar{X}^2	\bar{X}^2				$BC_2 - 3$	[7] (3)	$(\bar{A}BC)_2 - (3)$	$[\bar{A}C]$
	4	\bar{X}^2	\bar{X}^2	\bar{X}^2	+	\bar{X}^2		$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}_2 - 4$	[4]	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{E}_2 - 4$	$[C\bar{E}]_2 - [4]$
Składowiki zerowe	5	-	\bar{X}^2	\bar{X}^2	-	\bar{X}^2					
	6	\bar{X}^2		\bar{X}^2	+	\bar{X}^2					
	7		+		+						
	8	+	+								
	9	\bar{X}^2	\bar{X}^2	+	+	\bar{X}^2			2 3		
	10	+			+	+					
	11	+		+		+					



b)



c)

Rys. 7. Siatki Karnaugh funkcji złożonych z dwu wiązań zakazanych podwójnych

a) dwa różne wiązania zakazane podwójne, b) inne dwa różne wiązania zakazane podwójne, c) dwa wiązania zakazane podwójne z jednym wspólnym argumentem wiązaniem

Tablica 2
Tablica redukcyjna funkcji wg rysunku 6

Rodzaj składowiki	Argumenty funkcji					Indeks jedynkowy	Quasi-implikant	Implikant prosty
	A	B	C	D	E			
1	-	X	-	+	X	+	$\delta E_2 - 1$	$[B]_2 - [1], [E]_2 - [1^0]$
0	X	+	X	+			2	

Tablica 3

Tablice redukcyjne funkcji z więzaniemi zakazanymi podwójnymi
a) wg rysunku 7a, b) wg rysunku 7b, c) wg rysunku 7c

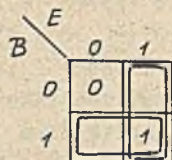
Rodzaj składowiki	Argumenty funkcji					Indeks jedynkowy	Quasi-implikant	Implikant prosty
	A	B	C	D	E			
a) 1	X	+	X	-	X	X	5	$ACEF_2 - 1$ $[AE]_2 - [1^1], [CE]_2 - [1^0]$
0	X	+	X	+	+		3	$[AF]_2 - [1^0], [CF]_2 - [1^0]$
0	+	+	+	X	X		3	
b) 1	X	+	X	X	-	X	3	$\bar{A}CD\bar{F}_2 - 2$ $[\bar{A}D]_2 - [2^1], [DF]_2 - [2^0]$
0	X	+	+	+	X		5	$[\bar{A}C]_2 - [2^0], [CF]_2 - [2^0]$
0	+	X	X				1	
c) 1	-	X	X	-	+	X	4	$BCF_2 - 3$ $[B]_2 - [3^1], [CF]_2 - [3^1]$
0	X	+	+	X			2	
0	X	X		+	+		2	

wiązania zakazane podwójne (tabl. 3a). Po wykonaniu wiązań zakazanych stwierdzamy tym razem powstanie quasi-implikanta ACEF, który jest wynikiem istnienia w wierszu jedynkowym dwu wiązań podwójnych, a mianowicie wiązania AC i wiązania EF. I znowu spojrzenie na rysunek 7a pozwala stwierdzić, że można w nim utworzyć cztery równoważne podgrupy odpowiadające implikantom prostym. Są nimi podgrupy: AE, AF, CE i CF. Podgrupy te zaznaczono na rysunku 7a.

Inne dwa podobne przypadki dwu wiązań podwójnych przedstawiają odpowiednio rysunki 7b,c oraz tablice redukcyjne 3b,c. W przypadku tablicy 3b mamy znowu dwa wiązania zakazane podwójne, dające czteroliterowe quasi-implikanty i po cztery implikanty proste. Natomiast w tablicy 3c rozważono przypadek, gdy w wyniku dwu wiązań podwójnych powstaje trójliterowy quasi-implikant, co spowodowane jest powtarzaniem się jednego argumentu (B) w obu wiązaniach zakazanych podwójnych. Z rysunku 7c wynika, że istnieją tu tylko dwa implikanty proste: B oraz CF.

Dla wytłumaczenia zjawiska zacznijmy od funkcji wg rysunku 6 i tablicy 2. Istnienie w tablicy 2 podwójnego wiązania zakazanego oznacza, że przejście funkcji ze stanu 1 w stan 0 i na odwrót wymaga równoczesnej zmiany stanu dwu argumentów B i E. Z pustych krerek na rys. 6 wynika zaś, że inne zmiany są tu niemożliwe, czyli inne składniki funkcji są składnikami objętymi, a funkcja jest w ogóle niezależna od argumentów A, C, D i F i

można ją przedstawić w postaci funkcji dwu argumentów BiE na rysunku 8. Widać z niego również, że istnieją tu dwa implikanty proste B i E. W rozumowaniu układowym, wobec założonej koniecznej równoczesności pracy obydwu elementów, działanie układu można uzależnić tylko od jednego z nich, bo drugi programowo działa równocześnie.



Rys. 8. Siatka Karnaugh funkcji logicznej wg rysunku 6 po wyeliminowaniu zbędnych argumentów

Jeżeli takie samo rozumowanie odnieść do układu wg tablicy 3a, to stwierdzić można, że do poprawnej pracy układu wystarczy teraz działanie jednego z elementów wiązania zakazanego podwójnego AC i jednego elementu z drugiego wiązania zakazanego podwójnego EF.

Zatem implikantami prostymi funkcji będą tu: AE, AF, CE i CF. Fakt ten łatwo sprawdzić na rysunku 7a. Z podobnego rozumowania w tablicy 3b utworzyć można implikanty proste: AD, DF, AC i CF. Nieco inaczej przedstawia się sprawa w przypadku tablicy 3c. W wyniku dwu wiązań zakazanych podwójnych otrzymaliśmy tu tylko trójargumentowy quasi-implikant, gdyż jeden z argumentów (B) występuje w obu wiązaniach. Z możliwych kombinacji iloczynów pojedynczych argumentów obu wiązań otrzymamy teraz dwa implikanty proste: B oraz CF.

Dla funkcji z wiązaniami zakazanymi potrójnymi w oparciu o podobne rozumowanie wyniknie możliwość utworzenia trzech jednoargumentowych implikantów prostych, w przypadku istnienia jednego wiązania zakazanego potrójnego (np. wg tablicy 4a) i dziewięciu dwuargumentowych implikantów pro-

Tablica 4

Tablice redukcyjne funkcji z wiązaniami zakazanymi potrójnymi

a) z jednym wiązaniem potrójnym, b) z dwoma różnymi wiązaniami potrójnymi, c) z dwoma wiązaniami potrójnymi o dwu wspólnych argumentach wiązanych

Rozkład składnika	Argumenty funkcji								Indeks jednokowy	Quasi-implikant	Implikant prosty
	A	B	C	D	E	F	G	H			
a)	1	+	+	+	+	+	+	+	5	ADE ₃ -1	[A] ₃ -[1 ¹], [D] ₃ -[1 ¹] [E] ₃ -[1 ¹¹]
	0	X	-	+	X	X	-	+	2		
b)	1	+	X	X	X	X	+	X	5	BCDEFH ₃ -2	[BC] ₃ -[2 ¹], [BD] ₃ -[2 ¹¹] [BE] ₃ -[2 ¹¹¹], [CF] ₃ -[2 ¹¹¹] [DF] ₃ -[2 ¹¹], [EF] ₃ -[2 ¹¹] [CH] ₃ -[2 ¹¹¹], [DH] ₃ -[2 ¹¹¹] [EH] ₃ -[2 ¹¹¹]
	0	+	X	+	+	X	+	X	8		
	0	+	X	X	X	X	+	+	2		
c)	1	X	X	X	X	+	+	+	5	ACDE ₃ -3	[E] ₃ -[3 ¹], [D] ₃ -[3 ¹¹] [AC] ₃ -[3 ¹¹¹]
	0	X	+	X	X	+	+	+	5		
	0	+	X	X	X	+	+	+	2		

stych w przypadku dwu różnych wiązań potrójnych (tabl. 4b). Jeśli wiązania zakazane potrójne mają argumenty wspólne, to ilość implikantów prostych będzie odpowiednio mniejsza. Dla dwu wspólnych argumentów dwu wiązań zakazanych potrójnych możliwe będzie utworzenie tylko trzech implikantów prostych (np. wg tablicy 4c będą to implikanty proste: AC, D i E).

W złożonych przypadkach funkcji zawierających więcej zerowych i jedynkowych składników postaci kanonicznej sprawdzać trzeba czy implikant wyznaczony w poprzednio omówiony sposób jest rzeczywiście implikantem prostym, to znaczy czy nie pochłania on jakiegoś składnika zerowego. Jeśli by tak było, to trzeba by go zredukować wg zerowej wagi argumentów w oparciu o pomocniczą tablicę redukcyjną. Może się zdarzyć, że żaden z implikantów utworzonych w postaci iloczynu logicznego złożonego z pojedynczych argumentów poszczególnych wiązań zakazanych wieloargumentowych nie jest implikantem prostym. Można wtedy utworzyć iloczyny logiczne złożone z pojedynczych argumentów wiązań zakazanych z dodatkiem drugiego argumentu któregoś z wiązań itd. Załóżmy, np., że istnieją dwa wiązania zakazane dwuargumentowe AF i $\bar{C}\bar{D}$ i okazało się, że implikantem prostym nie jest żaden z iloczynów dwuargumentowych $A\bar{C}$, $A\bar{D}$, $\bar{C}F$, $\bar{D}F$. Wtedy sprawdzamy, czy nie są implikantami prostymi wyrażenia: $A\bar{C}F$, $A\bar{D}F$, $A\bar{C}\bar{D}$ lub $\bar{C}\bar{D}F$.

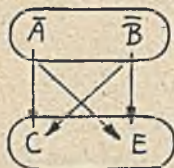
Ogólnie mówiąc, implikant prosty utworzyć można tylko z argumentów tworzących quasi-implikant.

Operację polegającą na poszukiwaniu implikanta prostego wyższego stopnia niż quasi-implikant uzyskany z wiązań zakazanych wieloargumentowych i nie pochłaniający żadnego składnika zerowego nazwiemy majoryzacją quasi-implikanta.

Wyprowadzone związki między ilością wiązań zakazanych wieloargumentowych w składniku jedynkowym i ilością możliwych implikantów prostych dotyczyły wiązań podwójnych i potrójnych. W podobny sposób można by wyznaczyć ilości możliwych implikantów prostych również i dla wiązań zakazanych o większej ilości argumentów.

Informacja o rodzaju i ilości implikantów prostych w przypadku wiązań zakazanych wieloargumentowych ma znaczenie praktyczne tylko wówczas, gdy w złożonych tablicach redukcyjnych quasi-implikanty powstałe w wyniku wprowadzenia tych wiązań nie pochłaniają żadnego zerowego składnika funkcji. Sytuacja taka występuje np. w tablicy 1. Wróćmy zatem ponownie do tej tablicy. W wierszu 1 występuje quasi-implikant $\bar{A}\bar{B}CE_2-1$, który nie pochłania żadnego składnika zerowego. Powstał on z dwu wiązań podwójnych. W pierwszym z nich, obejmującym wiersze 1 i 5, związane są w jedynkowym wierszu 1 argumenty CE, w drugim zaś, obejmującym wiersze 1 i 9, związane są w jedynkowym wierszu 1 argumenty $\bar{A}\bar{B}$. Mamy zatem do czynienia z dwoma wiązaniami zakazanymi podwójnymi, z których zgodnie z przedstawionym powyżej sposobem wyznaczyć można następujące cztery implikanty: $\bar{A}C$, $\bar{B}C$, $\bar{A}E$ i $\bar{B}E$. Wygodny sposób wyznaczenia tych implikantów przedstawia rysunek 9. Sprawdźmy teraz, czy któryś z tak wyznaczonych implikantów nie pochłania ja-

kiegoś zerowego składnika funkcji. Okazuje się, że implikant \overline{BC} pochłania zerowy składnik w wierszu 11, a \overline{BE} aż dwa składniki zerowe w wierszach 10 i 11. Okazało się więc ostatecznie, że implikantami prostymi są tylko iloczyny logiczne \overline{AC} oraz \overline{AE} .



Rys. 9. Sposób wyznaczenia implikantów prostych z argumentów dwu różnych wiązań zakazanych podwójnych

Uzyskane one zostały drogą majoryzacji, czyli podwyższenia stopnia quasi-implikanta, co zaznaczono przez objęcie argumentów implikanta prostego nawiasami graniastymi. Podobnie i numer tak uzyskanego implikanta prostego podawany będzie w nawiasach graniastych. Jeżeli z określonego quasi-implikanta uzyskanego z kilku wiązań zakazanych wieloargumentowych wyprowadzić można więcej niż jeden implikant prosty, to przypiszemy im do numeru kolejne znaczniki, np. 1', 1'' itd. Potwierdzenie takich możliwości znajdziemy na rysunku 4. Z siatki na tym rysunku

wynika istotnie, że takie implikanty proste mogą istnieć. Jeśli zdecydujemy się np. na implikant \overline{AE} (zaznaczony podgrupą na rysunku 4), to pochłonie on w tabelicy 1 jedynkowe składniki w wierszach 1 i 2.

Podobnie rozumując, w wierszu 4 utworzyć by można implikanty: \overline{AB} , \overline{AE} , \overline{BC} i \overline{CE} . Z tego implikantem prostym jest tylko \overline{CE} . Ten ostatni zaznaczono również na rysunku 4. Pochłania on jedynkowe składniki w wierszach 3 i 4 tabelicy 1. Ostatecznie więc minimalne pokrycie funkcji stanowi wyrażenie $F = \overline{AE} + \overline{CE}$ jak w wyrażeniu (3).

Do postaci implikantów doprowadzić by można drogą redukcji również quasi-implikanty $\overline{BE}_2 - 2$ i $\overline{BC}_2 - 3$ w tabelicy 1, lecz nie są one potrzebne, gdyż nie prowadzą do postaci minimalnej. Otrzymalibyśmy w ten sposób $(\overline{ABE})_2 - (2)$ oraz $(\overline{ABC})_2 - (3)$.

Majoryzacji poddać należy również implikanty uzyskane drogą redukcji z quasi-implikantów wieloargumentowych. Operacje majoryzacyjne wykonuje się wtedy eliminując z takiego implikanta najpierw $k - 1$, później $k - 2$ itd. argumentów wiązania wieloargumentowego, gdzie k - ilość argumentów wiązania wieloargumentowego. Przykładowo w tabelicy 1 drogą redukcji utworzony został implikant $(\overline{ABE})_2 - (2)$. Majoryzując go tworzymy kombinacje \overline{AB} i \overline{AE} i sprawdzamy czy nie są one implikantami prostymi. Okazało się, że \overline{AB} nie może być implikantem prostym, gdyż pochłania zerowy składnik w wierszu 7, natomiast \overline{AE} jest implikantem prostym. Ponieważ utworzony on został drogą majoryzacji, to zaznaczymy to nawiasem graniastym. Nie zostanie on wykorzystany, ponieważ został już wcześniej wyznaczony drogą majoryzacji quasi-implikanta $\overline{ABCE}_2 - 1$ w wierszu 1 tabelicy 1. W podobny sposób z quasi-implikanta $\overline{BC}_2 - 3$ wyznaczyć można drogą redukcji implikant $(\overline{ABC})_2 - (3)$ i zmajoryzować go do postaci $[\overline{AC}]$, która już jest reprezentowana w wierszu 1.

Tabela 1 nie stanowi jednak dobrego przykładu wyznaczenia implikantów prostych z wiązań zakazanych wieloargumentowych, gdyż jak wcześniej

Tablica 5

Tablica redukcyjna funkcji wg przykładu 1

Lp	Argumenty funkcji								Indeks funkcji	Quasi-implicant	Numer implicantu	Implikant prosty	
	A	B	C	D	E	F	G	H					
składniki podstawowe	1	-	X	+	+	+	-	-	+	4	B_1-1	(1) 2 3	$(\bar{B}CE)_1 - (1)$
	2		+	+	+		+	+	+	6		(2) 3	
	3	X	+		+				+	3	A_1-2	(2)	$(\bar{A}\bar{B}\bar{E})_1 - (2)$
	4		+							1		(2) [4]	
	5	+	+	+	+	+				5		(3)	
	6	+	X ²		X ²	X ²	+	X ²	+	5	$B\bar{D}\bar{E}G_2-4$	[4]	$[B\bar{D}\bar{E}]_2 - [4]$
	7	+		X			+		+	4	C_1-3	1 (3)	$(AC)_1 - (3)$
	8	+		+	+	+		+		5		(1) (3)	
składniki zerowe	9				+		+	+	+	4		1 2	
	10			+	+			+	+	4		1 2 3	
	11			+				+		2		1 2 3	
	12		X ¹	+	+	+			+	5		2 3	
	13		+			+	+	+		4		2	
	14	+	+			+				3			
	15	X	+		+				+	4			
	16	+	+		X ²	X ²	+	+	+	7			
	17	+	X ²	X ¹			+	X ²	+	3		1	
	18	+				+	+		+	4		1	
	19	+				+		+		3		1	
	20	+	+		+			+	+	5			
	21								+	1		1 2	

stwierdzono, funkcja przedstawiona na rysunku 4 jest w istocie funkcją tylko trzech argumentów A, C i E.

Poniżej wykonano kilka przykładów minimalizacji funkcji proponowaną metodą. Szczegółowiej omówiono tylko te operacje minimalizacyjne na tablicach redukcyjnych, które wnoszą informacje omówione zbyt pobieżnie lub w ogóle nie omówione w niniejszej pracy.

Przykład 1

Metodą redukcji quasi-implikantów z wiązań zakazanych wieloargumentowych zminimalizować funkcję wg tablicy 5. Rozpoczynamy od poszukiwań wiązań zakazanych najniższego rzędu. Z kolumny "Indeks jedynekowy", wynika że mogą to być wiązania zakazane pojedyncze. Znajdujemy takie istotnie w

Tablica 6

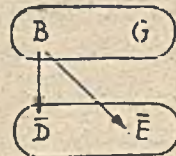
Pomocnicze tablice redukcyjne (do tablicy 5)

- a) dla quasi-implikanta $\bar{B}_1 - 1$
- b) dla quasi-implikanta $\bar{A}_1 - 2$
- c) dla quasi-implikanta $C_1 - 3$

wierszach 1-12, 3-15, 7-17. Wymagają one redukcji, a po jej wykonaniu wg tablic 6a,b,c wyznaczamy implikanty proste $(\bar{BCE})_1 - (1)$, $(\bar{A}\bar{B}\bar{E})_1 - (2)$ oraz $(AC)_1 - (5)$. Pochłaniają one wszystkie jedynekowe składniki funkcji, z wyjątkiem zawartego w wierszu 6. W wierszu tym występują dwa wiązania zakazane podwójne wiersze (6-17 oraz 6-16). Z wiązań tych dojdziemy sposobem wcześniej omówionym wg rysunku 10 do implikanta prostego $[B\bar{D}\bar{E}] - [4]$. Implikant ten pochłania również składnik jedynekowy w wierszu 4. Zaznaczamy to przez wpisanie numeru [4] w wierszu 4. W ten sposób minimalizacja została zakończona, a pokrycie funkcji stanowi wyrażenie:

$$\Phi = \bar{BCE} + \bar{A}\bar{B}\bar{E} + B\bar{D}\bar{E} + AC \quad (4)$$

Pokazano tu przykład wyznaczania implikanta prostego z istniejących



Rys. 10. Implikant prosty z dwu wiązań zakazanych podwójnych

Lp.	A	B	C	D	E	F	G	H	Implikant prosty
1	-	+	+	+	-	-	+		\bar{BCE}
9				+		+	+		
10				+	+		+		
11				+			+		
17	+				+		+		
18	+				+	+	+		
19	+				+		+		
21							+		
zerowa waga argumentu	4	2	2	2	4	3	5		
3	+	+					+		$\bar{A}\bar{B}\bar{E}$
9				+		+	+		
10				+	+		+		
11				+			+		
12				+	+	+	+		
13				+		+	+		
21							+		
zerowa waga argumentu		2	3	3	4	4	2	4	
7	+	+				+	+		AC
10				+	+		+		
11				+			+		
12				+	+	+	+		
zerowa waga argumentu	0	2	1	2	0	1	2		

a)

b)

c)

Tablica 7

Tablica redukcyjna funkcji wg tablicy 5 po wyeliminowaniu zbędnych argumentów

Lp.	Argumenty funkcji					Indeks funkcji	Quasi- implikant	Numer implikanta	Implikant prosty	
	A	B	C	D	E					
składowiki / jedynkowe	1	-	X	+	+	X	3	$\bar{B}\bar{E}_1 - 1$	(1)	$(\bar{B}\bar{C}\bar{E})_1 - (1)$
	2		X	+	+	X	3	$B\bar{E}_1 - 2$	(2) 3	$(\bar{A}\bar{B}\bar{E})_1 - (2)$
	3	X	X		+		2	$\bar{A}\bar{B}_1 - 3$	(2) 3	
	4		X			X	1	$\bar{B}\bar{E}$	(2) 3 5	
	5	X	+	X	+	+	5	$AC_1 - 4$	4	$AC_1 - 4$
	6	+	X		X	X	2	$B\bar{D}\bar{E}_1 - 5$	2 5	$B\bar{D}\bar{E}_1 - 5$
	7	X		X			2	$\bar{A}\bar{C}$	4	
	8	+		+	+	+	4	-	(1) 4	
składowiki zerowe	9		X		+		1			
	10		X	+	+	X	2			
	11	X		+			1			
	12	X	X	+	+	X	4		3	
	13		+			X	2		3	
	14	+	+			X	3			
	15	X	+		X		3		2	
	16	+	+	X	+	+	4			
	17	+	X	X			1			
	18	+				+	2		1	
	19									
	20									
	21		X				0			

wiązań zakazanych podwójnych. Wynik minimalizacji wskazuje, że funkcja wg tablicy 5 jest znowu funkcją tylko pięciu argumentów A,B,C,D,E i można by ją zastąpić równoważną tablicą redukcyjną 7. Wiersze 19 i 20 uległy skreśleniu jako powtarzające się. Zminimalizować ją można metodą redukcji quasi-implikantów z wiązań zakazanych pojedynczych [2], [3].

Tablica 8
Pomocnicza tablica redukcyjna (do tablicy 7) dla quasi-implikanta \overline{BE}_1-1

Lp.	A	B	C	D	E	Implikant prosty
1	-	+	+	+	+	\overline{BCE}
18	+				+	
Zero wagi waga argu- mentu	0	0	0			

Pomocnicza tablica redukcyjna 8 konieczna jest dla zredukowania quasi-implikanta \overline{BE}_1 w wierszu 1. Wynika z niej, że możliwe będą trzy równoważne implikanty proste \overline{ABE} , \overline{BCE} , \overline{BDE} . Możliwość uzyskania takich implikantów prostych wynika również z tablicy 6a. Przykład ten posłużył znowu do wyeliminowania zbędnych argumentów funkcji.

Przykład 2

Metodą redukcji quasi-implikantów z wiązań zakazanych wieloargumentowych zminimalizować funkcję wg tablicy 9. Jest to funkcja piętnastoargumentowa ($n = 15$). Według dotychczasowego stanu wiedzy w tym zakresie funkcję tę zminimalizować by można metodą Kazakowa [7]. Z rozwiązania końcowego okaże się, że występują tu implikanty proste: dwu- trój- cztero- pięcio- i sześćoargumentowe. W metodzie podanej przez Kazakowa poszukiwanie implikanta prostego, np. sześćoargumentowego ($m = 6$), polegałoby na wyszukaniu go spośród zbioru wynoszącego $K_{15}^6 = 45045$ wyrazów sześćoargumentowych wg znanej w kombinatoryce zależności:

$$K_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$K_{15}^6 = \frac{15!}{6!(15-6)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 45045 \quad (5)$$

Tablica 9 zawiera czternaście jedynkowych składników postaci kanonicznej sumiloczynowej oraz dwadzieścia pięć składników zerowych. Po wyznaczeniu indeksów jedynkowych poszukujemy wiązań zakazanych, poczynając od pojedynczych. Takie pojedyncze wiązania istnieją między wierszami: 5-32, 7-39, 8-29 oraz 14-20. Wszystkie otrzymane z nich quasi-implikanty (B_1-1 , \overline{C}_1-2 , B_1-3 , \overline{M}_1-4) wymagają redukcji. Przeprowadzono ją w pomocniczych tablicach redukcyjnych 10a,b,c. Pomocnicza tablica redukcyjna 10a wykorzystana została do wyznaczenia dwu implikantów prostych. Takie postępowanie wygodne jest wówczas, gdy w dwu różnych wierszach jedynkowej tablicy redukcyjnej występuje taki sam quasi-implikant.

W tablicy 9 jest nim quasi-implikant B w wierszach 5 i 8. Zerowe wagi argumentów wyznaczyć trzeba osobno dla każdego z wierszy jedynkowych, a z nich dwa różne implikanty proste.

Implikant prosty $\overline{ABC}F$ odnosi się do składnika jedynkowego w wierszu 5, zaś implikant prosty $B\overline{F}G\overline{K}$ do składnika jedynkowego w wierszu 8. W dotychczasowych pracach na temat metody redukcji quasi-implikantów [2], [3] proponowano wstępne skreślanie quasi-implikantów powtarzających się lub stanowiących fragmenty innych quasi-implikantów. Można by to zrobić również w przypadku tablicy 9. Okazało by się jednak, że inne implikanty proste z wiązań zakazanych pojedynczych i tak nie pochłaniają składnika w wierszu 8 i trzeba do niego wrócić. W ogóle w przypadku bardziej złożonych funkcji wieloargumentowych wstępne skreślenie quasi-implikantów powtarzających się lub stanowiących fragmenty innych na ogół nie daje żadnych korzyści.

Po wyznaczeniu implikantów prostych z wszystkich quasi-implikantów uzyskanych z wiązań zakazanych pojedynczych poszukujemy wiązań wyższego rzędu (w przypadku tablicy 9 wiązań podwójnych). Okazało się, że wiązania zakazane podwójne w tablicy 9 nie występują, wobec czego poszukujemy z kolei wiązań potrójnych. Istnieje jedno takie wiązanie w wierszach 1-21. Z niego przez redukcję (tabl. 10d) otrzymujemy implikant $(\overline{B}C\overline{G}M\overline{O})_3 - (5)$. Po zmajoryzowaniu daje on implikant prosty $\overline{B}C\overline{G}O - [5]$.

Następują quasi-implikanty z wiązań zakazanych poczwórnych w wierszach 2, 3, 10 i 11. Trzy z nich zredukowano wg tablic 10e, f, g, czwarty z quasi-implikantów poczwórnych $AENP_4 - 8$ nie pochłania żadnego składnika zerowego.

Majoryzacji dokonano tu metodą kolejnych prób. Tak np. implikant $(B\overline{O}\overline{G}K\overline{P})_4 - (6)$ dał się zmajoryzować do postaci $[B\overline{G}P]_4 - [6]$, gdyż taka postać nie pochłania żadnego składnika zerowego.

Do znajoryzowanego implikanta prostego wejść musi argument \overline{G} i z doboru niektóre argumenty tworzące wiązania zakazane wieloargumentowe. Majoryzacji dokonać można wg określonego algorytmu, który nie został tu omówiony.

Ostatecznie zminimalizowane pokrycie funkcji stanowi wyrażenie:

$$\Phi = \overline{B}C\overline{G}O + B\overline{G}P + \overline{C}EM + \overline{A}BCF + \overline{G}NO + B\overline{F}G\overline{K} + AE + \overline{C}G\overline{N}O\overline{P} + \overline{E}G\overline{J} + AF\overline{M} \quad (6)$$

Uważne przyjrzenie się wynikowi pozwala stwierdzić, że funkcja jest niezależna od argumentów D, H, L czyli jest to w istocie funkcja tylko dwunastoargumentowa. Wynika stąd, że również w zapisie kanonicznej postaci funkcji można by pominąć argumenty D, H, L, a zapisana w ten sposób funkcja byłaby równoważna podanej w tablicy 9.

Otwarte pozostaje zagadnienie, czy wyrażenie (6) stanowi minimalną postać funkcji. Sama metoda budowania wyrażenia (6) z argumentów funkcji tworzących wiązania zakazane stwarza domniemanie, że może to być istotnie postać minimalna. Skłania do takiego domniemania również fakt, że minimalizację przeprowadza się tu poczynając od wiązań zakazanych pojedynczych, zwiększając kolejno rząd wiązań dla składników nie pochłoniętych przez wiązania niższego rzędu.

Tablica redukcyjna funkcji wg przykładu 2

Tablica 9

Lp.	Argumenty funkcji															Indeks jedynki- bitu	Quasi- implikant	Numer implikanta	Implikant	Implikant prosty
	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O	P					
składowki jedynkowe	1	-	-	3 +	-	-	+	-	-	-	-	3 +	3 +	-	3	$\bar{C}\bar{M}\bar{O}_3 - 5$	4(5)	$(\bar{B}\bar{C}\bar{G}\bar{M}\bar{O})_3 - (5)$	$[\bar{B}\bar{C}\bar{G}\bar{O}]_3 - [5]$	
	2		4 +	4 +								4 +		4 +	6	$B\bar{D}\bar{K}\bar{P}_4 - 6$	1 2 3 4 (6)	$(B\bar{D}\bar{G}\bar{K}\bar{P})_4 - (6)$	$[\bar{B}\bar{G}\bar{P}]_4 - [6]$	
	3				4 +							4 +	4 +	4 +	5	$EMNO_4 - 7$	2 (7)	$(\bar{C}\bar{E}\bar{M}\bar{N}\bar{O})_4 - (7)$	$[\bar{C}\bar{E}\bar{M}]_4 - [7]$	
	4	+			+	+			+	+	+	+	+	+	11		2 (7)[8]			
	5		1 +												2	$B_1 - 1$	(1) 2 3 4	10	$(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{F})_1 - (1)$	$(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{F})_1 - (1)$
	6	+	+	+	+	+	+								8		1 3(4) [8]			
	7							1 +							1	$\bar{G}_1 - 2$	(2) 4	$(\bar{G}\bar{N}\bar{O})_1 - (2)$	$(\bar{G}\bar{N}\bar{O})_1 - (2)$	
	8		1 +						+						4	$B_1 - 3$	1 2(3) 4 5	9 10	$(B\bar{F}\bar{G}\bar{K})_1 - (3)$	$(B\bar{F}\bar{G}\bar{K})_1 - (3)$
	9	+		+		+	+	+	+			+	+		10					
	10	4 +			4 +								4 +	4 +	6	$AENP_4 - 8$	4 [8]	$AENP_4 - 8$	$[AE]_4 - [8]$	
	11			4 +		+	+	+	+	+	+	+	4 +	4 +	9	$\bar{C}\bar{N}\bar{O}\bar{P}_4 - 9$	(9)	$(\bar{C}\bar{G}\bar{N}\bar{O}\bar{P})_4 - (9)$	$(\bar{C}\bar{G}\bar{N}\bar{O}\bar{P})_4 - (9)$	
	12	+				+									5		4(5)			
	13				5 +		5 +		+	5 +	5 +			5 +	2	$\bar{E}\bar{G}\bar{K}\bar{L}\bar{O}_5 - 10$	2 4 5 (10)	$(\bar{E}\bar{G}\bar{J}\bar{K}\bar{L}\bar{O})_5 - (10)$	$[\bar{E}\bar{G}\bar{J}]_5 - [10]$	
	14	+	+	+			+	+	+	+	+		1 +		13	$\bar{M}_1 - 4$	1 3(4) 6		$(A\bar{F}\bar{M})_1 - (4)$	
składowki zerowe	15				5 +							5 +	5 +	1		2 4 5 9				
	16				5 +		5 +		+	5 +	5 +		5 +	7		4				
	17	+	+					+	+	+	+	+	+	12		1 3				
	18		+		+									3		1 2 3 4 5	10			
	19				+									1		2 4 5	9			
	20	+	+	+			+	+	+	+	+	1 +	+	14		1 3 6				
	21			3 +								3 +	3 +	6						
	22	+	+				+	+	+		+	+	+	9		1 3				
	23		+		+			+				+	+	8		1 2 3				
	24		4 +		4 +						4 +			2		2 4	10			
	25				+			+					+	5		2 4				
	26		+		+		+	+	+		+		+	9		1 3 6				
	27	+	+	+	+									4		1 2 3 4	10			
	28	+	+	+			+	+	+		+	+	+	11		1 3				
	29		1 +		+			+						3		2 4 5	9 10			
	30	+									+	+	+	6		2				
	31			4 +		+	+	+	+	+	+	+	4 +	13		7				
	32		1 +											1		2 4	10			
	33		+		+			+				+		5		1 3 4 5				
	34				+	+	+						+	6		4				
	35	+	+											2		1 2 3 4 5	9 10			
	36			+		+	+	+	+	+	+	+		10		4				
	37		+	+			+	+	+					5		1 3 4				
	38				+	+			+					3		2 4 5	9			
	39	5 +			5 +		5 +						5 +	2		4				

Tablica 10

Pomocnicze tablice redukcyjne (do tablicy 9)

a) dla quasi-implikantów B_1-1 oraz B_1-3 , b) dla quasi-implikanta \bar{C}_1-2 , c) dla quasi-implikanta \bar{M}_1-4 , d) dla quasi-implikanta $\bar{C}\bar{A}\bar{O}_3-5$, e) dla quasi-implikanta $B\bar{D}\bar{K}P_4-6$, f) dla quasi-implikanta $E\bar{M}\bar{N}\bar{O}_4-7$, g) dla quasi-implikanta $\bar{C}\bar{N}\bar{O}\bar{P}_4-9$, h) dla quasi-implikanta $E\bar{G}\bar{R}\bar{L}\bar{O}_5-10$

LP	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N	O	P	Implikant
5	+	+														$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{F}$ $\bar{B}\bar{F}\bar{G}\bar{K}$
8	+	+	+	+	+											
17	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	składnika 5 składnika 8
18	+	+												+		
20	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
22	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
23	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
26	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
27	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
28	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
33	+	+			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+		
35	+	+														
37	+	+			+	+	+	+								
zerowa waga argumentu	5	4	5	11	4	4	4	9	6	6	5	5	6	6		
	5	8	6	11	7	4	7	9	6	6	5	5	6	6		
7														+		$\bar{G}\bar{N}\bar{O}$
15														+		
18	+	+												+		
19			+											+		
23	+	+	+						+	+	+	+	+	+		
24			+	+										+	+	
25				+					+					+	+	
27	+	+	+	+										+	+	
29				+	+									+	+	
30	+													+	+	
32			+											+	+	
35	+	+												+	+	
38			+	+										+	+	
zerowa waga argumentu	9	8	9	7	9	9			9	11	11	10	10	8	3	
13	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\bar{A}\bar{F}\bar{M}$
15														+		
16														+	+	
18	+	+												+		
19				+										+		
24			+	+										+		
25				+										+	+	
27	+	+	+	+										+	+	
29				+	+	+								+	+	
32			+											+	+	
33	+	+			+									+	+	
34					+	+	+	+						+	+	
35	+	+												+	+	
36			+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
37	+	+			+	+	+	+						+	+	
38			+	+										+	+	
39					+									+	+	
zerowa waga argumentu	2	5	5	5	10	5	6	4	3	2	4			4	4	

1			+	+												$\bar{B}\bar{C}\bar{G}\bar{M}\bar{O}$
15														+		
18	+		+											+		
19				+												
29				+	+	+										
33	+		+		+									+		
35	+	+														
38			+	+										+		
zerowa waga argumentu	63		4	5	6	1	6	6	7	5				1	6	
2		+	+	+	+									+		$\bar{B}\bar{D}\bar{G}\bar{K}\bar{P}$
20	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
26	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
zerowa waga argumentu	1	1	2	2	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
3				+										+	+	$\bar{C}\bar{E}\bar{M}\bar{N}\bar{O}$
31	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
zerowa waga argumentu	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	
11				+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\bar{C}\bar{G}\bar{N}\bar{O}\bar{P}$
15														+		
19														+		
29				+	+	+								+		
35	+	+												+		
38				+	+									+		
zerowa waga argumentu	44		2	2	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
13														+	+	$\bar{E}\bar{G}\bar{J}\bar{K}\bar{L}\bar{O}$
18	+	+												+		
24			+											+		
27	+	+	+	+										+		
29			+	+	+									+		
32			+											+		
35	+	+												+		
zerowa waga argumentu	43	33	4	5	0					6	5	0				

Z drugiej jednak strony wyraźnie stwierdzić trzeba brak dotychczas kryterium pozwalającego na sprawdzenie minimalności otrzymanego wyniku. Kryterium takie jest trudne do ustalenia, ponieważ ogólnie biorąc istnieje może więcej niż jedno równoważne rozwiązanie minimalne i wiele jeszcze rozwiązań prawie minimalnych (bliskich minimalnemu).

Przykładowo w tablicy 10a istnieją aż cztery argumenty o jednakowej zerowej wadze 4 (dla składnika jedynkowego w wierszu 5). Wybrany został jako podstawa wyznaczania implikanta prostego argument C. Można było jednak wybrać równie dobrze argument H, którego zerowa waga wynosi również 4, wtedy implikant prosty w tablicy 10a zamiast postaci $\overline{A}BC\overline{F}$ mógłby mieć np. postać $BC\overline{D}H$. W takiej postaci argument H nie mógłby być wyeliminowany, ale być może pominąć by można inny argument funkcji. Podobnie np. tablica 10d ma dwa różne argumenty o najniższej zerowej wadze 1. Wybrano tu G, a można było równie dobrze wybrać N. Już jednak pomocnicze tablice redukcyjne 10e i 10f stwarzają możliwości uzyskania kilku rozwiązań implikantów prostych i to z argumentów o zerowej wadze 0.

Uznać można zatem, że wyrażenie (6) stanowi minimalną lub prawie minimalną postać funkcji wg tablicy 9. Warto zwrócić uwagę na stosunkowo prosty algorytm operacji minimalizacyjnych i możliwość ręcznej (nie maszynowej) minimalizacji nawet bardzo złożonych funkcji wieloargumentowych. Zaproponowana metoda stwarza punkt wyjściowy do opracowania maszynowego programu minimalizacji. Program taki byłby stosunkowo prosty do momentu wyznaczenia quasi-implikantów (poczynając od quasi-implikantów z wiązań najwyższego rzędu oraz wyznaczania kolumny numerów implikantów).

Operacje redukcji i majoryzacji quasi-implikantów najwygodniej byłoby przewidzieć jako osobne podprogramy^{x)}.

Przykład 3

Metodą redukcji quasi-implikantów z wiązań zakazanych wieloargumentowych zminimalizować funkcję wg tablicy 11.

Wiązania pojedyncze doprowadziły do trzech implikantów prostych. Istnieje tu wprawdzie czwarte wiązanie pojedyncze w wierszu 3, ale redukowanie quasi-implikanta \overline{A}_1 mija się z celem, gdyż wszystkie składniki jedynkowe zawierające \overline{A} zostały już pochłonięte przez implikanty proste $(\overline{A}\overline{B}E)_1$ - (1) oraz $(\overline{A}\overline{B}E)_1$ - (2). Utworzone one zostały na podstawie tablic redukcyjnych 12a i b. Quasi-implikant $ACGH_1$ -3 nie wymaga redukcji, gdyż jest wprost implikantem prostym.

^{x)} W ramach prac dyplomowych opracowano w Instytucie Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie (dyplomant Waldemar Krakowian - prowadzący dr inż. R. Dąbek) program maszynowy w języku BASIC minimalizacji funkcji logicznych wieloargumentowych w oparciu o metodę redukcji quasi-implikantów z wiązań zakazanych pojedynczych podaną w pracy [2]. Program sprawdzono w Środowiskowym Centrum Obliczeniowym "Cyfronet" w Krakowie na maszynie CYBER-70.

Tablica 11

Tablica redukcyjna funkcji wg przykładu 3

		Argumenty funkcji								Indeks funkcji	Quasi- implikant	Numer implikanta		Implikant prosty	
		A	B	C	D	E	F	G	H						
Składniki jedynkowe	1	-	X ¹	+	+	+	-	-	+	4	$\bar{B}_1 - 1$	(1)	5	$(\bar{A}\bar{B}\bar{E})_1 - (1)$	
	2		X ¹	+	+	X ¹	+	+	+	6	$B\bar{E}_1 - 2$	(2)	4 5	$(\bar{A}\bar{B}\bar{E})_1 - (2)$	
	3	X ¹	+		+				+	3	\bar{A}_1	(2)			
	4		+							1		(2)			
	5			+	+	+	+			4		(1)	4 (5)		
	6	+		X ²				X ²		+	4	$CF_2 - 4$	1	(4)	$(\bar{C}\bar{D}\bar{F})_2 - (4)$
	7	+		X ²	X ²	+		+		5	$CD_2 - 5$	1	(5)	$(\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{H})_2 - (5)$	
	8	X ¹	+	X ¹	+	+	+	X ¹	X ¹	8	$ACGH_1 - 3$	3 4 5		$ACGH_1 - 3$	
Składniki zerowe	9		X	+	+		+	+	+	5		1	4 5		
	10			+	+			+	+	4		1	5		
	11			+				+		2		1			
	12		X ¹	+	+	+			+	5			5		
	13		+			+	+	+		4					
	14	X ¹	+		+				+	4		2			
	15	+	+	X ¹	+	+	+	+	+	7					
	16	+	+	+	+	+	+	+	X ¹	7			4 5		
	17	+				+	+		+	4		1			
	18	+		X ²	X ²	+		+		3		1			
	19	+	+		+			+	+	5		2			
	20	+		X ²				X ²	+	2		1			
	21								+	1		1			
	22	+	+	+	+	+	+	X ¹	+	7			4 5		
	23	X ¹	+	+	+	X ¹	+	+	+	7			4 5		

Podwójne quasi-implikanty w wierszach 6 i 7 zostały zredukowane na podstawie pomocniczych tablic redukcyjnych 12c i d. Ostatecznie zminimalizowaną postać funkcji stanowi wyrażenie (7):

$$\Phi = \bar{A}BE + \bar{A}\bar{B}E + C\bar{D}F + \bar{B}CD\bar{H} + ACGH \quad (7)$$

Przytoczony tu zostanie jeszcze jeden dowód na trudności ustalania kryterium minimalności wyrażenia końcowego.

Tablica 12

Pomocnicze tablice redukcyjne (do tablicy 11)

- a) dla quasi-implikanta \bar{B}_1-1 , b) dla quasi-implikanta $\bar{B}E_1-2$, c) dla quasi-implikanta CF_2-4 , d) dla quasi-implikanta CD_2-5

LP	A	B	C	D	E	F	G	H	Implikant.
1			+	+	+			+	$\bar{A}\bar{B}\bar{E}$
9			+	+		+	+	+	
10			+	+				+	
11			+					+	
17	+				+	+		+	
18	+				+			+	
20	+							+	
21								+	
zerowa waga argumentu	4		3	2	2	5	3	5	
2			+	+	+			+	$\bar{A}\bar{B}\bar{E}$
14	+	+		+				+	
19	+	+		+				+	
zerowa waga argumentu	0		0	2		0	1	2	
6	+	+				+		+	$C\bar{D}\bar{F}$
9			+	+		+	+	+	
16	+	+	+	+	+	+	+	+	
22	+	+	+	+	+	+	+	+	
23	+	+	+	+	+	+	+	+	
zerowa waga argumentu	2	1		0	1		3	3	
7	+		+	+	+			+	$\bar{B}CD\bar{H}$
9			+	+		+	+	+	
10			+	+				+	
12			+	+	+	+		+	
16	+	+	+	+	+	+	+	+	
22	+	+	+	+	+	+	+	+	
23	+	+	+	+	+	+	+	+	
zerowa waga argumentu	2	2		4	2		4	1	

W tabelicy 12a występują dwa argumenty o zerowej wadze 2. Jeśli więc po kolei zbudowalibyśmy implikant prosty z argumentem D, to mógłby to być implikant trójargumentowy BDE. Jeśli natomiast wykorzystamy argument E również o zerowej wadze 3, to utworzyć będzie można trójargumentowy implikant prosty $\bar{A}BE$ jak w tabelicy 12a. Jeszcze lepszy przykład stanowi tabela 12b. Istnieją tu trzy argumenty o zerowej wadze równej zero. Jeśli utworzony zostanie implikant prosty z wykorzystaniem argumentu \bar{A} , czyli $\bar{A}BE$, to pochłonie on trzy wiersze jedynkowe w tabelicy 11 (wiersze 2, 3 i 4). Natomiast wykorzystanie np. argumentu C również z zerową wagą 0 dałoby implikant prosty BCE, który pochłonięłoby tylko jeden wiersz jedynkowy 2 w tabelicy 11.

LITERATURA

- [1] Bromirski J.: Teoria automatów. WNT, Warszawa 1969.
- [2] Dudek W.: Metoda redukcji quasi-implikantów w teorii układów przełączających. Część I. Układy kombinacyjne. Zeszyty Naukowe Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica. Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa. Zeszyt 90, Kraków 1977.
- [3] Dudek W.: Minimalizacja wieloargumentowych funkcji logicznych słabo określonych metodą redukcji quasi-implikantów. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXII. Zeszyt 4, Warszawa 1977.
- [4] Dudek W.: Minimalizacja wieloargumentowych funkcji logicznych słabo określonych z wiązaniami wieloargumentowymi. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XXIII. Zeszyt 3, Warszawa 1978 (w druku).
- [5] Harrison M.A.: Wstęp do teorii sieci przełączających i teorii automatów. PWN, Warszawa 1973.
- [6] Karnaugh M.: The Map Methods for Synthesis of Combinational Logic Circuits. Trans. AIEE, Part. I. Comm. and Electronics Nr 9 1953.
- [7] Kazakow W.D.: Minimalizacja logiczеских функций болшого числа переменных. Izd. AN CCCP. Awtomatika i Tielemechanika, t. XXIII, Nr 9, 1962.
- [8] Kerntopf P.; Michalski A.: Wybrane zagadnienia syntezy kombinacyjnych układów logicznych. Centrum Obliczeniowe Polskiej Akademii Nauk. PWN, Warszawa 1972.
- [9] Siwiński J.: Układy przełączające w automatyce. WNT, Warszawa 1968.

Резюме

В работе представлен метод минимизации слабоопределенных логических функций, образующих "запрещенные многоаргументные овязывания". Приведены алгоритмы минимизации и примеры решений. На их фоне рассмотрены некоторые технические проблемы минимизации.

S u m m a r y

The minimization technique of weakly defined logic functions is discussed, using introduced concept of the so called "multiargument forbidden bindings". The minimization algorithms and some examples of solutions are presented. Basing on them some technical aspects of minimization operations are discussed.