ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1974

Seria: Górnictwo z. 64 Nr kol. 425

Marian Kozdrój, Stanisław Parysiewicz
Witold Parysiewicz

# OPTYMALNA STRUKTURA ŚRODKÓW WYDOBYCIA W GÓRNICTWIE WĘGLA KAMIENNEGO

Streszczenie. W artykule podano metodę optymalizacji tendencji rozwojowej przemysłu węgla kamiennego. Wprowadzono również wzory dla izokliny optymalnej wyznaczającej optymalny rozwój oraz dla izokliny prognozowanej.

## 1. Wstęp

Jednym z podstawowych problemów każdego procesu produkcyjnego jest wybór odpowiedniej techniki wytwarzania. Dla tak dużej jednostki organizacyjnej, jaką jest górnictwo węgla kamiennego, technik wytwarzania jest teoretycznie nieskończenie wiele.

W każdym procesie można wyodrębnić dwie podstawowe grupy czynników: osobowe i rzeczowe. Między tymi czynnikami istnieje określona substancja i komplementarność.

Z przeglądu technik wytwarzania możliwych do zastosowania w jakimś procesie produkcji dostrzec można, że różnią się owe techniki wielkościami użytych czynników produkcji. Przy danym poziomie produkcji wzrost jednego z czynników powoduje zmniejszenie drugiego i odwrotnie.

Podstawowym narzędziem ekonometrycznej analizy procesu produkcyjnego, odzwierciedlającym relacje ilościowe między poszczególnymi czynnikami produkcji, jest funkcja produkcji. Funkcja taka umożliwia badanie wpływu poszczególnych czynników na kształtowanie się wielkości produkcji oraz stopnia substytucji i komplementarności nakładu środków.

Rozwiązania techniczne procesu produkcji, generalnie rzecz biorąc, różnić się będą relacjami pracy żywej i uprzedmiotowionej, a więc stopą substytucji pracy żywej i uprzedmiotowionej. Inaczej formułując, różnice w metodach wytwarzania dotyczyć mogą stopnia uzbrojenia pracy ludzkiej, a więc jej mechanizacji i wydajności.

Każda z technik wytwarzania dla danego poziomu produkcji charakteryzuje się różnymi kosztami eksploatacyjnymi. Dopiero zastosowanie optymalnej relacji (określonej techniki wytwarzania) między nakładami inwestycyjnymi a nakładami pracy żywej gwarantuje minimalizację jednostkowego kosztu wydobycia. W niniejszym artykule podano metodę minimalizacji jednostkowego kosztu wydobycia oraz wyznaczono optymalną strukturę nakładów dla założo-

nego poziomu produkcji bez uwzględnienia problemów związanych z efektywnością inwestycji.

Wyznaczenie optymalnej struktury nakładów środków z uwzględnieniem problemów związanych z efektywnością inwestycji przedstawione zostanie w odrębnym opracowaniu.

Przyjęte oznaczenia:

$Y_1$ – wydobycie ogólne węgla kamiennego (mln ton)

$Y_2$ – koszt wydobycia tony węgla ($\frac{zł}{tonę}$)

$X_1$ – wartość majątku trwałego produkcyjnego resortu (mld zł)

$X_2$ – liczba przepracowanych pracownikodniówek rocznie (mln)

t – zmienna czasowa

$\xi$ – składnik losowy modelu

$p_1$ – cena jednego miliarda złotych majątku trwałego w jednostkowym koszcie wydobycia

$p_2$ – cena jednego miliona pracownikodniówek w jednostkowym koszcie wydobycia

$p_3$ – stała dla danego poziomu wydobycia w jednostkowym koszcie, niezależna od $X_1$ i $X_2$.

## 2. Wyznaczenie optymalnych $X_1$ i $X_2$

W pracy [7] wyprowadzono wzory matematyczne funkcji wydobycia

$$Y_1 = X_1^{0,67} \cdot X_2^{0,44} \cdot 10^{\xi} \tag{1}$$

oraz funkcji jednostkowego kosztu

$$Y_2 = (0,831022 - 0,018669 \cdot t) \cdot X_1 + (1,270060 + 0,023244 \cdot t) \cdot X_2 + 108,7 \cdot t^{0,0565} \tag{2}$$

Funkcje trendów we wzorze (2) są modelami ekonometrycznymi parametrów $p_1$, $p_2$ i $p_3$ wyznaczonymi na podstawie funkcji jednostkowych kosztów dla lat 1960–1969 [7].

Podstawiając za t wartości 9-19 otrzymano funkcje kosztów dla lat 1970 - - 1980.

$$
\begin{aligned}
&1970 \quad 0{,}6630 \cdot X_1 + 1{,}4792 \cdot X_2 + 123{,}1 \\
&1971 \quad 0{,}6443 \cdot X_1 + 1{,}5025 \cdot X_2 + 123{,}8 \\
&1972 \quad 0{,}6256 \cdot X_1 + 1{,}5257 \cdot X_2 + 124{,}5 \\
&1973 \quad 0{,}6069 \cdot X_1 + 1{,}5489 \cdot X_2 + 125{,}1 \\
&1974 \quad 0{,}5883 \cdot X_1 + 1{,}5722 \cdot X_2 + 125{,}7 \\
&1975 \quad 0{,}5696 \cdot X_1 + 1{,}5954 \cdot X_2 + 126{,}2 \\
&1976 \quad 0{,}5509 \cdot X_1 + 1{,}6187 \cdot X_2 + 126{,}4 \\
&1977 \quad 0{,}5323 \cdot X_1 + 1{,}6419 \cdot X_2 + 127{,}1 \\
&1978 \quad 0{,}5136 \cdot X_1 + 1{,}6652 \cdot X_2 + 127{,}6 \\
&1979 \quad 0{,}4949 \cdot X_1 + 1{,}6884 \cdot X_2 + 128{,}0 \\
&1980 \quad 0{,}4763 \cdot X_1 + 1{,}7116 \cdot X_2 + 128{,}4
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Ze względu na nieliniowy charakter funkcji wydobycia posłużono się metodą marginalną programowania.

Ogólne zagadnienie jest następujące: Wyznaczyć wielkości $X_1$ i $X_2$ takie aby dla założonego poziomu wydobycia jednostkowy koszt był minimalny, czyli

$$Y_2 = (0{,}831022 - 0{,}018669 \cdot t) \cdot X_1$$

$$+ (1{,}270060 + 0{,}023244 \cdot t) \cdot X_2 + 108{,}7 \cdot t^{0{,}0565} = \min.$$

przy spełnieniu warunku ubocznego

$$Y_1^0 = X_1^{0{,}67} \cdot X_2^{0{,}44}$$

i warunków brzegowych $X_{1/2} \geqslant 0$, gdzie $Y_1^0$ - zadany poziom wydobycia (wydobycie oraz prognozy wydobycia w latach 1960-1980 [5]).

Warunkiem, aby dany program był optymalny jest to, żeby krańcowy przyrost funkcji celu, spowodowany przez zwiększenie nakładu dowolnego środ-

ka (w warunkach ceteris paribus), równy był krańcowemu przyrostowi funkcji nakładu środków spowodowanemu przez zwiększenie nakładu tego środka. Funkcja celu (przy istnieniu warunku ubocznego) jest optymalna, jeżeli krańcowa efektywność danego środka, przypadająca na jednostkę jego krańcowego nakładu, jest taka sama dla każdego środka lub odwrotnie, jeżeli krańcowy nakład danego środka przypadający na jednostkę jego krańcowej efektywności jest taki sam dla każdego środka [8].

W celu wyznaczenia optymalnych wielkości $X_1$ i $X_2$ tworzy się pomocniczą funkcję Lagrange'a

$$L = Y_2 (X_1,X_2) - V_1 \left[Y_1 (X_1,X_2)\right] \tag{4}$$

gdzie:

$V_1$ – mnożnik Langrage'a,

$Y_1(X_1,X_2)$ – funkcja (1),

$Y_2(X_1,X_2)$ – funkcja (2).

Warunkiem koniecznym istnienia wartości ekstremalnej funkcji Langrange'a jest to, aby jej pochodne cząstkowe były równe zeru, czyli

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \qquad (i = 1,2)$$

Z tego układu dwóch równań oraz z warunku bilansowego (1) można obliczyć optymalne wartości zmiennych $X_i$ oraz odpowiadającego im mnożnika Lagrange'a.

Obliczone wartości $X_i$ i $V_1$ należy podstawić do warunku

$$d^2L = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{\partial^2 Y_2}{\partial X_i \, \partial X_j} - V_1 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X_i \, \partial X_j}\right] dX_i \, dX_j \tag{5}$$

i sprawdzić, czy $d^2L > 0$ [warunek minimum funkcji (2)].

Po zróżniczkowaniu (2) i (1) otrzymujemy

$$dY_2 = (0{,}831022 - 0{,}018669 \cdot t)\, dX_1 +$$

$$+ (1{,}270060 + 0{,}023244 \cdot t)\, dX_2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{0{,}67 \cdot X_2^{0,44}}{X_1^{0,33}} dX_1 + \frac{0{,}44 \cdot X_1^{0,67}}{X_2^{0,46}} dX_2 = 0$$

Uwzględniając, że równania te muszą być spełnione jednocześnie, otrzymano jako rozwiązanie problemu warunek

$$\frac{0,67 \cdot X_2^{0,44}}{(0,831022 - 0,018669 \cdot t) \cdot X_1^{0,33}} = \frac{0,44 \cdot X_1^{0,67}}{(1,270060 + 0,023244 \cdot t) \cdot X_2^{0,46}} \qquad (7)$$

Na podstawie tego ostatniego równania oraz warunku bilansowego (1) można wyznaczyć optymalne $X_1$ i $X_2$ oraz minimalny koszt jednostkowy $Y_2$ (tablica 1).

Tablica 1

| Lata | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 104,94 | 103,80 | 96,28 | 103,79 | 108,10 | 111,02 | 113,60 | 117,75 | 123,26 |
| $X_2$ | 32,65 | 34,54 | 41,03 | 39,52 | 40,36 | 39,88 | 40,65 | 40,15 | 40,73 |
| $Y_2$ | 216,39 | 219,21 | 241,67 | 249,16 | 251,16 | 253,11 | 258,33 | 239,71 | 268,90 |
| Lata | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 |
| $X_1$ | 134,07 | 137,54 | 146,33 | 153,42 | 160,65 | 168,04 | 176,01 | 184,19 | 192,72 |
| $X_2$ | 40,00 | 40,49 | 41,22 | 41,32 | 41,48 | 41,30 | 41,27 | 41,17 | 41,04 |
| $Y_2$ | 271,23 | 274,18 | 280,02 | 284,53 | 286,85 | 289,41 | 292,30 | 294,81 | 297,04 |
| Lata | 1978 | 1979 | 1980 | | | | | | |
| $X_1$ | 201,62 | 210,77 | 220,48 | | | | | | |
| $X_2$ | 40,84 | 40,58 | 40,30 | | | | | | |
| $Y_2$ | 299,16 | 300,83 | 302,39 | | | | | | |

Pewne anomalie, jakie wystąpiły w latach 1960-1961 są spowodowane bardzo wysokim udziałem płac i ubezpieczeń oraz małym udziałem amortyzacji w jednostkowym koszcie wydobycia. Dlatego też w tych latach optymalna wielkość $X_2$ jest stosunkowo niska a $X_1$ wysoka. W związku z powyższym funkcje trendów dla $p_1$, $p_2$ i $p_3$ oszacowano z pominięciem danych w latach 1960 - - 1961.

Z postaci analitycznej funkcji wydobycia wynika, że poszczególne nakłady mogą się wzajemnie zastępować przynajmniej w pewnych granicach. Tę zastępowalność czyli substytucje nakładów należy rozumieć w ten sposób, że tą samą ilość produkcji można otrzymać stosując poszczególne czynniki w różnych proporcjach. Jednocześnie funkcja ta spełnia warunek komplementarności, tzn. że produkcja może istnieć jedynie w przypadku istnienia obydwu czynników.

Pojęcie substytucji nakładów wiąże się ściśle z liniami jednakowej produkcji czyli izokwantami. Izokwantą produkcji jest miejscem geometrycznym punktów o takiej własności, że dla każdego punktu z tego zbioru produkcja jest stała dla różnych kombinacji nakładów.

Przebieg izokwanty można wyznaczyć z zależności (1) przy założeniu że $\hat{S} = 0$

$$X_2 = \sqrt[11]{\left(\frac{Y_1}{X_1^{0,67}}\right)^{25}} \tag{8}$$

Podstawiając za $Y_1$ założony pizlom wydobycia, a za $X_1$ różne wartości majątku trwałego otrzymamy szereg punktów o współrzędnych $(X_1, X_2)$ jako miejsce geometryczne stałego wydobycia. Na rys. 1 przedstawiono interpretacje graficzną programowania marginalnego.

Rzuty punktów styczności izokwant wydobycia z liniami kosztów jednostkowych na osie $X_1$ i $X_2$, wyznaczają optymalny podział nakładów czynników dla danego poziomu wydobycia.

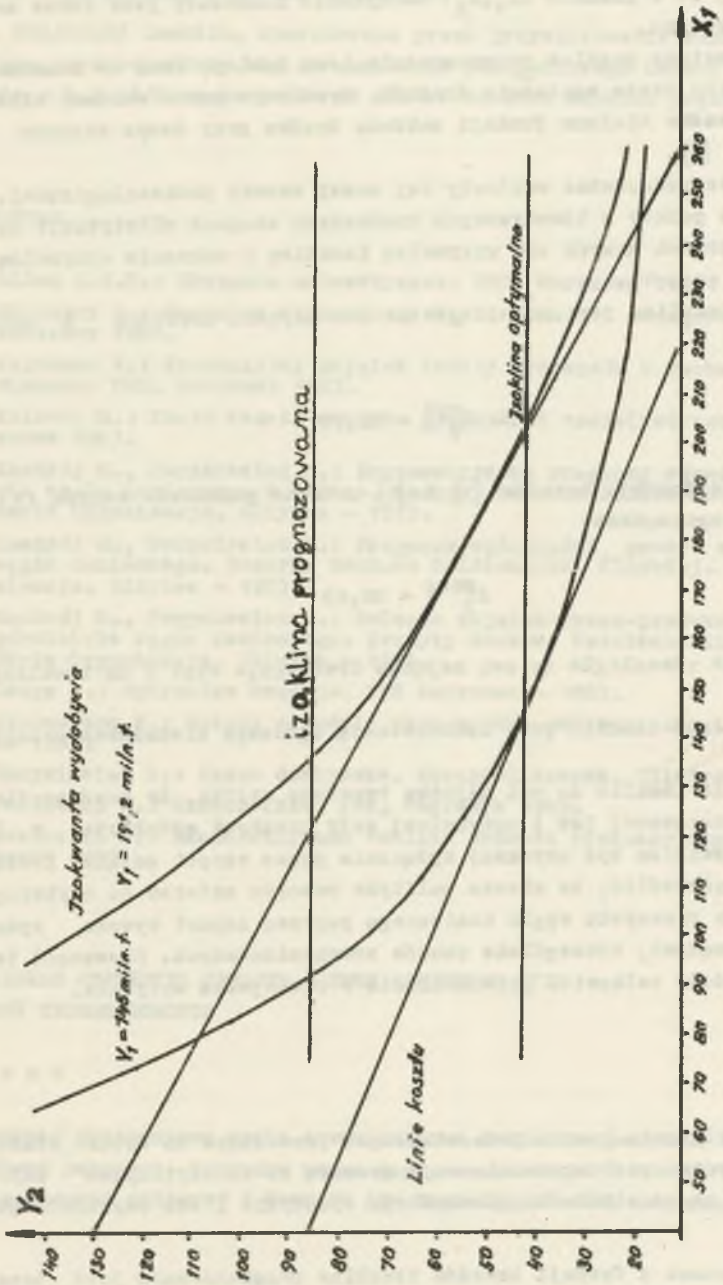
Tangens nachylenia stycznej w poszczególnych punktach krzywej jednakowego wydobycia wyznacza stopę substytucji jednego czynnika przez drugi w danym punkcie i jest krańcową stopą substytucji.

Krańcowa stopa substytucji określa, o jaką wielkość należy zwiększyć czynnik wydobycia $X_2$ dla rekompensaty niewielkiego zmniejszenia czynnika $X_1$, aby poziom wydobycia nie uległ zmianie. Jest to określenie substytucji technicznej czynników, określa bowiem stosunki, w jakich mogą się wzajemnie zastępować czynniki przy danym poziomie wydobycia.

Stopień wypukłości krzywych jednakowego wydobycia stanowi miarę komlementarności technicznej czynników - im wypukłość izokwant jest większa, tym stopień komplementarności większy, albowiem trudniej ubytek jednego czynnika zastąpić przyrostem drugiego.

Stopień substytucji i komplementarności zależy nie tylko od wypukłości izokwanty, lecz w procesie optymalizacji zależy od cen czynników wydobycia, albowiem warunkiem optymalności jest równość stosunków

$$\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{p_1}{p_2} \tag{9}$$




Rys. 1. Interpretacja graficzna prognozowania marginalnego

co oznacza, że w punkcie $(X_1, X_2)$ nachylenie izokwanty jest równe nachyleniu linii kosztu.

Przedstawiony problem programowania jest dualny, tzn. że maksimum funkcji celu przy danym nakładzie środków, wyrażonym przez warunek bilansowy, jest równoważne minimum funkcji nakładu środku przy danym stopniu realizacji celu [8].

Są to dwa równoważne warianty tej samej zasady prakseologicznej. Prosta łącząca punkty o identycznych krańcowych stopach substytucji na różnych izokwantach nazywa się optymalną izokliną i wskazuje optymalną drogę rozwoju resortu.

Optymalna izoklina jest równoległa do osi majątku trwałego i określona wzorem

$$x_2^{opt} = 40,99 \tag{10}$$

Wyznaczona z funkcji trendów [5] i [6] oraz na podstawie wzorów (1) i (2) izoklina prognozowana

$$x_2^{prog} = 80,65 \tag{11}$$

jest również równoległa do osi majątku trwałego, a więc i do izokliny optymalnej.

Równoległość izoklin jest konsekwencją ogólnego niedoinwestowania górnictwa.

Z parareli izoklin do osi majątku trwałego wynika, że zarówno dla tendencji prognozowanej jak i optymalnej cały przyrost wydobycia w latach 1970-1980 powinien być uzyskany wyłącznie przez wzrost majątku trwałego.

Należy podkreślić, że obecna polityka resortu zmierza do szybkiego doinwestowania przemysłu węgla kamiennego poprzez import wysoko wydajnych maszyn i urządzeń, szczególnie obudów zmechanizowanych. Słuszność tej polityki znajduje całkowite potwierdzenie w niniejszym artykule.

## 3. Wnioski

1. Minimalizacja kosztu jednostkowego, prowadząca do wyboru właściwych metod wydobycia oraz zapotrzebowanie resortu na substytucyjne czynniki, uzależnione są od wielkości planowanego wydobycia i cen czynników produkcji.

2. Wyznaczona z funkcji trendów izoklina prognozowania jest równoległa do izokliny optymalnej, co wiąże się z niedoinwestowaniem górnictwa. Przyspieszenie tempa wzrostu majątku trwałego poważnie obniżyłoby jednostkowy

koszt wydobycia, dla izokliny optymalnej wyznaczającej optymalny rozwój średnio o 28 zł/tonę w latach 1970-1980.

3. Zbieżność izoklin, spowodowana przez przyspieszenie wzrostu majątku trwałego, przyczyniłaby się do obniżenia jednostkowego kosztu wydobycia średnio o 5,3 zł/tonę na każde 10 mld zł wzrostu majątku trwałego.

LITERATURA


[1] Allen R.G.D.: Ekonomia matematyczna. PWN, Warszawa 1961.

[2] Biliński L.: Rachunek ekonomiczny w planowaniu i zarządzaniu. PWN, Warszawa 1969.

[3] Holtzman W.: Produkcyjny majątek trwały przemysłu w rachunku ekonomicznym. PWE, Warszawa 1963.

[4] Kalecki M.: Zarys teorii wzrostu gospodarki socjalistycznej.PWE Warszawa 1963.

[5] Kozdrój M., Parysiewicz S.: Ekonometryczne prognozy wzrostu wydobycia węgla kamiennego w Polsce. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Seria Organizacja. Gliwice - 1973.

[6] Kozdrój M., Parysiewicz S.: Prognozy wydajności pracy w górnictwie węgla kamiennego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria Organizacja. Gliwice - 1973.

[7] Kozdrój M., Parysiewicz S.: Relacja majątek-praca-produkcja koszty w górnictwie węgla kamiennego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Seria Organizacja. Gliwice - 1973.

[8] Lange O.: Optymalne decyzje. PWN Warszawa - 1967.

[9] Niemczynow W.: Metody i modele ekonomiczno-matematyczne. PWE, Warszawa 1964.

[10] Parysiewicz S.: Praca doktorska. Niepublikowana. Gliwice 1971.

[11] Pawłowski Z.: Ekonometria. PWN, Warszawa 1969.

[12] Pawłowski Z.: Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego. PWN, Warszawa 1970.


ОПТИМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СРЕДСТВ ДОБЫЧИ КАМЕННОГО УГЛЯ В ГОРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Р е з ю м е


В статье представлен метод оптимализации тенденции развития каменноугольной промышленности. Выведены также формулы оптимальной изоклины,определяющей оптимальное развитие и формулы для прогнозированной изоклины.

OPTIMAL STRUCTURE OF THE COAL OUT - DRAWING MEDIUMS IN THE PIT - COAL MINING

S u m m a r y

In the article there have been given the development trend optimalisation methods in the pit - coal industry. There have been also deduced appointing the optimal development functional formulae for optimal isodines and for the prognoris isodines.