

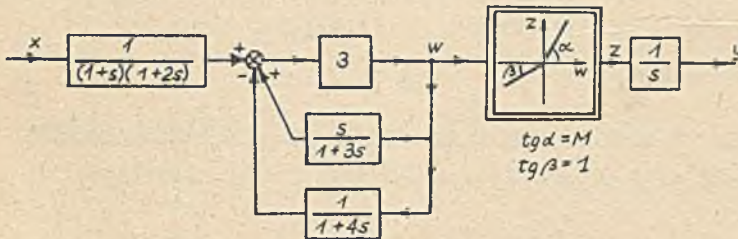
Michał LATARNIK

## DYSTRYBUCJA ZERO I PEWNE KONSEKWENCJE JEJ WYSTĘPOWANIA W MODELACH UKŁADÓW STEROWANIA

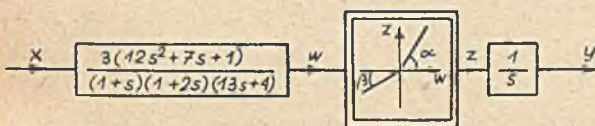
**Streszczenie.** W pracy wprowadzono pojęcie dystrybucji ZERO oraz omówiono jej właściwości istotne z punktu widzenia teorii sterowania. Podano warunki samodzielnego występowania sygnałów o postaci dystrybucji ZERO w liniowym modelu układu sterowania. Wskazano na nieprzydatność opisu za pomocą transformacji Laplace'a dla modeli z sygnałami o postaci dystrybucji ZERO. Wyniki tej pracy mają charakter podstawowy; w szczególności odnosi się to do warunku stosowania znanych reguł przekształcania schematów blokowych.

## 1. Przykład wprowadzający

Rozpatrzmy prosty model układu regulacji przedstawiony na rys. 1. Interesować nas będzie przebieg sygnału  $y(t)$  przy zerowych warunkach początko-



Rys. 1. Przykład schematu blokowego układu regulacji



Rys. 2. Uproszczony schemat blokowy układu regulacji

wych i zerowym wymuszeniu  $x(t)$ . Zgodnie z podawanymi dotychczas sposobami przekształcania schematów blokowych (np. [1] ÷ [7], [10], [12] ÷ [18]) można rozpatrywany model układu sprowadzić do postaci przedsta-

wionej na rys. 2. Zależność pomiędzy transformacjami Laplace'a  $L\{x(t)\}$  oraz  $L\{w(t)\}$  jest zatem następująca:

$$W(s) = \frac{3(12s^2 + 7s + 1)}{(1+s)(1+2s)(13s+4)} X(s) \quad (1)$$

Dla zerowego wymuszenia  $x(t) = 0$  otrzymujemy  $X(s) = 0$ , czyli  $W(s) = 0$ . Przy zerowym sygnale  $w(t) = 0$  otrzymujemy także  $y(t) = 0$ . Pokażemy dalej, że wynik ten nie jest jednoznaczny.

## 2. Dystrybucja ZERO

W tym punkcie wprowadzone zostanie pojęcie dystrybucji ZERO oparte o identyfikację równoważnych ciągów podstawowych [11]. Następnie zostaną podane przykłady dystrybucji ZERO oraz pewne ich właściwości istotne dla zastosowań w teorii sterowania.

### 2.1. Definicja dystrybucji ZERO

Dystrybucję ZERO będziemy nazywać klasę równoważnych ciągów podstawowych  $f_n(t)$  [11] określonych w przedziale  $t > 0$  i posiadających dwie właściwości:

1<sup>o</sup> istnieje ciąg funkcji  $F_n(t)$  taki, że  $F_n^{(1)}(t) = f_n(t)$

2<sup>o</sup> ciąg  $F_n(t)$  jest zbieżny jednostajnie do zera.

Mówimy, że ciąg funkcji  $F_n(t)$  jest zbieżny jednostajnie do zera w przedziale  $t > 0$ , jeśli istnieje taki ciąg liczbowy  $\epsilon_n$  zbieżny do zera, że

$$|F_n(t)| \leq \epsilon_n \quad n = 1, 2, \dots$$

dla wszystkich  $t > 0$ .

### 2.2. Przykłady ciągów podstawowych określających dystrybucję ZERO

W tym punkcie ograniczymy się do podania trzech przykładów.

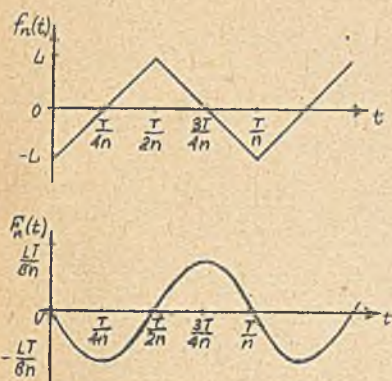
#### Przykład 1

Weźmy typowy przebieg piłokształtny symetryczny o amplitudzie  $L$  i okresie  $\frac{T}{n}$ :

$$f_n(t) = \begin{cases} -L + \frac{4Ln}{T}(t - 1\frac{T}{n}) & \text{dla } t \in (1\frac{T}{n}, 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n}], \quad l=0, 1, \dots \\ L - \frac{4Ln}{T}(t - 1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n}) & \text{dla } t \in (1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n}, (l+1)\frac{T}{n}], \quad l=0, 1, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Ciąg  $F_n(t)$  przyjmuje wtedy postać:

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{2Ln}{T}(t - 1\frac{T}{n})(t - 1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n}) & \text{dla } t \in (1\frac{T}{n}, 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n}], \quad l=0, 1, \dots \\ -\frac{2Ln}{T}(t - 1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n})[t - (l+1)\frac{T}{n}] & \text{dla } t \in (1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n}, (l+1)\frac{T}{n}], \quad l=0, 1, \dots \end{cases} \quad (3)$$



Rys. 3. Wykresy funkcji  $f_n(t)$  oraz  $F_n(t)$ , przykład 1

Wykresy funkcji  $f_n(t)$  oraz  $F_n(t)$  przedstawiono na rys. 3. Zauważmy, że ciąg  $F_n(t)$  jest zbieżny jednostajnie do zera, ponieważ istnieje ciąg liczbowy  $\mathcal{E}_n = \frac{L}{8n}$  zbieżny do zera oraz

$$|F_n(t)| \leq \mathcal{E}_n, \quad n=1,2,\dots$$

dla wszystkich  $t > 0$ .

Zatem rozpatrywany ciąg (2) określa dystrybucję ZERO.

Przykład 2

Funkcja stała przyjmująca wartość zero

$$f_n(t) = 0 \quad \text{dla } t > 0 \quad (4)$$

również określa dystrybucję ZERO, gdyż możemy napisać:

$$f_n(t) = 0 \quad (5)$$

Przykład 3

Przykładem ciągu podstawowego określającego dystrybucję ZERO może być także ciąg:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t > 0 \text{ i } t \notin [T - \frac{1}{n}, T + \frac{1}{n}] \\ \ln(t - T + \frac{1}{n}) & \text{dla } t \in [T - \frac{1}{n}, T] \\ -\ln(t - T - \frac{1}{n}) & \text{dla } t \in [T, T + \frac{1}{n}] \end{cases} \quad (6)$$

Dla tego przykładu możemy napisać:

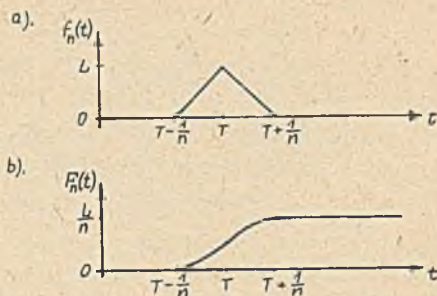
$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (0, T - \frac{1}{n}) \\ \frac{1}{2} \ln(t - T + \frac{1}{n})^2 & \text{dla } t \in [T - \frac{1}{n}, T] \\ -\frac{1}{2} \ln(t - T - \frac{1}{n})^2 + \frac{L}{n} & \text{dla } t \in [T, T + \frac{1}{n}] \\ \frac{L}{n} & \text{dla } t > T + \frac{1}{n} \end{cases} \quad (7)$$

Wykresy funkcji  $f_n(t)$  oraz  $F_n(t)$  dla tego przykładu przedstawiono na rys. 4.

Zauważmy, że ciąg  $F_n(t)$  jest jednostajnie zbieżny do zera, gdyż:

$$|F_n(t)| \leq \mathcal{E}_n = \frac{L}{n}$$

Zatem ciąg (6) określa dystrybucję ZERO.



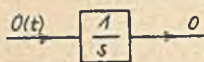
Rys. 4. Wykresy funkcji  $f_n(t)$  oraz  $F_n(t)$ , przykład 3

### 2.3. Właściwości dystrybucji ZERO

W tym punkcie zostaną przedstawione pewne podstawowe właściwości dystrybucji ZERO, istotne z punktu widzenia zastosowań w teorii sterowania. Przedstawione zostaną odpowiedzi czasowe liniowych elementów dynamicznych pobudzanych sygnałami o postaci dystrybucji ZERO. Następnie będzie omówiona bardzo istotna właściwość transformacji Laplace'a (Laplace'a-Carsona), a mianowicie będzie wykazana jej "niewrażliwość" na postać dystrybucji ZERO. Dla wszystkich postaci dystrybucji ZERO jej transformata jest równa zero. Wspomniana "niewrażliwość" może w szczególnych przypadkach (p.3.2) stanowić barierę do stosowania tak popularnego aparatu analizy i syntezy układów, jakim jest rachunek operatorowy Laplace'a (Laplace'a-Carsona). Okazuje się bowiem, że odpowiedź czasowa modelu układu automatyki może być uzależniona od postaci dystrybucji (p.2.3.4).

#### 2.3.1. Odpowiedź czasowa elementu całkującego na pobudzenie sygnałem o postaci dystrybucji ZERO

Przy pobudzeniu sygnałem  $O(t)$  o postaci dystrybucji ZERO na wyjściu elementu całkującego uzyskujemy sygnał stały. W szczególności przy zerowych warunkach początkowych uzyskujemy na wyjściu rozpatrywanego elementu sygnał zerowy (rys. 5). Właściwość powyższa wynika bezpośrednio z definicji dystrybucji ZERO.



Rys.5. Odpowiedź elementu całkującego na pobudzenie dystrybucją zero( $O(t)$ )

#### 2.3.2. Odpowiedź czasowa elementu dynamicznego liniowego na pobudzenie sygnałem o postaci dystrybucji ZERO

Zakładamy, że badany dynamiczny element liniowy jest opisany za pomocą równań stanu:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8)$$

$$y = Cx + du$$

gdzie  $A, B, C$  - są macierzami o współczynnikach stałych i wymiarach odpowiednio  $(n \times n)$ ,  $(n \times 1)$ ,  $(1 \times n)$ ;  $d$  - stały współczynnik. Ponieważ dla powyższego modelu liniowego można stosować zasadę superpozycji, będziemy w dal-

szym ciągu zajmować się tylko odpowiedzią układu na wymuszenie sygnałem  $u(t) = 0(t)$  przy zerowych warunkach początkowych, wtedy:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot 0(\tau) d\tau \quad (10)$$

Niech ciąg  $f_n(t)$  określa dystrybucję ZERO. Oznaczmy przez  $F_n(t)$  całkę:

$$F_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) d\tau \quad (11)$$

a przez  $x_n(t)$  odpowiedź badanego układu na wymuszenie  $f_n(t)$

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot f_n(\tau) d\tau \quad (12)$$

Zwróćmy uwagę, że:

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} B F_n(t)] = -A e^{-At} B F_n(t) + e^{-At} B f_n(t) \quad (13)$$

W oparciu o zależności (12) oraz (13) możemy napisać:

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B f_n(\tau) d\tau = B F_n(t) + A \int_0^t e^{A(t-\tau)} B F_n(\tau) d\tau \quad (14)$$

Wykorzystując powyższe równanie możemy oszacować normę wektora  $x_n(t)$ :

$$\|x_n(t)\| \leq \|B\| |F_n(t)| + \|A\| \int_0^t e^{\|A\|(t-\tau)} \|B\| \cdot |F_n(\tau)| d\tau \quad (15)$$

Ponieważ ciąg  $f_n(t)$  określa dystrybucję ZERO, więc istnieje taki ciąg liczbowy  $\mathcal{E}_n$  zbieżny do zera, że  $|F_n(t)| \leq \mathcal{E}_n$ . Zatem w oparciu o zależność (15) możemy napisać:

$$\|x_n(t)\| \leq e^{\|A\| \cdot t} \|B\| \mathcal{E}_n \quad \text{dla } t > 0 \quad (16)$$

Z relacji (15) wynika, że norma  $\|x_n(t)\|$  dla dowolnej chwili  $t > 0$  dąży do zera przy  $n \rightarrow \infty$ . Biorąc pod uwagę zależność (9) oraz (16) możemy napisać:

$$y(t) = d \cdot 0(t) \quad (17)$$

Jeśli badany układ jest opisany za pomocą transmitancji

$$K(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + d \quad (18)$$

to wyjście  $y(t)$  przy pobudzeniu  $0(t)$  jest określone następująco:

$$y(t) = K(\infty) \cdot 0(t) \quad (19)$$

### 2.3.3. Transformata Laplace'a (Laplace'a-Carsona) dystrybucji ZERO

Wykażemy obecnie, że dla każdej postaci dystrybucji ZERO jej transformata jest równa zero. Niech ciąg podstawowy  $f_n(t)$  określa dystrybucję ZERO. Wykażemy, że ciąg transformat:

$$G_n(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-s\tau} f_n(\tau) d\tau \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (20)$$

jest zbieżny niemal jednostajnie do zera przy  $n \rightarrow \infty$ . Dokonując całkowania przez części otrzymujemy po uwzględnieniu relacji (11)

$$\int_0^t e^{-s\tau} f_n(\tau) d\tau = e^{-st} F_n(t) + s \int_0^t e^{-s\tau} F_n(\tau) d\tau \quad (21)$$

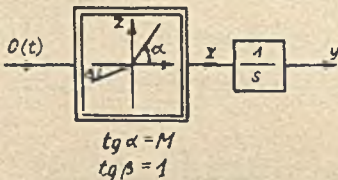
Z przyjętej definicji dystrybucji ZERO wynika, że istnieje zbieżny do zera ciąg liczbowy  $\zeta_n$ , dla którego  $\zeta_n > |F_n(\tau)|$ . Wykorzystując relację (21) otrzymujemy więc oszacowanie:

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f_n(\tau) d\tau \right| \leq \zeta_n [1 + \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \varphi)^2}], \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} s}{\operatorname{Re} s} \quad (22)$$

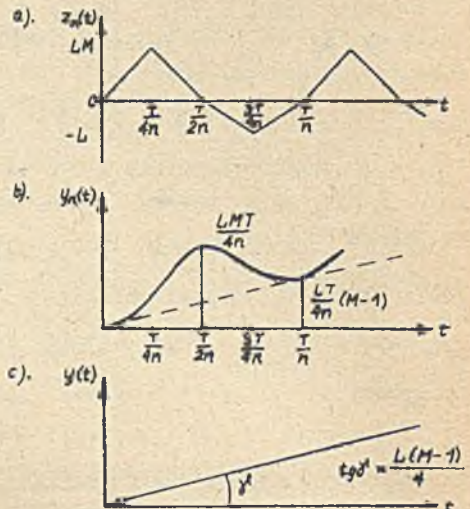
W oparciu o powyższe oszacowanie można stwierdzić, że transformata Laplace'a dystrybucji ZERO niezależnie od jej konkretnej postaci jest równa zero.

#### 2.3.4. Przykład przechodzenia sygnału o postaci dystrybucji ZERO przez element nieliniowy

W tym punkcie dla przykładu określimy odpowiedź elementu przedstawionego na rys. 6, na pobudzenie sygnałem o postaci (2) dystrybucji ZERO. Zwróćmy uwagę, że element z rys. 6 jest fragmentem modelu z przykładu wprowadzającego. Podając na wejście elementu nieliniowego przebieg o postaci  $f_n(t)$  określonej zależnością (2) otrzymujemy na wyjściu tego elementu przebieg trójkątny niesymetryczny o postaci (rys. 7a):



Rys. 6. Fragment układu z rys. 1



Rys. 7. Przebiegi  $z_n(t)$ ,  $y_n(t)$ ,  $y(t)$  ilustrujące właściwość 2.3.4.

$$z_n(t) = \begin{cases} \frac{4MLn}{T}(t-1\frac{T}{n}) & \text{dla } 1\frac{T}{n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{T}{4n} \quad l=0,1,\dots \\ -\frac{4MLn}{T}(t-1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n}) & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{T}{4n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n} \\ -\frac{4Ln}{T}(t-1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n}) & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{3T}{4n} \\ \frac{4Ln}{T} [t-(1+1)\frac{T}{n}] & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{3T}{4n} < t \leq (1+1)\frac{T}{n} \end{cases} \quad (23)$$

Zakładając zerowy warunek początkowy na elemencie całkującym otrzymujemy na wyjściu sygnał odpowiadający  $z_n(t)$  (rys. 7b):

$$y_n(t) = \begin{cases} \frac{2MLn}{T}(t-1\frac{T}{n})^2 + \frac{L(M-1)}{4n} 1T & \text{dla } 1\frac{T}{n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{T}{4n} \\ -\frac{2MLn}{T}(t - 1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n})^2 + \frac{L(M-1)}{4n} 1T + \frac{MLT}{4n} & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{T}{4n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n} \\ -\frac{2Ln}{T}(t - 1\frac{T}{n} - \frac{T}{2n})^2 + \frac{L(M-1)}{4n} 1T + \frac{MLT}{4n} & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{T}{2n} < t \leq 1\frac{T}{n} + \frac{3T}{4n} \\ \frac{2Ln}{T} [t-(1+1)\frac{T}{n}]^2 + \frac{L(M-1)}{4n} (1+1)T & \text{dla } 1\frac{T}{n} + \frac{3T}{4n} < t \leq (1+1)\frac{T}{n} \end{cases} \quad (24)$$

Można zauważyć, że ciąg  $y_n(t)$  jest dla  $t > 0$  jednostajnie zbieżny przy  $n \rightarrow \infty$  do  $y(t) = \frac{1}{T} L(M-1)t$  (rys. 7c). Zwróćmy uwagę, że dla różnych postaci dystrybucji ZERO otrzymuje się odmienne postacie  $y(t)$ .

### 3. Warunek konieczny i wystarczający samoistnego wystąpienia sygnału o dowolnej postaci dystrybucji ZERO w liniowym modelu stacjonarnym o stałych skupionych

#### 3.1. Opis badanych układów

Jak zasugerowano w przykładzie wprowadzającym dokonywanie pewnych przekształceń na schemacie blokowym może nie być dopuszczalne. W związku z tym rozpatrywać będziemy modele układów liniowych, stacjonarne o stałych współczynnikach przedstawione za pomocą pełnego (pierwotnego, nieprzekształconego) schematu blokowego. Schemat ten ma charakter źródłowy i powinien, w uznaniu tworzącego go, najlepiej oddawać związki występujące w badanym rzeczywistym układzie. Zakładamy, że pełny schemat blokowy posiada następujące cechy [8], [9]:

- każdy z bloków dynamicznych schematu scharakteryzowany jest równaniem różniczkowym opisującym, dla dowolnych warunków początkowych, zależność pomiędzy sygnałem wejściowym  $u_j$ , a sygnałem wyjściowym  $y_j$ :

$$y_j^{(n_j)} + a_1^{(j)} y_j^{(n_j-1)} + \dots + a_{n_j}^{(j)} y_j = b_{n_j-m_j}^{(j)} u_j^{(m_j)} + \dots + b_{n_j}^{(j)} u_j \quad (25)$$

gdzie  $n_j \geq 1$ ,  $n_j \geq m_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Zakładamy, że żadna z  $n_j$  składowych wektora stanu [1], [6], [14] odpowiadającego temu blokowi nie jest kombinacją liniową wektorów stanu odpowiadających pozostałym blokom schematu. Rozpatrywany  $j$ -ty blok może być scharakteryzowany nieuproszczoną transmitancją:

$$k_j(s) = \frac{u_j(s)}{u_j(s)} = \frac{l_j(s)}{m_j(s)} \quad (26)$$

gdzie

$$l_j(s) = b_{n_j-m_j}^{(j)} s^{m_j} + \dots + b_{n_j}^{(j)} \quad (27)$$

$$m_j(s) = s^{n_j} + a_1^{(j)} s^{n_j-1} + \dots + a_{n_j}^{(j)} \quad (28)$$

- każdy z bloków bezinercyjnych jest opisany zależnością:

$$y_j = d_j \cdot u_j \quad (29)$$

gdzie  $j = n + 1, \dots, N$ ,

- wektor sygnałów wejściowych  $u^T = (u_1, \dots, u_N)$  jest określony przez równania węzłów sumacyjnych:

$$u = R \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + B_E e = R_y + B_E e \quad (30)$$

gdzie:

$R$  - macierz połączeń międzyblokowych posiadająca elementy  $-1, 0, +1$ , wymiar  $(N \times N)$ ,

$e$  - wektor sygnałów zewnętrznych, wymiar  $(p \times 1)$ ,

$B_E$  - macierz stała o wymiarze  $(N \times p)$ .

### 3.2. Warunek konieczny i wystarczający samoistnego wystąpienia sygnału o postaci dystrybucji ZERO

Przez samoistne wystąpienie w modelu opisanym w p.3.1, sygnału o postaci dystrybucji ZERO rozumie się pojawienie w badanym modelu sygnału o dowolnej postaci dystrybucji ZERO przy zerowych wymuszeniach zewnętrznych  $e = 0$  oraz zerowych warunkach początkowych. Warunek ten zostanie podany w postaci twierdzenia.

#### Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i wystarczającym tego, by w badanym modelu (p.3.1) mógł wystąpić samoistnie sygnał o dowolnej postaci dystrybucji ZERO jest:

$$\Delta(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Delta(s) = 0 \quad (31)$$

gdzie:

$\Delta(s)$  - wyznacznik schematu blokowego określony w regule Masona [18],



$$\Delta(s) = 1 - \sum_z P_{z1}(s) + \sum_k P_{k2}(s) - \sum_l P_{l3}(s) + \dots \quad (32)$$

$P_{z1}(s)$  - transmitancje poszczególnych pętli badanego modelu; suma jest liczona po wszystkich pętlach tego schematu,

$P_{k2}(s)$  - iloczyn transmitancji pary niestykających się pętli w pełnym schemacie blokowym; suma jest liczona po wszystkich parach niestykających się pętli,

$P_{l3}(s)$  - iloczyn transmitancji trzech niestykających się pętli w pełnym schemacie blokowym; suma jest liczona po wszystkich trójkach niestykających się pętli.

### 3.2.1. Dowód

Zwrómy uwagę, że dowolny j-ty blok dynamiczny może być opisany następująco [1]:

$$\dot{x}_j = A_j x_j + B_j u_j \quad (33)$$

$$y_j = C_j x_j + d_j u_j$$

gdzie

$$A_j = \begin{bmatrix} 0, 1, 0, \dots, & 0 \\ \dots & \dots \\ 0, 0, \dots & 0, 1 \\ -a_{nj}^{(j)}, \dots, & -a_1^{(j)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$B_j, C_j$  - macierze o wymiarach  $(nj \times 1), (1 \times nj)$ ,

$d_j$  - skalar.

Z określenia pełnego schematu blokowego wynika, że składniki stanu  $x_j$  nie pokrywają się z jakimikolwiek składowymi stanów pozostałych bloków (nie są dla dowolnych warunków początkowych liniowymi kombinacjami pozostałych stanów), zatem można przyjąć jako stan całego układu wektor  $x$  określony jako  $x^T = [x_1, \dots, x_n]$ . Dla tak przyjętego stanu można po uwzględnieniu zależności (30) napisać:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \\ 0 & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \quad (35)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \\ & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_N \\ 0 & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & d_N \end{bmatrix} u = Cx + Du \quad (36)$$

$$u = Ry + B^T \dot{u} \quad (37)$$

Przedmiotem naszego zainteresowania są warunki samodzielnego wystąpienia sygnału o dowolnej postaci dystrybucji ZERO, zatem przyjmujemy zerowe wymuszenie zewnętrzne  $e=0$  oraz zerowe warunki początkowe  $x(0)=0$ . Ponieważ rozpatrywany model jest liniowy, więc uzyskane przy tych założeniach przebiegi  $x$ ,  $y$ ,  $u$  można w oparciu o zasadę superpozycji dodawać do ewentualnych rozwiązań układu równań (35), (36), (37) odpowiadających niezerowemu  $e(t)$ ,  $x(0)$ . Dla zerowego wymuszenia zewnętrznego można rozpatrywany układ równań (35), (36), (37) przedstawić w postaci:

$$\dot{x} = Ax + BRy \quad (38)$$

$$(I - DR)y = Cx \quad (39)$$

W oparciu o zależności (26), (29) oraz (30) otrzymujemy dla  $e=0$ :

$$u(s) = Ry(s) = R \begin{bmatrix} k_1(s) & k_2(s) & \dots & 0 \\ & & \cdot & k_n(s) & d_{n+1} & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \cdot & d_N \end{bmatrix} u(s) \quad (40)$$

Z powyższego równania wynika, że wyznacznik schematu blokowego [18] jest określony następująco:

$$\Delta(s) = \det \left( I - R \begin{bmatrix} k_1(s) & k_2(s) & \dots & 0 \\ & & \cdot & k_n(s) & d_{n+1} & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \cdot & d_N \end{bmatrix} \right) \quad (41)$$

Wykorzystując związki (18), (42) oraz (44) otrzymujemy:

$$\det(I - DR) = \Delta(\infty) \quad (42)$$

### 3.2.1.1. Warunek konieczny

Załóżmy, że  $\Delta(\infty) = \det(I - DR) \neq 0$ . Wtedy biorąc pod uwagę (37), (38), (39) otrzymujemy dla zerowych warunków początkowych:

$$y(t) = 0, u(t) = 0, x(t) = 0, t > 0 \quad (43)$$

Jeśli zatem dla rozpatrywanego przypadku wyznacznik  $\Delta(\infty) = \det(I - DR)$ , jest różny od zera, to układ równań (38), (39) posiada jednoznaczne rozwiązanie; wszystkie sygnały są równe zero.

### 3.2.1.2. Warunek wystarczający

Załóżmy, że macierz  $(I - DR)$  posiada rząd  $N-k$ , gdzie  $0 < k < N$ . Wtedy przy rozwiązywaniu układu równań:

$$(I - DR)y = 0 \quad (44)$$

można dowolnie przyjąć  $k$  współrzędnych wektora  $y$ . Niechaj tymi swobodnie wybieranymi będą współrzędne  $y_1, \dots, y_k$ , dla których wartości określone zostaną przez dowolny ciąg podstawowy dystrybucji ZERO:

$$y_{i,n}(t) = f_n(t) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (45)$$

Ponieważ przyjęto rząd macierzy równy  $(N-k)$ , zatem pozostałe składowe  $y_{k+1,n}, \dots, y_{N,n}$  wektora  $y_{(n)}$  można dobrać tak, aby spełniony był układ równań (44). Zauważmy, że wszystkie współrzędne tak utworzonego wektora  $y_{(n)}$  są dystrybucjami ZERO. Oznaczmy podobnie jak w p.2.3.2:

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B R y_{(n)}(\tau) d\tau \quad (46)$$

Wykorzystując oszacowanie (16) oraz zależność (44) możemy napisać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (I-DR)y_{(n)} - Cx_n \| = \lim_{n \rightarrow \infty} \| Cx_n \| = 0 \quad (47)$$

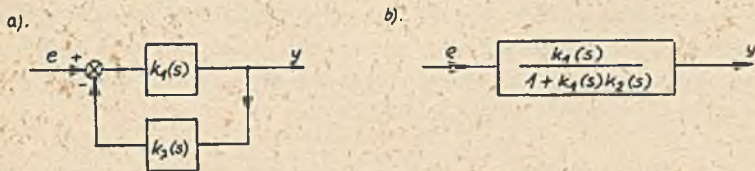
W oparciu o związki (46) oraz (47) można stwierdzić, że dla  $\Delta(\infty) = 0$  układ równań (38), (39) nie posiada jednoznacznego rozwiązania, bowiem dowolna dystrybucja ZERO może stanowić składowe  $y_{1,}, \dots, y_k$  rozwiązania c.n.o.

#### 4. Uwagi końcowe

##### 4.1. Uwaga o warunku stosowalności reguł przekształcania schematów blokowych

Dla modelu przedstawionego na rys. 1 spełniony jest warunek samoistnego wystąpienia na wejściu elementu nieliniowego sygnału "w" o dowolnej postaci dystrybucji ZERO. Powołując się na właściwość dystrybucji ZERO omówioną w p. 2.3.4 możemy stwierdzić, że sygnał wyjściowy  $y(t)$  nie jest w tym modelu określony jednoznacznie.

Zwróćmy uwagę na fakt, że po przekształceniu schematu blokowego do postaci przedstawionej na rys. 2 została już utracona (zamaskowana) infor-



Rys. 8. Przykładowe schematy blokowe układu regulacji:

a) nieuproszczony, b) po uproszczeniu

macja o niebezpieczeństwie wystąpienia dystrybucji ZERO w modelu układu. Gdybyśmy zatem rozpatrywali najprostszy model układu regulacji posiadający pojedynczą pętlę sprzężenia zwrotnego (rys. 8a), to model ten po przekształceniu do postaci uproszczonej (rys. 8b) byłby równoważny pierwotnemu wtedy i tylko wtedy, gdy  $k_1(\infty) \cdot k_2(\infty) \neq -1$ . Przez równoważność rozumiemy tutaj właściwość uzyskiwania na wyjściu obu modeli tej samej odpowiedzi  $y(t)$  przy zadanym wejściu  $e(t)$ . Spełnienie warunku  $\Delta(\infty) \neq 0$  stanowi zatem podstawę do stosowania znanych, podstawowych metod przekształcania schematów blokowych. W tym świetle widoczna staje się potrze-

bs wprowadzenia przedstawionego w p. 3.1 pełnego schematu blokowego jako pewnego pierwotnego modelu układu, w którym nie zostały utracone informacje o możliwości wystąpienia dystrybucji ZERO.

#### 4.2. Uwaga o fenomenie generowania sygnałów o postaci dystrybucji ZERO

Zwróćmy uwagę na charakterystyczną cechę modeli spełniających założenia podanego twierdzenia. Na wyjściu tych szczególnych modeli układów może wianowicie wystąpić sygnał różny od zera nawet przy braku zewnętrznych wymuszeń i zerowych warunkach początkowych. Jest to sytuacja wyjątkowa, bowiem zwykle się uważać, że reakcja danego modelu układu jest określona przez działające na ten układ wymuszenia zewnętrzne oraz warunki początkowe.

#### 4.3. Uwaga o poprawności modelu

Określenie właściwego modelu dla rzeczywistego układu regulacji jest procesem niezwykle ważnym i trudnym. Niewiele istnieje obiektywnych metod stwierdzania przydatności zaproponowanego modelu. Warunek uzyskany w tej pracy stanowi bardzo silne kryterium oceny modelu. Wykrycie w proponowanym modelu możliwości wystąpienia sygnału o dowolnej postaci dystrybucji ZERO pozwala odrzucić ten model, gdyż nie jest możliwe wystąpienie w rzeczywistym układzie sygnałów o nieskończenie dużej częstotliwości. W przypadku stwierdzenia  $\Delta(\infty) = 0$  należy zatem zweryfikować zaproponowany model i uwzględnić na przykład pominięte uprzednio inercje elementów. Nieuwzględnienie warunku występowania w układzie sygnałów o postaci dystrybucji ZERO może prowadzić do fałszywych wniosków. Dla przykładu w pracy [3] omawiającej stabilność liniowych układów wielowymiarowych, zakwalifikowano do stabilnych układ, w którym występują sygnały o dowolnej postaci dystrybucji ZERO ( $\Delta(\infty) = 0$ ).

Składam słowa gorącego podziękowania dla Prof. R. Gessinga za zainteresowanie i twórczą ocenę niniejszej pracy.

#### LITERATURA

- [1] ATHANS M., DETOUZOS M., MASON S., SPANN R.: Systems, Network and Computation Mc Graw-Hill Book Comp.Inc.N.Y. 1974.
- [2] BIESIEKIELSKI W., POPOW E.: Teorija sistiem awtomatlozeskowo riegulirowania Izd.Nauka. Moskwa 1975.
- [3] CHEN C. Stability of Linear Multivariable Feedback Systems Proceedings of the IEEE, vol. 56, No 5, May, 1968.
- [4] CRUZ J. Układy ze sprzężeniem zwrotnym PWN, Warszawa 1977.
- [5] FINDEISEN Wł. Technika regulacji automatycznej PWN, Warszawa 1978.
- [6] KACZOREK T.: Teoria układów regulacji automatycznej WNT, Warszawa 1974.
- [7] KURMAN K.: Teoria regulacji WNT, Warszawa 1975.

- [8] LATARNIK M.: Wykorzystanie pełnego schematu blokowego do określania równania charakterystycznego dla wielowymiarowych, liniowych układów regulacji o stałych skupionych Arch.AiT, T. XXII, z. 4, 1977.
- [9] LATARNIK M.: Warunek konieczny i wystarczający określoności grafu przepływu sygnału PAK, z. 1, Warszawa 1978.
- [10] LIU C., LIU J.: Linear systems analysis Mc Graw-Hill. Book Inc. N.Y. 1975.
- [11] MIKUSIŃSKI J., SIKORSKI R.: Elementarna teoria dystrybucji PWN, Warszawa 1964.
- [12] NIEDERLIŃSKI A.: Układy wielowymiarowe automatyki WNT, Warszawa 1974.
- [13] Poradnik Inżyniera Automatyka pod red. Wł. Findeisena, WNT, Warszawa 1969.
- [14] ROJTENBERG J.: Teoria sterowania PWN, Warszawa 1978.
- [15] TAKAHOSHI Y., RABINS M., AUSLANDER D.: Sterowanie i systemy dynamiczne WNT, Warszawa 1976.
- [16] WĘGRZYŃ S.: Podstawy automatyki PWN, Warszawa 1972.
- [17] WIERZBICKI A.: Modele i wrażliwość układów sterowania WNT, Warszawa 1977.
- [18] ZADEH L., DESOER CH.: Linear system theory Mc Graw-Hill Book Comp.Inc. N.Y. 1963.

ОБОБЩЕННАЯ НУЛЬ ФУНКЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПОСЛЕДСТВИЯ ЕЕ ПОЯВЛЕНИЯ  
В МОДЕЛЯХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе введено понятие обобщенной Нуль функции и обсуждены некоторые ее действительные свойства с точки зрения теории управления. Представлены условия самостоятельного появления сигналов в виде обобщенной Нуль функции в линейных системах управления. Указана непригодность описания с помощью преобразования Лапласа для моделей с сигналами в виде Нуль функции. Результаты этой работы имеют основной характер, в особенности, это касается условия применения известных законов преобразования блок-схем.

ZERO DISTRIBUTION AND SOME CONSEQUENCES OF ITS OCCURANCE IN THE MODELS  
OF CONTROL SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper ZERO distribution has been defined and some its properties important from the control theory point of view have been presented. Conditions of self-contained ZERO-like distribution signals in linear systems have been given. It was shown that the use of Laplace transformation for systems with ZERO distribution signals is unsuitable. All results published here have basic importance. In particular, it refers to conditions of applying some laws of block diagram transformations.