

Ernest Czogała, Józef Drewniak
Jerzy Inhatowicz, Józef Jagielski

GEOMETRYCZNE WŁASNOŚCI ŁAŃCUCHOWYCH FUNKCJI KORELACYJNYCH

Streszczenie. Praca zawiera analizę geometryczną schematu kodowego Freemana [1] służącego do kodowania i przetwarzania informacji o skwantowanych konturach płaskich. W szczególności rozważone są izometrie schematu kodowego i podana jest charakterystyka figur niezmienniczych względem tych izometrii. Końcowe (i zasadnicze) wyniki pracy dotyczą zachowania się funkcji autokorelacyjnej Freemana przy izometrycznych transformacjach konturów oraz charakterystyki tej funkcji dla figur niezmienniczych.

Wstęp

W komputerowej analizie obrazów o nieregularnych konturach, jako cyfrową reprezentację konturu, stosuje się łańcuchy kodowe Freemana [1]. Do zasadniczych metod przetwarzania informacji zawartej w łańcuchu kodowym Freemana należy wyznaczenie funkcji autokorelacyjnej tego łańcucha.

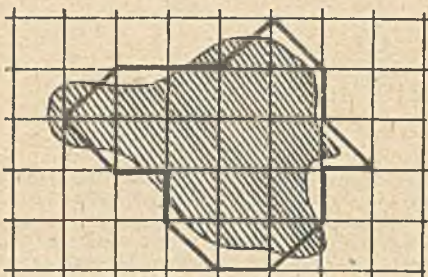
W pracy [2] omówiono trzy typy łańcuchowych funkcji korelacyjnych i przedyskutowano ich niezależność od różnego rodzaju dowolności występujących przy kodowaniu konturów. Z przeprowadzonego tam porównania tych funkcji wynika, że mają jednakowe własności, a różnice ich wartości można pomijać. Zatem w dalszych rozważaniach nad sposobem przetwarzania informacji przez funkcje korelacyjne wystarczy uwzględniać tylko jedną z tych funkcji, a ze względów na przydatność numeryczną i na wygodę w przekształceniach analitycznych - wybieramy do tego funkcję autokorelacyjną Freemana.

Celem tej pracy jest omówienie przydatności łańcuchowych funkcji korelacyjnych do przekazywania informacji o geometrycznych regularnościach zakodowanych konturów. W związku z tym omówimy najpierw przekształcenia geometryczne zachowujące siatkę kodową, następnie odpowiadające im operacje na łańcuchach kodowych, a wreszcie rozważymy zachowanie się funkcji korelacyjnych dla konturów, które nie ulegają zmianie przy podanych przekształceniach.

1. Siatka kodowa i łańcuchy kodowe

Cyfrowe kodowanie konturu odbywa się przy pomocy siatki kwadratowej nałożonej na kontur (rys. 1), przy czym do kodowania służy osiem odcinków

skierowanych, które można rozpatrywać w każdym węźle kraty. Zakładając, że siatka kodowa wyznacza prawoskrętny układ współrzędnych na płaszczyźnie obrazu, numerujemy te odcinki cyframi od 0 do 7, poczynając od osi odciętych, a w kierunku osi rzędnych (rys. 2).



Rys. 1. Kodowanie konturu przy pomocy siatki kwadratowej



Rys. 2. Kierunki kodu Freemana

Zasady wyboru odcinków kodowych konturu są tak sprecyzowane, aby te odcinki dobrze przybliżały segmenty kodowanego konturu wyznaczone przez pola siatki kodowej (por. [1,2]). Odcinki kodowe (lub ich kody cyfrowe) nazywamy ogniwami skwantowanej linii konturu, a ciąg kolejnych ogniw otrzymanych wzdłuż linii konturu nazywamy łańcuchem kodowym tego konturu. Łańcuchy kodowe będziemy zapisywali w postaci:

$$s = a_1 a_2 \dots a_n \quad (1.1)$$

gdzie $0 \leq a_i \leq 7$, $i = 1, 2, \dots, n$, a n jest liczbą ogniw łańcucha, czyli długością łańcucha.

W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że rozpatrywany kontur jest zamknięty (por. [2]), co pozwala na cykliczne przedstawienie łańcucha kodowego bez zakłócenia zawartej w nim informacji o konturze. W szczególności przyjmujemy:

$$a_0 = a_n, \quad a_{i-n} = a_i, \quad a_{n+1} = a_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

Ponadto z chwilą uzyskania łańcucha kodowego danego konturu będziemy abstrahować od rzeczywistego konturu badanego, a ograniczymy się do rozważania skwantowanej linii konturu, jako figury geometrycznej zamkniętej, złożonej z kolejnych odcinków kodowych wyznaczonych przez ogniwa łańcucha kodowego. Dalej słowo kontur będzie oznaczało właśnie tę figurę.

2. Grupy wskaźników z działaniami modulo m

W celu ułatwienia rachunków na łańcuchach kodowych skorzystamy z własności grup skończonych w zbiorze liczb całkowitych, z działaniami modulo m . Działania te polegają na identyfikowaniu wyników zwykłych działań arytm-

metrycznych z resztami otrzymanymi z tych wyników przy dzieleniu przez m . Dla odróżnienia od zwykłych działań arytmetycznych będziemy nad znakiem działania pisać m : $\overset{m}{+}$ - dodawanie modulo m , $\overset{m}{-}$ - odejmowanie modulo m .

Z podanej umowy będziemy w tej pracy korzystać w trzech następujących przypadkach:

- 1° przy działaniach na wskaźnikach łańcucha kodowego o długości n stosujemy dodawanie i odejmowanie modulo n (co jest zgodne z umową (1.2)),
 2° przy działaniach na cyfrach kodowych $0, 1, \dots, 7$ stosujemy dodawanie i odejmowanie modulo 8 w szczególności mamy

$$\overset{8}{8} k = 8 - k, \quad k = 1, 2, \dots, 7, \quad \overset{8}{8} 0 = 0$$

- 3° przy działaniach na wskaźnikach izometrii (symetrie i obroty) na płaszczyźnie stosujemy dodawanie i odejmowanie modulo n .

3. Przekształcenia geometryczne siatki kodowej

Założmy, że siatka kodowa pokrywa całą płaszczyznę i rozważmy jakie przekształcenia geometryczne nie zmieniają rozkładu węzłów siatki kodowej na płaszczyźnie, czyli nie zmieniają położenia odcinków kodowych. Analizę przeprowadzimy globalnie dla całej siatki kodowej i lokalnie dla schematu kodowego w ustalonym węźle siatki.

3.1. Izometrie siatki kodowej

Przekształcenia zachowujące konfigurację siatki kodowej podzielimy na cztery grupy:

- symetrie osiowe (względem linii siatki, względem przekątnych kwadratu siatki oraz względem prostych symetrycznych dla boków kwadratu siatki),
- symetrie środkowe (o środkach w punktach przecięcia się osi symetrii siatki: węzły siatki, środki boków kwadratów siatki i środki symetrii kwadratów siatki),
- obroty o wielokrotności kąta prostego (wokół środków symetrii siatki),
- przesunięcie równoległe (wzdłuż wektorów, których końce są węzłami siatki).

3.2. Izometrie schematu kodowego

Traktując schemat kodowy z rys. 2 jako figurę geometryczną nałożoną na siatkę kodową w ustalonym węźle, rozważymy teraz, które z podanych izometrii nie zmieniają położenia tej figury. Łatwo zauważyć, że musimy pominąć przesunięcia równoległe (zawsze zmieniają położenie) oraz te symetrie i obroty, których punkty stałe nie leżały w węzłach siatki (wszystkie izometrie schematu kodowego mają punkt stały w środkowym węźle kraty). Zatem pozostają trzy grupy przekształceń:

- a) symetrie osiowe (względem prostych wyznaczonych przez odcinki kodowe o numerach 0,1,2,3),
- b) symetrie środkowe (względem środka geometrycznego schematu),
- c) obroty o wielokrotności kąta prostego (wokół środka geometrycznego schematu).

Wyznaczonym izometriom schematu kodowego odpowiadają transformacje łańcuchów kodowych, będące przedmiotem dalszych rozważań.

4. Przekształcenia "geometryczne" łańcucha kodowego

Omówimy teraz transformacje łańcucha kodowego wynikające z przekształceń izometrycznych schematu kodowego, zachowujące dla tych transformacji terminologię geometryczną. Okazuje się (lematy 1 i 2), że takie same transformacje łańcucha kodowego wynikają z zastosowania dowolnych przekształceń izometrycznych siatki kodowej opisanych w punkcie 3.1 a, b i c.

4.1. Odbicie symetryczne

Schemat kodowy posiada cztery osie symetrii wyznaczone przez odcinki kodowe o numerach 0,1,2 i 3. Będziemy zatem mówić o p -tej symetrii osiowej dla $p = 0,1,2,3$, którą oznaczymy przez S_p . Łatwo sprawdzić (tabela z ośmiu przypadków), że przekształcenie cyfr kodowych przez wybrane symetrie osiowe dokonuje się wg wzoru (por. [1]):

$$S_p(k) = 2p \stackrel{8}{-} k, \quad p = 0,1,2,3, \quad k = 0,1,\dots,7 \quad (4.1)$$

Rozważmy teraz łańcuch kodowy (1.1) i odpowiadający mu obraz geometryczny - kontur na płaszczyźnie siatki kodowej.

Lemat 1

Jeżeli kontur na płaszczyźnie siatki kodowej przekształcimy przez symetrię S dowolną z symetrii osiowych 3.1.a, której oś symetrii jest równoległa do odcinków kodowych o numerze p , $0 \leq p \leq 3$, to łańcuch kodowy (1.1) dla tego konturu zostanie przekształcony wg wzoru

$$S(a) = b = b_1 \dots b_n$$

gdzie

$$b_i = S_p(a_i) = 2p \stackrel{8}{-} a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Dowód

Ustalmy wskaźnik i , $0 \leq i \leq n$ i rozważmy schemat kodowy wyznaczający ogniwo a_i . Przez początek odcinka kodowego a_i przeprowadzimy prostą równoległą do osi danej symetrii S . Otrzymamy w ten sposób oś symetrii S_p ustalonego schematu kodowego. Ponieważ złożenie symetrii osiowych o osiach równoległych jest przeunięciem równoległym, więc transformacja

$$P = S \circ S_p$$

jest przesunięciem równoległym. Równocześnie wiadomo, że symetrie osiowe są

$$S_p \circ S_p = I$$

(I odwzorowanie tożsamościowe), skąd

$$P \circ S_p = S \circ S_p \circ S_p = S \circ I = S$$

czyli

$$S = P \circ S_p$$

Zatem symetria S jest złożeniem symetrii S_p i przesunięcia równoległego P , a ponieważ przesunięcie równoległe nie zmienia kierunku (numeraacji) odcinków w schemacie kodowym, więc kod odcinka $b_i = S(a_i)$ pokrywa się z kodem odcinka $S_p(a_i)$. To samo rozumowanie można powtórzyć dla wszystkich ogniw łańcucha a , stąd, zgodnie z (4.1), otrzymujemy tezę (4.2)

4.2. Obrót o wielokrotność kąta prostego

Ze względu na cykliczność obrotu wystarczy wyróżnić cztery pierwsze wielokrotności kąta prostego, przy czym obrót o kąt pełny jest tożsamością I równoważną z obrotem o kąt zerowy. Zatem podobnie jak dla symetrii otrzymamy cztery różne obroty R_p dla $p = 0, 1, 2, 3$. Ponieważ obrót schematu kodowego powoduje cykliczne przenumarowanie odcinków kodowych, więc przekształcenie cyfr kodowych przy obrotach dokonuje się według wzoru (por. [1]):

$$R_p(k) = 2p + k, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad k = 0, \dots, 7 \quad (4.3)$$

Podobną zależność uzyskamy przy przekształceniu całych łańcuchów kodowych.

Lemat 2

Jeżeli kontur na płaszczyźnie siatki kodowej przekształcimy przez dowolny obrót R o wielokrotność p kąta prostego wokół dowolnego środka symetrii 3.1.b siatki kodowej, to łańcuch kodowy (1.1) dla tego konturu zostanie przekształcony według wzoru:

$$R(a) = c = c_1 \dots c_n \quad (4.4)$$

gdzie

$$c_i = R_p(a_i) = 2p + a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.5)$$

Dowód

Wiadomo, że obrót o kąt 2α na płaszczyźnie jest złożeniem dwóch symetrii osiowych, o osiach przecinających się pod kątem w środku obrotu (por. [3]). Dlatego dany obrót R można przedstawić jako złożenie

$$R = S \circ T \quad (4.6)$$

gdzie S i T są symetrami o osiach przecinających się w środku obrotu, przy czym możemy założyć, że oś symetrii T jest równoległa do osi odciętych (kierunek O) i wtedy oś symetrii S będzie miała kierunek p (kąt między osiami wyniesie $p \cdot 45^\circ$, co odpowiada obrotowi o p kątów prostych).

Oznaczmy teraz

$$b = T(a) = b_1 \dots b_n, \quad c = S(b) = c_1 \dots c_n \quad (4.7)$$

i skorzystamy dwukrotnie z lematu 1, kolejno dla symetrii T i S . Mamy

$$b_1 = T(a_1) = S_0(a_1) = \overset{8}{S} a_1$$

$$c_1 = S(b_1) = S_p(b_1) = 2p \overset{8}{S} b_1$$

czyli

$$c_1 = 2p \overset{8}{S} (\overset{8}{S} a_1) = 2p \overset{8}{\ddagger} a_1$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$. To przy oznaczeniach (4.6) i (4.7) jest równoważne z (4.4) i (4.5), czyli lemat jest wykazany.

4.3. Odbicie przez środek symetrii (inwersja)

Symetria środkowa jest równoważna z obrotem o 180° , a zatem odpowiednie przekształcenie schematu kodowego będziemy oznaczać przez R_2 , czyli inwersja przekształca cyfry kodowe według wzoru (por. [1]):

$$R_2(k) = 4 + k, \quad k = 0, 1, \dots, 7 \quad (4.8)$$

Bezpośrednio z lematu 2 otrzymujemy lemat 3.

Lemat 3

Jeżeli kontur na płaszczyźnie siatki kodowej przekształcimy przez dowolną symetrię środkową 3.1.b, to łańcuch kodowy (1.1) tego konturu zostanie przekształcony według wzoru:

$$R_2(a_1) = \overset{8}{\ddagger} a_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

4.4. Składanie izometrii

Przy składaniu izometrii siatki kodowej opisanych w 3.1 otrzymujemy znowu jedną z tych izometrii (por. [3]). Zgodnie z lematami 1-3, składanie tych izometrii przy przekształcaniu łańcuchów kodowych można opisać przy pomocy wyróżnionej w 3.2 grupy izometrii schematu kodowego. Opiszemy teraz najważniejsze przypadki składania tych izometrii korzystając z umowy podanej w 2.2^o.

Lemat 4

Składanie izometrii schematu kodowego spełnia następujące zależności:

$$S_1 \circ S_j = R_1 \overset{4}{\underline{j}} \quad (4.10)$$

$$R_1 \circ R_j = R_j \circ R_1 = R_1 \overset{4}{\underline{j}} \quad (4.11)$$

$$R_j \circ S_1 = R_j \circ S_1 = S_1 \overset{4}{\underline{j}} \quad (4.12)$$

$$S_1 \circ R_j = S_1 \overset{4}{\underline{j}} \quad (4.13)$$

dla $i, j = 0, 1, 2, 3$. W szczególności mamy

$$R_{i+1}^4 = R_1 \cdot R_1, \quad S_{i+1}^4 = R_1 \circ S_i \quad (4.14)$$

$$S_1 \circ S_i = I, \quad R_2 \circ R_2 = I, \quad S_1 \circ R_1 = S_0 \quad (4.15)$$

dla $i = 0, 1, 2, 3$.

Dowód

Ustalmy $k, 0 \leq k \leq 7$. Skorzystamy z zależności (4.1) i (4.3), aby ustalić wartość złożenia (4.10) - (4.12) dla odcinka kodowego o numerze k . Mamy

$$\begin{aligned} S_1(S_j(k)) &= S_1(2j \stackrel{8}{\uparrow} k) = 2i \stackrel{8}{\uparrow} (2j \stackrel{8}{\uparrow} k) = \\ &= (2i \stackrel{8}{\uparrow} 2j) \stackrel{8}{\uparrow} k = 2(i \stackrel{4}{\uparrow} j) \stackrel{8}{\uparrow} k = R_{i \stackrel{4}{\uparrow} j}(k) \end{aligned}$$

co dowodzi (4.10). Podobnie

$$\begin{aligned} R_1(R_j(k)) &= R_1(2j \stackrel{8}{\uparrow} k) = 2i \stackrel{8}{\uparrow} 2j \stackrel{8}{\uparrow} k = 2(i \stackrel{4}{\uparrow} j) \stackrel{8}{\uparrow} k = \\ &= R_{i \stackrel{4}{\uparrow} j}(k) = R_j(R_1(k)) \end{aligned}$$

co dowodzi (4.11). Wreszcie

$$R_1(S_1(k)) = 2j \stackrel{8}{\uparrow} 2i \stackrel{8}{\uparrow} k = 2(i+j) \stackrel{8}{\uparrow} k = S_{i \stackrel{4}{\uparrow} j}(k)$$

$$S_1(R_j(k)) = 2i \stackrel{8}{\uparrow} (2j \stackrel{8}{\uparrow} k) = 2(i \stackrel{4}{\uparrow} j) \stackrel{8}{\uparrow} k = S_{i \stackrel{4}{\uparrow} j}(k)$$

skąd mamy (4.12) i (4.13). Przyjmując teraz $j=1$ w (4.11) i w (4.12) otrzymujemy (4.13). Podobnie dla $j=i$ w (4.10) i w (4.13) oraz dla $j=i=2$ w (4.11) otrzymujemy (4.15), co kończy dowód lematu.

5. Kontury regularne

Rozważmy teraz kontury, których położenie nie ulega zmianie przy przekształceniu przez odpowiednie izometrie siatki kodowej. Oczywiście mamy na myśli kontury zamknięte zbudowane z odcinków kodowych (rys. 2), przy czym kolejne wierzchołki konturu leżą w węzłach siatki kodowej. Zwrot odcinków kodowych w konturze traktujemy nie jako element geometrycznego kształtu konturu, lecz jako sposób orientacji konturu przez odwzorowanie na łańcuch kodowy. Tę specyfikę rozważanych konturów będziemy podkreślać przez używanie zwrotu "kontur na płaszczyźnie siatki kodowej".

Definicja 1

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej nazywamy regularnym, gdy istnieje nietożsamościowa izometria siatki kodowej, która wierzchołki konturu przeprowadza w wierzchołki konturu (i boki konturu w boki konturu), przy czym przez wierzchołki konturu rozumiemy wszystkie węzły siatki kodowej, przez które przebiega linia konturu.

Definicja ta nie obejmuje typowych figur regularnych na płaszczyźnie jak trójkąty czy sześciokąty równoboczne, a przynajmniej ich regularność może być sklasyfikowana tylko częściowo, gdyż wśród izometrii siatki kodowej nie ma pary symetrii osiowych, których osie tworzą kąty 60° czy 120° . Natomiast figury objęte definicją 1 można podzielić na 5 grup ze względu na rodzaj występującej regularności: jedna oś symetrii, środek symetrii, dwie prostopadłe osie symetrii, środek obrotu o kąt prosty i dwie osie symetrii przecinające się pod kątem 45° . Z klasyfikacji izometrii siatki kodowej w 3.1 i z przedstawionych dalej rezultatów (twierdzenie 5) wynika, że są to wszystkie możliwe rodzaje konturów regularnych w sensie definicji 1.

W kolejnych twierdzeniach podamy teraz charakteryzację poszczególnych grup konturów regularnych, charakteryzację przy pomocy rozważonych wyżej (punkt 4) transformacji łańcuchów kodowych konturów.

Twierdzenie 1

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej posiada oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby p i s , $0 < p \leq 3$, $0 < s \leq n$, że ogniwa łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu spełniają zależność

$$a_{n-1} = S_p(R_2(a_{s+1})), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.1)$$

Dowód I

Założmy najpierw, że kontur posiada oś symetrii. Symetria względem tej osi przeprowadza węzły siatki kodowej w węzły siatki kodowej, a zatem jest to jedna z osi symetrii siatki kodowej. Zgodnie z lematem 1 istnieje więc taka liczba p , $0 < p \leq 3$, że S_p jest transformacją łańcucha kodowego przy odbiciu symetrycznym względem osi symetrii konturu.

Każdy odcinek konturu ma swój symetryczny odpowiednik względem osi symetrii konturu. Niech zatem w łańcuchu kodowym (1.1) dla tego konturu, s będzie numerem ogniwa, któremu w tej symetrii odpowiada ogniwo $a_0 = a_n$.

Ponieważ symetria S_p zmienia orientację łańcucha, więc obraz symetryczny ogniwa a_s ma kierunek przeciwny niż ogniwo a_n . Dlatego równość otrzymamy dopiero po dokonaniu inwersji R_2 jednego z tych ogniw, skąd mamy

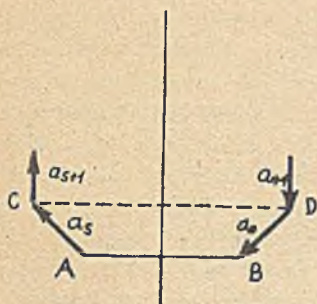
$$a_n = S_p(R_2(a_s))$$

czyli (5.1) dla $i=0$. Oczywiście ogniwo następujące w łańcuchu (1.1) po a_s będzie spełniało podobną zależność z ogniwnem poprzedzającym a_n , bo odpowiednie odcinki konturu są wzajemnie symetryczne, a zatem

$$a_{n-1} = S_p(R_2(a_{s+1}))$$

czyli mamy (5.1) dla $i=1$. W ten sposób możemy obejść cały kontur, otrzymując kolejno zależności (5.1) dla $i = 0, 1, \dots, n$.

II. Założmy teraz, że łańcuch kodowy (1.1) dla pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej spełnia zależności (5.1) dla pewnych s i p , $0 < s \leq n$



Rys. 3. Kontur z osią symetrii

Wzłozna prosta jest równocześnie symetralną odcinka łączącego punkty C i D, a zatem poprzednie rozumowanie możemy powtórzyć dla ogniów a_{s+1} i a_{n-1} (wnioski pozostają słuszne, gdy odcinki AB lub CD redukują się do punktu). Dobierając kolejne pary ogniów z zależności (5.1) dla $i = 0, 1, \dots, n$, możemy w ten sposób pokazać, że odpowiednie pary odcinków konturu są wzajemnie symetryczne względem wybranej prostej. Zatem kontur posiada oś symetrii w kierunku p , co należało udowodnić.

Twierdzenie 2

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej posiada środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy długość łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu wyraża się liczbą parzystą: $n = 2m$ i ogniwa tego łańcucha spełniają zależność

$$a_{m+1} = R_2(a_1), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.2)$$

Dowód

Jeżeli kontur posiada środek symetrii, to każdemu ogniwu łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu odpowiada w symetrii środkowej ogniwo równoległe, lecz przeciwnie skierowane. Niech a_m oznacza ogniwo symetryczne z $a_0 = a_n$, czyli

$$a_m = R_2(a_0)$$

co oznacza spełnienie (5.2) dla $i=0$. To samo będzie dotyczyło ogniów sąsiednich łańcucha kodowego, ogniów następujących po a_m i po a_0 , skąd

$$a_{m+1} = R_2(a_1)$$

bo symetria środkowa zachowuje orientację łańcucha, czyli mamy zależność (5.2) dla $i=1$. Obchodząc kontur przez zwiększanie wskaźnika i , oraz przez dobieranie par odcinków symetrycznych, otrzymamy kolejno wszystkie zależności (5.2).

W szczególności mamy

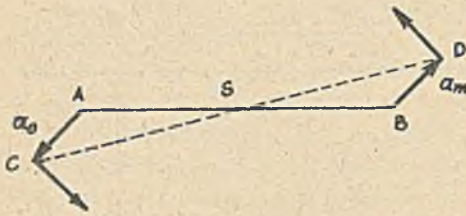
$$a_{2m} = R_2(a_m)$$

$0 \leq p \leq 3$. Rozważmy odcinki o ogniwach kodowych a_n i a_s . Ponieważ R_2 i S_p są izometriami, więc odcinki te są jednakowej długości. Połączmy teraz odcinkiem węzeł siatki, z którego wychodzi wektor a_s (punkt A), z węzłem siatki, w którym kończy się wektor a_n (punkt B), a przez środek tego odcinka poprowadźmy prostą w kierunku p (rys. 3).

Zgodnie z (5.1) symetria S_p względem tej prostej przeprowadza punkt A w punkt B, a zatem prosta ta jest symetralną odcinka łączącego punkty A i B. Równocześnie odbicie symetryczne końca wektora a_s (punkt C) jest początkiem wektora a_n (punkt D), więc wy-

czyli ogniwo a_{2m} jest symetryczne z ogniwem a_m (podobnie jak ogniwo a_n), skąd $n = 2m$, bo symetria jest różnowartościowa. Dlatego łańcuch ma parzystą ilość ogniw.

II. Przypuśćmy teraz, że łańcuch kodowy (1.1) dla pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej ma $n = 2m$ ogniw, które spełniają zależności (5.2). Niech S będzie środkiem odcinka łączącego początek ogniwa a_0 (węzeł A) z początkiem ogniwa a_m (węzeł B). Zatem węzły A i B są symetryczne względem środka S (rys.4).



Rys. 4. Kontur ze środkiem symetrii

Każdy wektor wychodzący z punktu A ma obraz symetryczny względem środka S , równoległy i przeciwnie skierowany, wychodzący z punktu B. Ponieważ wektory a_0 i a_m wychodzą odpowiednio z A i B oraz są równoległe i przeciwnie skierowane w wyniku obrotu o 180° , zgodnie z (5.2), zatem są to wektory symetryczne względem środka S . Stąd S jest także środkiem odcinka łączącego koniec wektora a_0 (węzeł C) z końcem wektora a_m (węzeł D) i rozumowanie można powtórzyć dla ogniw a_1 i a_{m+1} . W ten sposób punkt S jest środkiem symetrii dla kolejnych par ogniw, a ponieważ łańcuch ma parzystą ilość ogniw, więc w ten sposób obejdziemy cały kontur. Dlatego kontur ma środek symetrii, a to należało udowodnić.

Twierdzenie 3

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej ma dwie prostopadłe osie symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy długość łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu wyraża się liczbą parzystą: $n = 2m$ i istnieją takie liczby s i p , $0 \leq s \leq n$, $0 \leq p \leq 3$, że ogniwa tego łańcucha spełniają zależności (5.1) i (5.2).

W szczególności, dla konturu o dwóch prostopadłych osiach symetrii, mamy

$$a_{n-i} = A_p(a_{m+s+i}), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Dowód

I. Jeżeli kontur ma dwie prostopadłe osie symetrii, to zgodnie z twierdzeniem 1, istnieją takie liczby s i p , $0 \leq s \leq n$, $0 \leq p \leq 3$, że jedna z tych osi symetrii ma kierunek p i zachodzą zależności (5.1), a druga oś, oś prostopadła, ma kierunek $p + 2$.

Równocześnie, złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach prostopadłych jest symetrią środkową o środku w punkcie przecięcia się tych osi. Wobec tego możemy korzystać także z twierdzenia 2, czyli $n = 2m$ i zachodzą zależności (5.2). Łącząc zależności (5.1) i (5.2) otrzymujemy bezpośrednio (5.3).

II. Załóżmy teraz, że łańcuch kodowy (1.1) dla pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej ma długość $n = 2m$ spełnia zależność (5.1) i (5.2) dla pewnych s i p , $0 \leq s \leq n$, $0 \leq p \leq 3$. Stąd na podstawie twierdzenia 1 kontur posiada oś symetrii w kierunku p . Równocześnie, na podstawie zależności (5.3) wynikającej z (5.1) i (5.2), możemy napisać (zob. lemat 4)

$$a_{n-i} = S_p(R_2(R_2(a_{m+s+i}))) = S_{p+2}(R_2(a_{m+s+i})) = S_{p+2}(R_2(a_{m+s+i}))$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$, czyli zachodzi odpowiednik zależności (5.1) z $p_1 = p+2$ i $s_1 = s + m$. Zatem na podstawie twierdzenia 1, kontur posiada oś symetrii w kierunku $p + 2$, który jest prostopadły do kierunku p . Dlatego kontur posiada dwie prostopadłe osie symetrii, co należało udowodnić.

Twierdzenie 4

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej ma środek obrotu o kąt prosty wtedy i tylko wtedy, gdy długość łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu wyraża się liczbą podzielną przez $4: n = 4q$ i ogniwa tego łańcucha spełniają zależność

$$a_{q+i} = R_1(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.4)$$

Dowód

I. Załóżmy, że kontur nie ulega zmianie przy obrocie o kąt prosty i niech a_q oznacza ogniwo łańcucha kodowego, na które przez transformację R_1 przechodzi ogniwo $a_0 = a_n$. Wówczas

$$a_q = R_1(a_0)$$

czyli zachodzi (5.4) dla $i=0$. Ponieważ obrót nie zmienia orientacji łańcucha, więc ogniwo następujące po a_0 przechodzi na ogniwo następujące po a_q , a zatem

$$a_{q+1} = R_1(a_1)$$

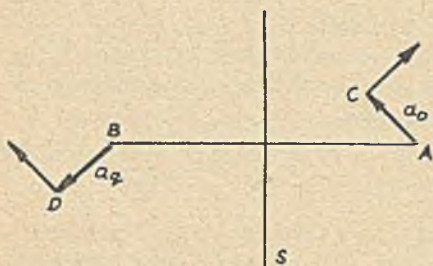
czyli zachodzi (5.4) dla $i=1$. Znajdując w ten sposób obrazy kolejnych ogniw, otrzymujemy wszystkie zależności (5.4). W szczególności mamy (por. lemat 4)

$$a_{4q} = R_1(a_{3q}) = R_2(a_{2q}) = R_3(a_q) = R_0(a_0) = a_0 = a_n$$

czyli po wykonaniu pełnego obrotu otrzymujemy zależność $n = 4q$, co oznacza, że ilość ogniw łańcucha jest podzielna przez 4.

II. Załóżmy teraz, że łańcuch kodowy (1.1) dla pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej ma $n = 4q$ ogniw, które spełniają zależności (5.4). Niech A i B oznaczają węzły siatki, które są początkami wektorów wyznaczonych przez ogniwa a_0 i a_q . Na symetralnej odcinka AB znajdujemy taki punkt S , że węzeł B jest obrazem węzła A w wyniku obrotu (dodatniego) o kąt prosty wokół punktu S (rys. 5).

Zgodnie z (5.4), ogniwo a_q jest obrazem ogniwa a_0 przy obrocie o kąt prosty wokół S . Zatem koniec C wektora a_0 przejdzie przez ten obrót w koniec D wektora a_q i rozumowanie możemy powtórzyć dla ogniw a_1 i a_{q+1} .



Rys. 5. Kontur nie ulegający zmianie przy obrocie o kąt prosty

W ten sposób kolejne odcinki konturu przechodzą przy obrocie o kąt prosty w inne odcinki konturu, a zatem kontur nie ulega zmianie przy obrocie o kąt prosty, co należało pokazać.

Twierdzenie 5

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej ma dwie osie symetrii przecinające się pod kątem 45° wtedy i tylko wtedy, gdy długość łańcucha kodowego (1.1) dla tego konturu wyraża się liczbą podzielną przez $4:n = 4q$ i istnieją takie liczby p i s , $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq s \leq n$, że ogniwa tego łańcucha spełniają zależności (5.1) i (5.4).

W szczególności kontur o osiach symetrii przecinających się pod kątem 45° ma cztery osie symetrii o kierunkach 0, 1, 2 i 3 oraz środek symetrii, który jest równocześnie środkiem obrotu o kąt prosty, a zatem ma wszystkie rodzaje regularności konturu na płaszczyźnie siatki kodowej. Łańcuch kodowy tego konturu spełnia zależność

$$a_{n-i} = S_0(R_1(a_{q+s+1})), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5.5)$$

Dowód

I. Jeżeli kontur ma dwie osie symetrii tworzące kąt 45° , to zgodnie z twierdzeniem 1 istnieją takie liczby p i s , $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq s \leq n$, że jedna z tych osi ma kierunek p i zachodzą zależności (5.1), a druga oś ma kierunek $p+1$. Ponieważ złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach tworzących kąt 45° jest obrotem o kąt prosty (zob. [3]), więc kontur nie ulega zmianie przy obrotach o kąt prosty i zgodnie z twierdzeniem 4 łańcuch kodowy tego konturu ma długość $n = 4q$ i zachodzą zależności (5.4).

W szczególności kontur ma środek symetrii (środek obrotu o kąt 180°), a zgodnie z lematem 4, przez składanie symetrii S_p z obrotami R_1, R_2 i R_3 , uzyskamy wszystkie symetrie osiowe schematu kodowego, czyli kontur ma osie symetrii w kierunkach 0, 1, 2 i 3. Można zatem przyjąć $p=0$ i zgodnie z (5.1) i (5.4) otrzymujemy

$$a_{n-i} = S_0(R_2(a_{s+1})) = S_0(R_1(R_1(a_{s+1}))) = S_0(R_1(a_{q+s+1}))$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$, czyli zachodzi (5.5).

II. Załóżmy teraz, że łańcuch kodowy (1.1) pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej ma długość $n = 4q$ i spełnia zależności (5.1), (5.4) dla pewnych p i s , $0 \leq p \leq 3$, $0 \leq s \leq n$. Na podstawie twierdzenia 1 kontur ma więc oś symetrii w kierunku p , a na podstawie twierdzenia 4 ma środek obrotu o kąt prosty, skąd, podobnie jak w pierwszej części dowodu, wynika istnienie wszystkich czterech osi symetrii możliwych na płaszczyźnie.

czyźnie siatki kodowej. Dlatego kontur ma dwie osie symetrii tworzące kąt 45° , co należało wykazać.

Z dowodów twierdzeń 1-5 wynika pewna hierarchia regularności konturów na płaszczyźnie siatki kodowej. Najprostszym rodzajem izometrii są symetrie osiowe, z których przez złożenia możemy uzyskać symetrię środkową i obrót. Przy tym kontur może mieć jedną, dwie lub cztery osie symetrii. Środek symetrii i środek obrotu mogą występować także niezależnie od osi symetrii, przy czym środek obrotu jest szczególnym przypadkiem środka symetrii. To wyczerpuje wszystkie rodzaje regularności konturów na płaszczyźnie siatki kodowej.

6. Funkcja autokorelacyjna Freemana

Dotychczasowe rozważania geometryczne dotyczące łańcuchów kodowych dają podstawę do podsumowania własności łańcuchowych funkcji korelacyjnych, związanych z izometriami siatki kodowej. Posłużymy się przy tym funkcją

$$K(a, j) = K_{aa}^P(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{i+j}), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (6.1)$$

zaproponowaną przez Freemana [1] dla przetwarzania informacji zawartych w łańcuchu kodowym (1.1).

Do typowych własności łańcuchowych funkcji korelacyjnych należą (por. [2]): symetria wykresu funkcji korelacyjnej (oś symetrii), niezależność funkcji korelacyjnej od cyklicznych przesunięć i od zmiany orientacji w łańcuchach kodowych oraz wzajemna charakteryzacja okresowości funkcji korelacyjnej przez okresowość łańcucha kodowego. Teraz pokażemy dalsze własności tych funkcji, a mianowicie niezależność od przekształceń izometrycznych konturów na siatce kodowej oraz charakteryzację dla pewnych konturów regularnych. Rozważania podamy tylko dla funkcji (6.1).

Twierdzenie 6

Łańcuchowa funkcja korelacyjna (6.1) nie ulega zmianie przy dowolnych przekształceniach izometrycznych konturu na płaszczyźnie siatki kodowej (bierzemy pod uwagę wszystkie te izometrie płaszczyzny przez które obraz konturu wpisanego w siatkę kodową jest też wpisany w siatkę kodową, czyli izometrie 3.1).

Dowód

Teza twierdzenia jest oczywista dla przesunięć równoległych 3.1.d płaszczyzny siatki kodowej, bo przesunięcia te nie zmieniają łańcucha kodowego. Pozostałe przekształcenia izometryczne 3.1.a - 3.1.c dokonują transformacji łańcucha kodowego opisanych w lematy 1-3. Zgodnie z tymi lematami wystarczy rozważyć obrazy łańcucha kodowego przez symetrie osiowe S_p i przez obroty R_p dla $p = 0, 1, 2$ i 3.

W przypadku symetrii osiowych, zgodnie z lematem 1 możemy napisać

$$\begin{aligned} K(S_p(a), j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (S_p(a_i) - S_p(a_{i+j})) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (2p \frac{8}{4} a_i - (2p \frac{8}{4} a_{i+j})) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (a_{i+j} - a_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}) = K(a, j) \end{aligned}$$

dla $j = 0, 1, \dots, n$, $p = 0, 1, 2, 3$, gdzie skorzystaliśmy z parzystości i z okresowości funkcji cosinus.

Podobnie dla obrotów o wielokrotność kąta prostego, zgodnie z lematem 2 możemy napisać

$$\begin{aligned} K(R_p(a), j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (R_p(a_i) - R_p(a_{i+j})) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (2p \frac{8}{4} a_i - (2p \frac{8}{4} a_{i+j})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4} (a_i - a_{i+j}) = K(a, j) \end{aligned}$$

dla $j = 0, 1, \dots, n$, $p = 0, 1, 2, 3$.

Z podanych przeliczeń wynika, że symetrie osiowe i obroty o wielokrotność kąta prostego (a zatem i symetrie środkowe) nie zmieniają wartości łańcuchowej funkcji korelacyjnej (6.1), co kończy dowód twierdzenia.

Hipoteza mówiąca, że funkcją korelacyjną dla konturów regularnych daje się odróżnić od funkcji korelacyjnej w przypadku innych konturów została potwierdzona tylko częściowo, a mianowicie jest ona prawdziwa dla konturów posiadających środek symetrii, czyli dla czterech z pięciu rozważanych grup konturów regularnych. Na trudności związane z podobną charakteryzacją w przypadku konturu z jedną osią symetrii wskazuje przykład podany w zakończeniu pracy (punkt 7).

Definicja 2

Mówimy, że funkcja korelacyjna (6.1) ma środek symetrii wykresu (jako funkcja dyskretna określona w zbiorze liczb całkowitych), gdy okres tej funkcji jest liczbą parzystą: $n = 2m$, a część wykresu dyskretnego tej funkcji dla $j = 0, 1, \dots, m$ ma środek symetrii leżący na osi odciętych, czyli

$$K(a, m-j) = -K(a, j), \quad j = 0, 1, \dots, m \quad (6.2)$$

Funkcje objęte tą definicją, traktowane jako funkcje okresowe na całym zbiorze liczb całkowitych, mają po dwa środki symetrii w każdym cyklu wykresu. Gdyby okres nie był liczbą parzystą, to symetria tego rodzaju nie dałaby się zapisać ze względu na nieciągłość wykresu funkcji. Własność wykresu funkcji korelacyjnej opisana w definicji 2 jest cechą charakterystyczną, która odróżnia wykresy funkcji korelacyjnych konturów regularnych od wykresów funkcji korelacyjnych dla konturów nieregularnych z podanymi wyżej ograniczeniami.

Twierdzenie 7

Kontur na płaszczyźnie siatki kodowej ma środek symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja korelacyjna (6.1) dla tego konturu ma środek symetrii wykresu.

Dowód

I. Załóżmy najpierw, że kontur ma środek symetrii. Zgodnie z twierdzeniem 2, łańcuch kodowy tego konturu ma długość $n = 2m$ i zachodzą zależności (5.2). Wykazanie symetrii wykresu funkcji (6.1) sprowadza się więc do sprawdzenia zależności (6.2) dla ustalonego m , jako połowy długości łańcucha korelacyjnego ustalonego konturu. Zgodnie z (6.1) i (5.2) możemy napisać

$$\begin{aligned} K(a, n-j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+1+i-j}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_i - R_2(a_{1+i-j})) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_i - (4 \frac{8}{4} a_{1+i-j})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(\pi - \frac{\pi}{4}(a_{1+i-j} - a_i)) = \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_{1+i-j} - a_i) = -\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^j \cos \frac{\pi}{4}(a_{1+i-j} - a_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=j+1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_{1+i-j} - a_i) \right) \end{aligned}$$

dla $j = 0, 1, \dots, m$ (sumy o pustym zbiorze wskaźników traktujemy jako równe zeru).

Dokonując zamiany zmiennej sumacyjnej przez podstawienie $k = i - j$ (modulo n), mamy

$$K(a, m-j) = -\frac{1}{n} \left(\sum_{k=n-j+1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_k - a_{k+j}) + \sum_{k=1}^{n-j} \cos \frac{\pi}{4}(a_k - a_{k+j}) \right) = -K(a, j),$$

czyli zachodzi zależność (6.2) dla dowolnych j , $0 \leq j \leq m$.

II. Załóżmy teraz, że funkcja korelacyjna (6.1) dla pewnego konturu na płaszczyźnie siatki kodowej ma środek symetrii, czyli $n = 2m$ i zachodzi (6.2), gdzie a jest łańcuchem kodowym (1.1) dla tego konturu. Rozważmy zależność (6.2) dla $j = 0$, czyli

$$K(a, m) = K(a, 0) \quad x = -1$$

Zgodnie z (6.1) oznacza to zależność

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+1+i}) &= \frac{1}{n} \left(n + \sum_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+1+i}) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+1+i})) = 0 \end{aligned}$$

gdzie wszystkie składniki ostatniej sumy są nieujemne. Zatem

$$\cos \frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+1+i}) = -1$$

albo

$$\frac{\pi}{4}(a_i - a_{m+i}) = \pi \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

czyli

$$a_{m+i} - a_i = \frac{8}{4} = 4 \quad (\text{modulo } 8)$$

dla $i = 0, 1, \dots, n$ (0 i n utożsamiamy modulo n). Na podstawie lematu 3 możemy teraz napisać

$$a_{m+i} = 4 \frac{8}{4} a_i = R_2(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

czyli zachodzi (5.2), gdzie m jest połową długości łańcucha kodowego konturu. Dlatego na podstawie twierdzenia 2, kontur ten ma środek symetrii, co należało wykazać.

7. Uwagi końcowe i przykłady

Przedstawiona praca, będąc pośrednią kontynuacją prac [1] i [2], ma jednak zupełnie odmienny charakter. Jedynie twierdzenie 6 można traktować jako uzupełnienie listy niezmienniczych własności funkcji korelacyjnych z pracy [2], natomiast większość rozważań i wyników pracy dotyczy konturów regularnych, podczas gdy w pracach poprzednich jednym z głównych założeń było założenie o nieregularności konturu. Mimo względnej obfitości i doskonałości otrzymanych wyników (twierdzenia 1-5 i 7 podają warunki konieczne i wystarczające) praca odpowiada tylko na część pytań jakie można postawić na temat przekształceń izometrycznych i konturów regularnych na płaszczyźnie siatki kodowej. Przedmiotem dalszych rozważań w tym zakresie mogą być następujące zagadnienia:

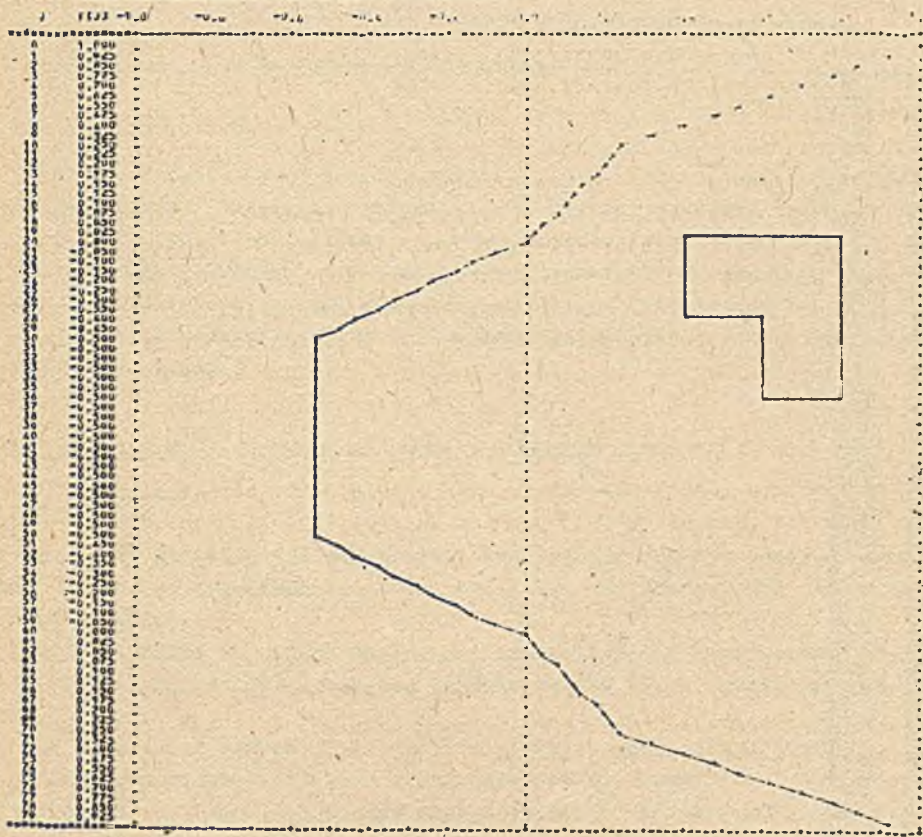
- 1^o charakteryzacja zbioru wszystkich transformacji łańcuchów kodowych, które nie zmieniają wartości funkcji korelacyjnej,
- 2^o znalezienie kryterium pozwalającego wyróżnić funkcje korelacyjne konturów regularnych z rodziny wszystkich funkcji korelacyjnych dla konturów o ustalonej długości łańcucha kodowego,
- 3^o charakteryzacja funkcji korelacyjnych dla poszczególnych grup konturów regularnych (na wzór twierdzenia 7).

Trudności jakie mogą się pojawić przy porównywaniu funkcji korelacyjnych dla konturów regularnych z funkcjami korelacyjnymi konturów nieregularnych zilustrujemy na przykładzie funkcji korelacyjnej konturu symetrycznego (jedna oś symetrii) przedstawionej na rys. 6. Przy modyfikacji tego konturu na kontur nieregularny otrzymujemy funkcję korelacyjną przedstawioną na rys. 7, która ma przebieg bardziej regularny od poprzedniej.

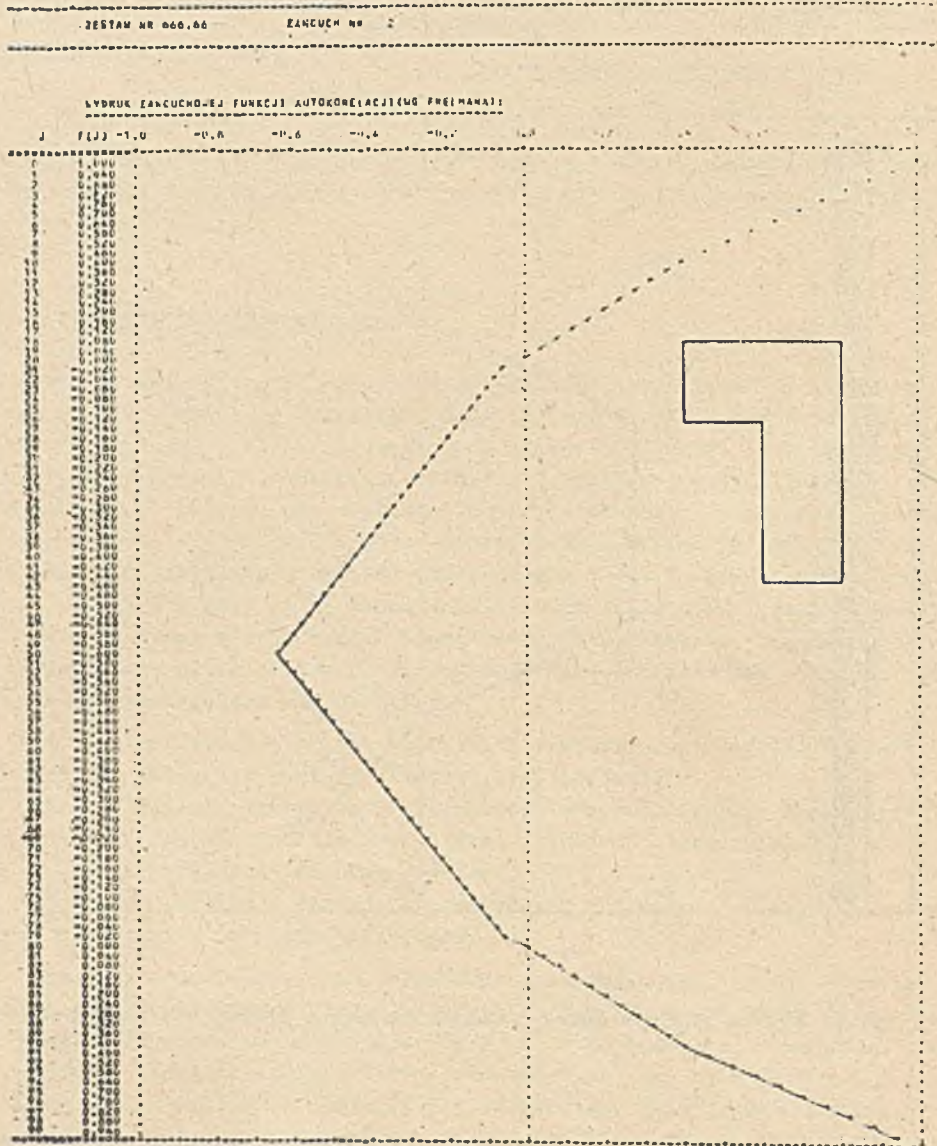
ZESTAW NR 046.06

ZANOCM 14 1

WYKRES FUNKCJI AUTOKORELACJI KONTURU O JEDNEJ OSI SYMETRII



Rys. 6. Wykres funkcji autokorelacji konturu o jednej osi symetrii



Rys. 7. Wykres funkcji autokorelacji konturu zmodyfikowanego nieregularnego

LITERATURA

- [1] H. FREEMAN; Computer Processing of Line-Drawing Images, Computing Surveys 6 (1974), pp. 57-97.
- [2] E. CZOGAŁA, J. DREWNIAK, J. IHNATOWICZ, J. JAGIELSKI; Łańcuchowe funkcje korelacji w komputerowej analizie obrazów o nieregularnych konturach. Zeszyty Nauk. Politechniki Śl. (w druku).
- [3] G. CHOQUET; Nauczanie geometrii, PZWS, Warszawa 1972, rozdz. IV i V.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕПНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Резюме

Работа содержит геометрический анализ кодовой схемы Фримана, применяемой для кодирования и обработки информации с дискретизированными плоскими контурами. В частности рассмотрены изометрии кодовой схемы и дана характеристика инвариантных фигур относительно этих изометрий. Окончательные результаты работы касаются поведения автокорреляционной функции Фримана при изометрических трансформациях контуров а также характеристики этих функций для инвариантных фигур.

THE GEOMETRICAL PROPERTIES OF CHAIN CORRELATION FUNCTION

Summary

The paper contains the geometrical analysis of Freeman coding scheme which serves to transform and code information of discretised two-dimensional contours.

The isometrics of coding scheme are being considered in particular, and the characteristics of unchanging figures versus these isometrics is given.

The conclusive and essential results of this paper are pertinent to the behaviour of Freeman autocorrelation function by isometrics transformations of the contours and to the characteristics of this function for unchanging figures.