

Ewa Starzewska-Karwan

STEROWANIE DUALNE

Streszczenie. W pracy podano algorytm sterowania optymalnego obiektem statycznym, dyskretnym w przypadku, gdy na obiekt działa zakłócenie o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa zależnym od przypadkowego parametru.

1. Wstęp

W rzeczywistych układach sterowania automatycznego często nie posiadamy pełnej informacji o obiekcie np. wskutek działania zakłóceń. Pociąga to za sobą konieczność badania obiektu w trakcie sterowania.

Badanie to należy traktować jako uzyskiwanie nowych informacji o obiekcie. Sterowanie ma zatem dwoisty charakter

- a) sterujący-realizacja celu sterowania,
- b) badający - wyznaczanie pełniejszych charakterystyk zakłóceń.

Tego typu sterowanie nazywa się "sterowaniem dualnym" [1]. W pracy [2] rozważa się pewien szczególny przypadek sterowania dualnego, gdy zakłócenie ma rozkład różny od normalnego, zależny od przypadkowego parametru. W niniejszej pracy rozpatrzono problem sterowania optymalnego obiektem statycznym, dyskretnym, w przypadku gdy na obiekt działa zakłócenie o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa, zależnym od przypadkowego parametru α . Rozkład a priori tego parametru jest dany. Zadanie rozwiązano stosując metodę dynamicznego programowania Bellmana.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest dyskretny obiekt statyczny o równaniu

$$X_s = f(U_s, Z_s) \quad (1)$$

gdzie: X_s jest zmienną stanu, U_s - sterowaniem, Z_0, Z_1, \dots, Z_n ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie, zależnym od parametru α , który również jest zmienną losową o znanym rozkładzie a priori, wreszcie s - wskaźnik określający dyskretną chwilę czasu, przyjmujący wartości $0, 1, \dots, n$; n - dana liczba naturalna określająca końcową chwilę sterowania.

Dana jest funkcja celu w postaci

$$W = \sum_{i=0}^n W_i(X_i^*, X_i) = \sum_{i=0}^n (X_i^* - X_i)^2 \quad (2)$$

X_1^* - wielkość zadana

Wprowadzimy pojęcie wektorów czasowych

$$\bar{X}_s = (X_0 \dots X_s)$$

$$\bar{U}_s = (U_0 \dots U_s)$$

$$\bar{Z}_s = (Z_0 \dots Z_s)$$

Zadaniem naszym będzie znalezienie takiego optymalnego ciągu sterowań $U_0 \dots U_n$, aby dla dowolnego sterowania U_s dla $0 \leq s \leq n$ opartego na danych obserwacjach \bar{X}_{s-1} , \bar{U}_{s-1} warunkowa wartość oczekiwana $\sum_{i=s}^n W_i(X_i^*, X_i)$ przy zadanym \bar{X}_{s-1} , \bar{U}_{s-1} była minimalna. Zapisujemy to w postaci:

$$\min_{U_s} V_s = \min_{U_s} E \left\{ \sum_{i=s}^n W_i(X_i^*, X_i) \mid \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1} \right\} \quad (3)$$

gdzie:

$$V_s = E \left\{ \sum_{i=s}^n W_i(X_i^*, X_i) \mid \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1} \right\} \quad (4)$$

a E oznacza uśredniania warunkowego podług wszystkich zmiennych losowych przy zadanym \bar{X}_{s-1} , \bar{U}_{s-1} .

3. Założenia

I. Znana jest wielkość zadająca X_s^* dla $s = 0, 1 \dots n$.

II. Zmienna losowa Z_s ma rozkład

a) $P(Z_s = Z) = P(Z, \alpha)$

gdy Z_s jest typu dyskretnego,

b) $p(Z, \alpha)$ jest gęstością prawdopodobieństwa (g.p.) gdy Z_s jest typu ciągłego.

III. Parametr α ma g.p. a priori $\varphi(\alpha, \lambda)$ gdzie $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ jest znanym wektorem parametrów. Wyznaczmy g.p. a posteriori parametru α w oparciu o zmierzone wielkości X_0, U_0 . Z tw. Bayesa i z (1) mamy

$$g(\alpha / X_0, U_0) = g(\alpha / Z_0) = \frac{p(Z_0, \alpha) \cdot \varphi(\alpha, \lambda)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(Z_0, \alpha) \cdot \varphi(\alpha, \lambda) d\alpha} \quad (5)$$

Zauważmy, że g.p. a posteriori parametru α jest funkcją wektora λ i pomierzonej wielkości Z_0

$$g(\alpha, X_0, U_0) = g(\alpha, \lambda, Z_0)$$

IV. Załóżmy, że g.p. a posteriori parametru α ma taką samą postać co g.p. a priori z nowymi parametrami λ_0 zależnymi od λ i Z_0

$$g(\alpha | X_0, U_0) = g(\alpha, \lambda, Z_0) = \varphi(\alpha, \lambda_0)$$

gdzie
$$\lambda_0 = \lambda_0(\lambda, Z_0)$$

To założenie dla pewnych rozkładów jest spełnione. Analogicznie po zmierzeniu \bar{X}_s, \bar{U}_s zakładamy, że g.p. a posteriori parametru α jest postaci

$$g(\alpha | \bar{X}_s, \bar{U}_s) = g(\alpha | \bar{Z}_s) = g(\alpha, \lambda_{s-1}, Z_s) = \varphi(\alpha, \lambda_s) \quad (6)$$

gdzie
$$\lambda_s = \lambda_s(\lambda_{s-1}, Z_s) \quad (6a)$$

i na podstawie twierdzenia Bayera zachodzi zależność rekurencyjna

$$\varphi(\alpha, \lambda_s) = \frac{p(Z_s, \alpha) \cdot \varphi(\alpha, \lambda_{s-1})}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(Z_s, \alpha) \cdot \varphi(\alpha, \lambda_{s-1}) d\alpha} \quad (7)$$

Przy znanych wektorach $\bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}$ można obliczyć warunkową g.p. zmiennej losowej Z w kroku s

$$p(Z_s | \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}) = p(Z_s | \bar{Z}_{s-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(Z_s, \alpha) \cdot \varphi(\alpha, \lambda_{s-1}) d\alpha = p(Z_s, \lambda_{s-1}) \quad (8)$$

4. Rozwiązanie problemu

Aby znaleźć optymalne sterowanie posłużymy się metodą programowania dynamicznego.

Oznaczmy przez R_s wartość oczekiwaną cząstkowej funkcji celu $W_s(X_s^*, X_s)$ przy znanych wektorach $\bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}$

$$R_s = E \left\{ W_s(X_s^*, X_s) \mid \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1} \right\} \quad (9)$$

Założmy, że znamy sterowania optymalne U_0, U_1, \dots, U_{n-1} . Obliczmy optymalne sterowanie U_n .

Zgodnie ze wzorem (3) sterowanie optymalne U_n ma minimalizować

$$V_n = E \left\{ W_n(X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-1}, \bar{U}_{n-1} \right\}$$

Wyznaczmy V_n . Z zależności (1), (2), (8), (9) mamy

$$\begin{aligned} V_n &= R_n = E \left\{ W_n (X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-1}, \bar{U}_{n-1} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_n - f(U_n, Z_n)]^2 \cdot p(Z_n \mid \bar{X}_{n-1}, \bar{U}_{n-1}) dZ_n = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_n^* - f(U_n, Z_n)]^2 \cdot p(Z_n, \lambda_{n-1}) dZ_n = \\ &= F(X_n^*, U_n, \lambda_{n-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

Optymalne sterowanie U_n^{*x} mamy z warunku (3)

$$\begin{aligned} \text{Min}_{U_n} V_n &= \text{Min}_{U_n} F(X_n^*, U_n, \lambda_{n-1}) = F(X_n^*, U_n^*, \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

Oczywiście optymalne sterowanie U_n^* jest funkcją zmiennych

$$X_n^*, \lambda_{n-1}$$

$$U_n^* = U_n^*(X_n^*, \lambda_{n-1}) \quad (11)$$

i minimalna wielkość

$$V_n^* = F(X_n^*, U_n^*, \lambda_{n-1}) = G(X_n^{*x}, \lambda_{n-1}) \quad (12)$$

W następnym (n-1) kroku minimalizujemy wielkość V_{n-1} ze względu na U_{n-1} . Z zależności (3) i (9) mamy

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= E \left\{ \frac{n}{1-n-1} W_1 (X_1^*, X_1) \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} = \\ &= E \left\{ W_{n-1} (X_{n-1}^*, X_{n-1}) \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} + \\ &\quad + E \left\{ W_n (X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} = \\ &= R_{n-1} + E \left\{ W_n (X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Przekształcając drugi człon wyrażenia (13) otrzymamy

$$\begin{aligned} &E \left\{ W_n (X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} = \\ &= E \left\{ E \left[W_n (X_n^*, X_n) \mid \bar{X}_{n-1}, \bar{U}_{n-1} \right] \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} = \\ &= E \left\{ W_n^* \mid \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2} \right\} \end{aligned}$$

A z zależności (12), (6a), (8) mamy

$$\begin{aligned} E\{V_n^* | \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2}\} &= E\{G(X_n^*, \lambda_{n-1}) | \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2}\} = \\ &= E\{G[X_n^*, \lambda_{n-1}(\lambda_{n-2}, z_{n-1})] | \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2}\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G[X_n^*, \lambda_{n-2}, z_{n-1}] \cdot p(z_{n-1} | \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2}) dz_{n-1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G[X_n^*, \lambda_{n-2}, z_{n-1}] \cdot p(z_{n-1}, \lambda_{n-2}) dz_{n-1} = \\ &= H(X_n^*, \lambda_{n-2}) \end{aligned}$$

Drugi człon wyrażenia (13) nie zależy od sterowania U_{n-1} co jest wynikiem przyjętego założenia (6). Należy zatem zminimalizować pierwszy człon, czyli szukamy takiego optymalnego sterowania U_{n-1}^* , aby

$$R_{n-1} = E\{W_{n-1}(X_{n-1}^*, X_{n-1}) | \bar{X}_{n-2}, \bar{U}_{n-2}\} \text{ było minimalne}$$

co sprowadza się do rozwiązania tego samego problemu co w kroku poprzednim.

Analogicznie rozumując, optymalne sterowanie U_s dla $s = 0, 1 \dots n$ znajdujemy w warunku

$$\min_{U_s} R_s = \min_{U_s} E\{W_s(X_s^*, X_s) | \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}\} \quad (14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_s &= E\{W_s(X_s^*, X_s) | \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X_s^* - f(U_s, z_s)]^2 \cdot p(z_s, \lambda_{s-1}) dz_s = \\ &= F(X_s^*, U_s, \lambda_{s-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

Zatem sterowanie optymalne U_s^* znajdujemy z wyrażenia

$$\min_{U_s} R_s = \min_{U_s} F(X_s^*, U_s, \lambda_{s-1}) = F(X_s^*, U_s^*, \lambda_{s-1}) \quad (16)$$

czyli

$$U_s^* = U_s^*(X_s^*, \lambda_{s-1}) \quad (16a)$$

5. Przykład 1

Rozpatrzmy obiekt liniowy

$$X_s = U_s + Z_s \quad (17)$$

Załóżmy, że zmienna losowa Z ma rozkład normalny (α, σ_z^2) , przy czym wartość oczekiwana α jest parametrem losowym o danym rozkładzie a priori również normalnym (m, σ) . Wyznamy najpierw g.p. a posteriori parametru α . Z wzoru (5) mamy

$$g(\alpha | X_0, U_0) = g(\alpha | Z_0)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left[-\frac{(Z_0 - \alpha)^2}{2 \sigma_z^2}\right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left[-\frac{(Z_0 - \alpha)^2}{2 \sigma_z^2}\right] \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(\alpha - m)^2}{2 \sigma^2}\right] d\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_0} \exp\left[-\frac{(\alpha - m_0)^2}{2 \sigma_0^2}\right] \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie
$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2 \sigma_z^2}{\sigma^2 + \sigma_z^2} \quad m_0 = \frac{m \sigma_z^2 + Z_0 \sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_z^2} \quad (18a)$$

Można wykazać, że

$$g(\alpha | \bar{X}_s, \bar{U}_s) = g(\alpha | \bar{Z}_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} \exp\left[-\frac{(\alpha - m_s)^2}{2 \sigma_s^2}\right] \quad (19)$$

gdzie
$$m_s = \frac{m_{s-1} \sigma_z^2 + Z_s \sigma_{s-1}}{\sigma_{s-1}^2 + \sigma_z^2}; \quad \sigma_s^2 = \frac{\sigma_{s-1} \sigma_z^2}{\sigma_{s-1}^2 + \sigma_z^2} \quad (19a)$$

Zauważmy, że g.p. a posteriori parametru ma również rozkład normalny z nowymi parametrami m_s, σ_s co jest zgodne z założeniem IV z punktu 3. Wyznamy warunkową g.p. zakłócenia Z_s w chwili $t = s$ przy znanych wektorach $\bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}$. Ze wzorów (8) i (9) mamy

$$\begin{aligned} &p(Z_s | \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} \exp\left[-\frac{(Z_s - \alpha)^2}{2 \sigma_z^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{s-1}} \exp\left[-\frac{(\alpha - m_{s-1})^2}{2 \sigma_{s-1}^2}\right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_{s-1}^2}} \exp\left[-\frac{(Z_s - m_{s-1})^2}{2(\sigma_z^2 + \sigma_{s-1}^2)}\right] \end{aligned} \quad (20)$$

Czyli g.p. zakłócenia Z_s w chwili $t = s$ przy znanych wektorach \vec{X}_{s-1} , \vec{U}_{s-1} ma rozkład normalny

$$(m_{s-1}, \sqrt{G_z^2 + G_{s-1}^2})$$

Znajdźmy optymalny ciąg sterowań U_s , $0 \leq s \leq n$. Z zależności (2), (9), (17) i (20) mamy

$$\begin{aligned} R_s &= E \left\{ W_s^* , X_s \mid \vec{X}_{s-1}, \vec{U}_{s-1} \right\} = \\ &= E \left\{ (X_s^* - U_s - Z_s)^2 \mid \vec{X}_{s-1}, \vec{U}_{s-1} \right\} = \\ &= (X_s^* - U_s)^2 - 2 (X_s^* - U_s) m_{s-1} + G_{s-1}^2 + G_z^2 + m_{s-1}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Optymalne U_s^* mamy z warunku (16)

$$\begin{aligned} \min_{U_s} R_s &= \min_{U_s} \left\{ (X_s^* - U_s)^2 - 2 (X_s^* - U_s) m_{s-1} + \right. \\ &\quad \left. + G_{s-1}^2 + G_z^2 + m_{s-1}^2 \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

czyli optymalne U_s^* znajdziemy z warunku

$$\frac{d R_s}{d U_s} = 0$$

$$\frac{d R_s}{d U_s} = -2 (X_s^* - U_s) + 2 m_{s-1} = 0$$

czyli optymalne sterowanie wynosi

$$U_s^* = X_s^* - m_{s-1} \quad \text{dla} \quad s = 1 \dots n \quad (23)$$

gdzie

$$m_{s-1} = \frac{m_{s-2} G_z^2 + Z_{s-1} G_{s-2}^2}{G_{s-2}^2 + G_z^2}; \quad G_{s-1}^2 = \frac{G_{s-2}^2 G_z^2}{G_{s-2}^2 + G_z^2} \quad (23a)$$

$$m_0 = \frac{m G_z^2 + Z_0 G^2}{G^2 + G_z^2}; \quad G_0^2 = \frac{G^2 G_z^2}{G^2 + G_z^2} \quad (23b)$$

a w chwili $t = 0$ sterowanie optymalne wynosi

$$U_0^* = X_0^* - m \quad (23c)$$

6. Przykład 2

Rozpatrzmy obiekt nieliniowy o równaniu

$$X_s = U_s Z_s \quad (24)$$

Zakładamy, że zmienne losowe Z i α mają taki sam rozkład jak w poprzednim przykładzie. Obliczamy R_s .

$$\begin{aligned} R_s &= E \left\{ W_s (X_s^*, X_s) \mid \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1} \right\} = \\ &= E \left\{ (X_s^* - U_s Z_s)^2 \mid \bar{X}_{s-1}, \bar{U}_{s-1} \right\} = \\ &= X_s^{*2} - 2 X_s^* U_{s-1} + U_s^2 (m_{s-1}^2 + G_z^2 + G_{s-1}^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Optymalne sterowanie znajdujemy z warunku

$$\text{Min}_{U_s} \{ R_s \}$$

Obliczając

$$\frac{d R_s}{d U_s} = -2 X_s^* m_{s-1} + 2 U_s (m_{s-1}^2 + G_z^2 + G_{s-1}^2) = 0$$

mamy optymalne sterowanie

$$U_s^* = X_s^* \frac{m_{s-1}}{m_{s-1}^2 + G_z^2 + G_{s-1}^2} \quad \text{dla } s = 1 \dots n \quad (26)$$

$$U_0^* = X_0^* \frac{m}{m^2 + G_z^2 + G^2} \quad (26a)$$

7. Uwagi i wnioski końcowe

Aby uzyskać minimum wskaźnika jakości $W = \sum_{s=0}^n (X_s^* - X_s)^2$ należałoby tak dobrać ciąg sterowań U_s , aby dla

$$s = 0, 1 \dots n \quad X_s^* = X_s$$

Zatem dla obiektu liniowego, gdybyśmy znali zakłócenie Z_s w chwili $t = s$ optymalne sterowanie winno wynosić

$$U_s^* = X_s^* - Z_s \quad (27)$$

a dla obiektu nieliniowego

$$U_s^* = \frac{X_s^*}{\eta_s} \quad (28)$$

Porównując odpowiednio wzory (23) i (27) oraz (26) i (28) zauważmy, że parametr m_{s-1} szacuje zakłócenie Z_s a wyrażenie $\frac{m_{s-1}}{m_{s-1}^2 + G_z^2 + G_{s-1}^2}$ wielkość $\frac{1}{Z_s}$. Z zależności (20) wynika, że wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej Z_s w chwili $t = s$ wynoszą odpowiednio

$$m_{s-1}, \quad \sigma_{s-1}^2 + \sigma_z^2$$

Zauważmy, że odpowiednie wzory rekurencyjne (23a) na m_{s-1} i σ_{s-1}^2 można przekształcić do postaci:

$$m_{s-1} = \frac{m \sigma_z^2 + \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{S \sigma_z^2 + \sigma_z^2} = \frac{m + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2} \sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2} S} \quad (29a)$$

$$\sigma_{s-1}^2 = \frac{\sigma_z^2 \sigma_z^2}{S \sigma_z^2 + \sigma_z^2} = \frac{\sigma_z^2}{1 + \frac{\sigma_z^2}{\sigma_z^2} S} \quad (29b)$$

Jak widać z powyższych wyrażen, przy małych wartościach S istotną rolę w ocenie wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej Z_s odgrywa wielkość przyjęta a priori. Natomiast dla dużych s $m_{s-1} \cong \frac{\sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{S}$ a $\sigma_{s-1}^2 \cong 0$, czyli zmienna losowa Z_s ma rozkład normalny z parametra-

trami $\left\{ \frac{\sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{S}; \sigma_z^2 \right\}$. Odpowiednie wartości optymalnych sterowań wynoszą (dla dużych s) odpowiednio: dla obiektu liniowego

$$U_s^* = X_s^* - \frac{\sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{S}$$

a dla obiektu nieliniowego

$$U_s^* = X_s^* \frac{\frac{\sum_{i=0}^{s-1} Z_i}{S}}{\left(\sum_{i=0}^{s-1} Z_i \right)^2 + \sigma_z^2}$$

Rozważanie przedstawione w artykule można rozszerzyć na dyskretne obiekty wielowymiarowe zarówno statyczne jak i dynamiczne.

LITERATURA

- [1] FELDBAUM A.A.: Podstawy teorii optymalnych układów sterowania automatycznego. PWN, Warszawa 1967.
- [2] TRYBUŁA S.: Sterowanie dualne przy samoreprodukujących się rozkładach. VKKA, Gdańsk 1971.
- [3] FISZ M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1969.

ДВОЙСТВЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Р е з ю м е

В статье представлен алгоритм оптимального управления дискретным объектом, если помехи имеют распределение вероятностей зависимое от случайного параметра.

THE DUAL CONTROL IN THE CASE, IN WHICH THE PROBABILITY DENSITY OF INTERFERING SIGNAL IS DEPENDENT ON RANDOM PARAMETER

S u m m a r y

In the paper the optimum control of a static, discrete plant with external interfering signal is presented. The probability distribution of interfering signal with random parametre is assumed. The optimum control algorithm of the plant is given.