ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 50 Nr kol. 626

Krzysztof BARON

FILTR KALMANA DLA ZAKŁÓCEŃ SKORELOWANYCH W OGRANICZONYM HORYZONCIE CZASU

Streszczenie. W artykule przedstawiono równania filtru Kalmana dla dyskretnego liniowego układu w przypadku zakłóceń skorelowanych ze sobą w ograniczonym horyzoncie czasu(k dyskretnych chwil). Równania te umożliwiają podanie ocen zakłóceń z wyprzedzeniem sięgającym do k-1 chwili włącznie.

Do opisu zakłóceń przyjęto model w formie procesu średniej ruchomej. Wyprowadzenia równań dokonano wykorzystując rozszerzony o przyszłe zakłócenia wektor stanu obiektu.

Wstęp

W algorytmie sterowania stochastycznie optymalnego staramy się uwzględnić możliwie najwięcej informacji o zakłóceniach. Przede wszystkim chodzi o informacje dotyczące zakłóceń, które wystąpią w przyszłości. Od ilości wykorzystanej informacji o zakłóceniach zależy zmniejszenie wartości oczekiwanej wskaźnika jakości sterowania. Jedną z cech realnych zakłóceń, której uwzględnienie pozwala poprawić jakość sterowania, jest ich skorelowanie. W pracach Gessinga [1] podane jest twierdzenie zwane uogólnioną zasadą stochastycznej równoważności, z którego wynika, że wartości sterowań stochastycznie optymalnych dla dyskretnego układu liniowego przy kwadratowym wskaźniku jakości są zależne od ocen aktualnego stanu układu i ocen zakłóceń działających na układ w przyszłości. Tamże [1] podano ogólne równania filtru dającego oceny przyszłych zakłóceń, gdy te ostatnie są procesem stochastycznym o znanym wielowymiarowym rozkładzie normalnym Gaussa.

Wykorzystując te ogólne zależności określono w niniejszej pracy równania filtru Kalmana w przypadku oddziaływania na obiekt zakłóceń skorelowanych w k sąsiednich chwilach dyskretnego czasu, posługując się modelem zakłóceń w postaci procesu średniej ruchomej (moving-average process).

Sformułowanie problemu

Własności dynamiczne rozważanego układu są opisane równaniami:

$$y_n = C_n x_n + v_n \tag{1}$$

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n + w_n \tag{2}$$

gdzie:

$n = 0, 1, \ldots, N-1$,

y_n, x_n, u_n – wektory wyjścia, stanu, sterowania o wymiarach odpowiednio m, s, r,

x_0 – zmienna losowa o wartości średniej $\bar{x}_0$ i kowariancji X_0,

C_n, A_n, B_n – macierze o wymiarach m x s, s x s, s x r,

v_n – biały szum gaussowski: $E\, v_n = 0$, $E\, v_n v_n^T = V_n$,

w_n – wektor zakłóceń skorelowanych ze sobą w k sąsiednich chwilach, niezależny od innych wielkości:

$$E\, w_i w_j^T \neq 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| \leqslant k-1$$

$$E\, w_i w_j^T = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| \geqslant k, \ i, j \in [0, N-1].$$

Model zakłóceń w_n przyjęto w postaci procesu średniej ruchomej [2] o następującym równaniu rekurencyjnym:

$$w_n = \sum_{i=n-k+1}^{n} \alpha_{n,i} \lambda_i \tag{3}$$

gdzie:

λ_i – wektor dyskretnych białych szumów gaussowskich o zerowej wartości średniej i kowariancji $E\, \lambda_i \lambda_i^T = \Lambda_i$, niezależnych od siebie i innych wielkości

$\alpha_{n,i}$ – wektor współczynników mogących zależeć od czasu n.

Kowariancję, jak również skorelowanie zakłóceń w_n z uwagi na ich zerową wartość średnią, wyrażają zależności:

$$W_{n,n+j} = E\, w_n w_{n+j}^T = \sum_{i=n+j-k+1}^{n} \alpha_{n,i} \Lambda_i \alpha_{n+j,i}^T \tag{4}$$

$$\text{dla} \quad |j| \leqslant k-1$$

$$W_{n,n+j} = 0 \quad \text{dla} \quad |j| \geqslant k \tag{5}$$

przy czym bierzemy pod uwagę tylko $n+j \in [0, N-1]$.

Należy wyznaczyć oceny stanu i przyszłych k-1 zakłóceń dla układu dynamicznego o postaci (1) (2) i zakłóceń (3) korzystając z dostępnej bieżącej informacji w formie wektora:

$$\vec{y}_n = [y_0^T, y_1^T, \ldots, y_n^T, u_0^T, \ldots, u_{n-1}^T]^T$$

$$\hat{x}_n = E_{\cdot|\vec{y}_n} x_n \tag{6}$$

$$\hat{w}_{n+i-1/n} = E_{\cdot|\vec{y}_n} w_{n+i-1} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, k-1 \tag{7}$$

gdzie $E_{\cdot|\vec{y}_n}$ jest operacją warunkowego uśredniania podług wszystkich zmiennych losowych przy ustalonym $\vec{y}_n$.

Rozwiązanie problemu

Dokonując rozszerzenia stanu do postaci:

$$\underline{x}_n^T = \left[x_n^T,\ w_n^T,\ w_{n+1}^T,\ \dots,\ w_{N-1}^T\right] \tag{8}$$

można równania (1) i (2) zapisać w sposób zwarty następująco:

$$y_n = \underline{C}_n\, \underline{x}_n + v_n \tag{9}$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{A}_n\, \underline{x}_n + \underline{B}_n\, u_n \tag{10}$$

gdzie:

$$\underline{C}_n = [C_n,\ 0]$$

macierz $m \times (N-n+1) \times s$ wymiarowa,

$$\underline{A}_n = \begin{bmatrix} A_n & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

macierz $(N-n) \times s \times (N-n+1) \times s$ wymiarowa

$\underline{B}_n = \begin{bmatrix} B_n \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ macierz $(N-n) \times s \times r$ wymiarowa, wymiary macierzy $\underline{C}_n$, $\underline{A}_n$, $\underline{B}_n$ zmieniają się wraz z dyskretnymi chwilami n. Ocenę rozszerzonego stanu:

$$\hat{\underline{x}}_n = \underset{\cdot|\vec{y}_n}{E}\ \underline{x}_n$$

można wyznaczyć w oparciu o równanie filtru Kalmana [1]:

$$\hat{\underline{x}}_{n+1} = \underline{A}_n\, \hat{\underline{x}}_n + \underline{B}_n\, u_n + \underline{K}_{n+1}\, [y_{n+1} - \underline{C}_{n+1}\, (\underline{A}_n\, \hat{\underline{x}}_n + \underline{B}_n\, u_n)] \tag{11}$$

gdzie:

$$\underline{K}_n = \bar{\underline{P}}_n\, \underline{C}_n^T\, \beta_n \tag{12}$$

$$\text{a} \quad \beta_n = (C_n\, \bar{P}_n\, C_n^T + V_n)^{-1} \tag{13}$$

jest macierzą o wymiarze $m \times m$

$\bar{P}_n$ jest elementem macierzy $\bar{\underline{P}}_n$ złożonym z jej s pierwszych wierszy i s pierwszych kolumn. Natomiast:

$$\underline{P}_n = (I - \underline{K}_n\, \underline{C}_n)\, \bar{\underline{P}}_n \tag{14}$$

$$\bar{\underline{P}}_{n+1} = \underline{A}_n\, \underline{P}_n\, \underline{A}_n^T \tag{15}$$

przy czym:

$$\underline{P}_n = E(\underline{x}_n - \hat{\underline{x}}_n)\, (\underline{x}_n - \hat{\underline{x}}_n)^T \tag{16}$$

i

$$\underline{\bar{P}}_n = E(\underline{x}_n - E\,\underline{x}_n)(\underline{x}_n - E\,\underline{x}_n)^T_{|\vec{y}_{n-1}} \tag{17}$$

Warunki początkowe równań filtru są określone zależnościami:

$$\underline{\hat{x}}_o = \underline{\bar{x}}_o + \underline{K}_o\left[y_o - \underline{C}_o\,(\underline{A}_o\,\underline{\bar{x}}_o + \underline{B}_o\,u_o)\right] \tag{18}$$

$$\underline{K}_o = \underline{X}_o\,\underline{C}_o^T\,(C_o\,X_o\,C_o^T + V_o)^{-1} \tag{19}$$

Rozszerzony wektor $\underline{x}_o$ ma postać:

$$\underline{x}_o = \left[x_o^T,\ w_o^T,\ \dots,\ w_{N-1}^T\right]^T$$

Stąd też wartość oczekiwana $\underline{\bar{x}}_o$ i macierz kowariancji $\underline{X}_o$ wyrażają się zależnościami:

$$\underline{\bar{x}}_o = E\,\underline{x}_o$$

$$\underline{X}_o = \underline{\bar{P}}_o = E(\underline{x}_o - \underline{\bar{x}}_o)(\underline{x}_o - \underline{\bar{x}}_o)^T \tag{20}$$

Wartość oczekiwana i kowariancja pierwszej składowej wektora $\underline{x}_o$ wyrażone są przez:

$$\bar{x}_o = E\,x_o$$

$$X_o = E(x_o - \bar{x}_o)(x_o - \bar{x}_o)^T$$

natomiast wartości średnie w_i, $i=0, 1, \dots, k-1$ określone w chwili $n=0$, wynoszą $\bar{w}_i = 0$.

Macierz $\underline{X}_o$ określona w oparciu o wyrażenie (20) posiada następującą postać:

$$\underline{X}_o = \begin{bmatrix} X_o & 0 \\ & \\ 0 & W_o \end{bmatrix} \quad \text{- o wymiarze } (N+1)\cdot s \times (N+1)\cdot s \tag{21}$$

gdzie:

$$W_o = \begin{bmatrix} W_{0,0} & W_{1,0}^T & W_{2,0}^T & & & W_{N-1,0}^T \\ W_{1,0} & W_{1,1} & & & & \\ W_{2,0} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & W_{N-1,N-3}^T \\ & & & & W_{N-2,N-2} & W_{N-1,N-2}^T \\ W_{N-1,0} & & & W_{N-1,N-3} & W_{N-1,N-2} & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \tag{22}$$

jest macierzą kowariancji wektora zakłóceń $\left[w_0^T, w_1^T, \dots, w_{N-1}^T\right]$ znaną w chwili $n=0$. Charakteryzuje ona również skorelowanie pomiędzy zakłóceniami. Dla zakłóceń skorelowanych ze sobą w k sąsiednich chwilach dyskretnego czasu, przedstawionych za pomocą równania (3), elementami macierzy W_0 są wyrażenia określone wzorami (4) i (5).

Łatwo zauważyć, że wówczas macierz W_0 jest macierzą $2k-1$ przekątniową mającą na $2k-1$ przekątnych zgrupowanych symetrycznie wokół przekątnej głównej elementy określone zależnością (4). Pozostałe elementy macierzy W_0 są zerami. Zawartość macierzy W_0 wpływa na wartości elementów macierzy błędu oceny $\bar{P}_n$. Stąd $\bar{P}_n$ jest też $2k-1$ przekątniowa. Dla $n = 0,1, \dots, N-1$ macierz $\bar{P}_n$ określoną zależnością (17) można przedstawić następująco:

$$\bar{P}_n = \begin{bmatrix} \bar{P}_n^{n,n} & \bar{P}_n^{n,n+1} & \dots & \bar{P}_n^{n,n+k-1} & 0 \dots & & \dots 0 \\ \bar{P}_n^{n+1,n} & \bar{P}_n^{n+1,n+1} & \dots & \bar{P}_n^{n+1,n+k-1} & \bar{P}_n^{n+1,n+k} & 0 \dots & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \bar{P}_n^{n+k-1,n} & \bar{P}_n^{n+k-1,n+1} & \dots & & & & \\ 0 & \bar{P}_n^{n+k,n+1} & \dots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & \vdots & & & & & \bar{P}_n^{N-k+1,N} \\ \vdots & \vdots & & & \dots & \bar{P}_n^{N-1,N-1} & \bar{P}_n^{N-1,N} \\ 0 & 0 \dots & & \dots 0 & \bar{P}_n^{N,N-k+1} \dots & \bar{P}_n^{N,N-1} & \bar{P}_n^{N,N} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Korzystając z zależności (11) ÷ (15) można wyprowadzić równania rekurencyjne filtru, umożliwiające wyznaczenie w chwili $n+1$ oceny stanu $\hat{x}_{n+1}$ i $k-1$ ocen zakłóceń $\hat{w}_{n+i/n+1}$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ układu opisanego równaniami (1) (2).

$$\hat{x}_{n+1} = A_n \hat{x}_n + B_n u_n + K_{n+1}^0 \left[y_{n+1} - C_{n+1} (A_n \hat{x}_n + B_n u_n)\right] \tag{24}$$

$$\hat{w}_{n+i/n+1} = \hat{w}_{n+i/n} + K_{n+1}^i \left[y_{n+1} - C_{n+1} (A_n \hat{x}_n + B_n u_n)\right] \tag{25}$$

dla $i=1, \dots, k-1$

gdzie:

$$K_{n+1}^i = \bar{P}_{n+1}^{i+n+1,\, n+1} \, C_{n+1}^T \, \rho_{n+1} \tag{26}$$

dla $n = 0, 1, \ldots, N-1$

$i = 0, 1, \ldots, k-1$

$$\Lambda_{n+1} = (C_{n+1} \bar{P}_{n+1}^{n+1,n+1} C_{n+1}^T + V_{n+1})^{-1}$$

Warunki początkowe równania (29) są następujące:

$$\hat{x}_o = \bar{x}_o + K_o^o \left[y_o - C_o (A_o \bar{x}_o + B_o u_o)\right] \tag{27}$$

$$K_o^o = X_o C_o^T (C_o X_o C_o^T + V_o)^{-1}$$

Ponieważ ze względu na postać macierzy X_o (21) $K_o^i = 0$, więc na podstawie zależności (18):

$$\hat{w}_{i-1/o} = 0 \tag{28}$$

$i = 1, \ldots, k-1$

Również dla $n = 1, \ldots, N-k$

$$\hat{w}_{n+i/n} = 0 \tag{29}$$

o ile $i \geq k$, a $n + i \leq N-k$.
Macierz $\bar{P}_{n+1}^{i+n+1,\, n+1}$ dla $n < N-k+1$ przyjmuje wartości obliczone zgodnie z zależnościami:

$$\bar{P}_{n+1}^{i+n+1,\, n+1} = \begin{cases} A_n P_n^{n,n} A_n^T + A_n P_n^{n,n+1} + P_n^{n+1,n} A_n^T + P_n^{n+1,n+1}, & i=0 \\ P_n^{i+n+1,n} A_n^T + P_n^{i+n+1,n+1}, & i=1, \ldots, k-2 \quad (31) \\ W_{i+n,\, n-1} & , i=k-1 \quad (32) \\ 0 & , i \geq k \quad (33) \end{cases}$$

Gdy $N-k + 1 \leq n \leq N-1$ to dla $i \in [0, N-n]$ wykorzystuje się tylko początkową część zależności spośród (30) ÷ (32). Wyrażenia wchodzące w skład równań (30) (31) określone są następująco:

$$P_n^{n,n} = (I - \bar{P}_n^{n,n} C_n^T \Lambda_n C_n) \bar{P}_n^{n,n} \tag{34}$$

$$P_n^{n,\, n+1} = (I - K_n^o C_n) \bar{P}_n^{n,\, n+1} \tag{35}$$

$$P_n^{i+n+1,n} = \bar{P}_n^{i+n+1,n} - K_n^{i+1} C_n \bar{P}_n^{n,n} \tag{36}$$

$$P_n^{i+n+1,n+1} = \bar{P}_n^{i+n+1,n+1} - K_n^{i+1} C_n \bar{P}_n^{n,\, n+1} \tag{37}$$

z kolei dla $i = 0, 1, \dots, k-1$

$$\bar{P}_n^{n+k-1,\, n+i} = W_{n+k-2,\, n+i-1} \tag{38}$$

$$\bar{P}_n^{n+i,\, n+k-1} = W^T_{n+k-2,\, n+i-1} \tag{39}$$

$$\bar{P}_n^{n+j,\, n+i} = \bar{P}_{n-1}^{n+j,\, n+i} - K_{n-1}^{j+1} C_{n-1} \bar{P}_{n-1}^{n-1,\, n+i} \tag{40}$$

dla $i, j = 1, \dots, k-2$

$$\bar{P}_n^{n+j,\, n} = \left(\bar{P}_{n-1}^{n+j,n-1} - K_{n-1}^{j+1} C_{n-1} \bar{P}_{n-1}^{n-1,n-1}\right) A_{n-1}^T +$$

$$+ \bar{P}_{n-1}^{n+j,n} - K_{n-1}^{j+1} C_{n-1} \bar{P}_{n-1}^{n-1,n}, \quad j = 1,\dots,k-2 \tag{41}$$

$$\bar{P}_n^{n,\, n+i} = A_{n-1} \left(I - K_{n-1}^{0} C_{n-1}\right) \bar{P}_{n-1}^{n-1,\, n+i} +$$

$$+ \bar{P}_{n-1}^{n,\, n+i} - K_{n-1}^{1} C_{n-1} \bar{P}_{n-1}^{n-1,n+i}, \quad i = 1,\dots, k-2 \tag{42}$$

O ile dla $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N-n-k+1$ zachodzi:

$$i-j \leqslant 2k-1$$

$$\text{to:} \quad \bar{P}_n^{n+k-1+j,\, n-1+i} = W_{n+k+j-2,\, n+i-2} \tag{43}$$

Dla chwili $n = 0$ obowiązują następujące warunki początkowe:

$$\left.\begin{aligned} P_0^{00} &= X_0 \\ P_0^{i0} &= P_0^{0i} = 0 \\ P_0^{ij} &= W_{i-1,\, j-1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1, \dots, N \\ j &= 1, \dots, N \end{aligned} \tag{44}$$

W oparciu o otrzymane wyrażenia (24) ÷ (44) można podać równania filtru w odpowiednio zwartej formie uwzględniającej horyzont skorelowania zakłóceń. Wprowadzając nowy wektor x_n^* o postaci:

$$x_n^* = \left[x_n^T, w_n^T, \dots, w_{n+k-2}^T\right]^T \tag{45}$$

i przyjmując odpowiednie macierze:

$$C_n^* = [1,0] - m \times k \cdot s \quad \text{wymiarową}$$

$$A_n^* = \begin{bmatrix} A_n & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \text{-s.k x k . s} \quad \text{wymiarową} \tag{47}$$

$$B_n^* = \begin{bmatrix} B_n \\ \\ 0 \end{bmatrix} \text{-s.k x r} \quad \text{wymiarową}$$

można podać ostateczną postać równań filtru dla procesów skorelowanych w k sąsiednich chwilach dyskretnego czasu:

$$\hat{x}^*_{n+1} = A^*_n \hat{x}^*_n + B^*_n u_n + K^*_{n+1} \left[y_{n+1} - C^*_{n+1} (A^*_n \hat{x}^*_n + B^*_n u_n) \right] \tag{49}$$

gdzie:

$$K^*_n = \bar{P}^*_n C^{*T}_n (C^*_n \bar{P}^*_n C^{*T}_n + V_n)^{-1} \tag{50}$$

$$P^*_n = (I - K^*_n C^*_n) \bar{P}^*_n \tag{51}$$

$$\bar{P}^*_{n+1} = A^*_n P^*_n A^{*T}_n + W^*_n \tag{52}$$

Macierze P^*_n i $\bar{P}^*_n$ są określone następująco:

$$P^*_n = E (x^*_n - \hat{x}^*_n)(x^*_n - \hat{x}^*_n)^T \tag{53}$$

$$\bar{P}_n = E (x^*_n - E_{\cdot|\bar{y}_{n-1}} x^*_n)(x^*_n - E_{\cdot|\bar{y}_{n-1}} x^*_n)^T \tag{54}$$

natomiast W^*_n jest macierzą o postaci:

$$W^*_n = \begin{bmatrix} & & & W_{n+k-1,n} \\ & 0 & & \\ & & & W_{n+k-1,n+1} \\ & & & \vdots \\ W_{n+k-1,n} & W_{n+k-1,n+1} & \cdots & W_{n+k-1,\, n+k-1} \end{bmatrix} \tag{55}$$

mającą wymiar k . s x k . s, o niezerowych elementach określonych według zależności (4) umieszczonych tylko w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie.

Dla chwili n W^*_n zawiera elementy $W_{n+k-1,n+i}$, i=0, 1, ..., k-1. Warunki początkowe $\bar{P}^*_o$ i X^*_o są analogiczne do określonych wzorami(44), (27) i (28).

Uwagi końcowe

Ze względu na skorelowanie zakłóceń ze sobą tylko w bliskim sąsiedztwie k chwil wymiary macierzy filtru (46) ÷ (55) w stosunku do filtru dla pełnego rozszerzonego stanu (8) uległy zmniejszeniu i są stałe w trakcie obliczeń. Macierz odwracana ma, jak i poprzednio, wymiar mxm związany z wymiarem wektora wyjścia.

Do określenia ocen stanu i zakłóceń w chwili n jest potrzebna, oprócz bieżących pomiarów, kowariancji szumu pomiarowego V_n i warunków początkowych, informacja o skorelowaniu zakłóceń w_{n+i}, i = 0,1, ... , k-2 z zakłóceniem w_{n+k-1} oraz informacja o kowariancji zakłócenia w_{n+k-1}, które pojawi się dopiero na wejściu układu (1) (2) w dyskretnej n + k - 1 chwili czasu.

LITERATURA

[1] GESSING R.: "Uogólniona zasada stochastycznej równoważności i jej zastosowania". Archiwum Automatyki i Telemechaniki t. XXII z. 4, 1977.

[2] ASTRÖM K.J.: Introduction to Stochastic Control Theory Ac.Press NY-London 1970.

[3] MEDITCH J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych. WNT, Warszawa 1975.

[4] DEUTSCH R.: Teoria estymacji. PWN, Warszawa 1969.

ФИЛЬТР КАЛЬМАНА В СЛУЧАЕ ВОЗМУЩЕНИЙ С КОРРЕЛЯТИВНОЙ СВЯЗЬЮ В ОГРАНИЧЕННОМ ГОРИЗОНТЕ ВРЕМЕНИ

Р е з ю м е

В статье представлены уравнения фильтра Кальмана для дискретного линейного объекта в случае возмущений с коррелятивной связью в ограниченном горизонте времени (к дискретных моментов). Эти уравнения представляют возможность дать оценки возмущений с опережением, достигающим к-1 момента включительно. Для описания возмущений принята модель в виде стохастического процесса со скользящей средней. Уравнения выведены, используя увеличенный вектор состояния объекта за счет будущих возмущений.

KALMAN FILTER FOR SYSTEMS WITH DISTURBANCES CORRELATED IN THE LIMITED INTERVAL OF TIME

S u m m a r y

In the paper the Kalman filter equations for linear discrete time systems with disturbances correlated in the limited interval of time (k discrete

time-moments) are prosented. These equations enable the estimations of the disturbances with prediction rate to k-1 moments.

The model of disturbances has been assumed in the form of the moving average process.

The equations have been derived using the state vector extended by future disturbances.