ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 50 Nr kol. 626

Jerzy KLAMKA

WARUNKI STEROWALNOŚCI DLA UKŁADÓW PARABOLICZNYCH Z OPÓŹNIENIEM W STEROWANIU

Streszczenie. W pracy sformułowano warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej sterowalności dla układów dynamicznych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego, ze stałym opóźnieniem w sterowaniu. Podano przykłady ilustrujące przedstawione kryteria względnej aproksymacyjnej sterowalności.

Problematyka sterowalności układów dynamicznych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego była w ostatnich latach przedmiotem intensywnych badań [1 - 4], [6 - 10]. We wszystkich wymienionych pracach, wykorzystując metody analizy funkcjonalnej rozpatrywano aproksymacyjną sterowalność wyżej wymienionych układów, jednak bez uwzględniania opóźnień w funkcji sterującej. W niniejszej pracy zdefiniowano względną aproksymacyjną sterowalność liniowych układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego, ze stałym opóźnieniem w sterowaniu. Sformułowano warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej sterowalności na ustalonym przedziale czasowym. Podano przykłady zastosowań tych warunków. Uzyskane w pracy rezultaty są uogólnieniem wyników zawartych w publikacjach [1 - 10]. Uogólnienie to polega na uwzględnieniu opóźnienia w sterowaniu, co prowadzi do nowych warunków sterowalności.

Niech będzie dany układ dynamiczny opisany liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego o następującej postaci

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + b_0(x)u(t) + b_h(x)u(t-h) \tag{1}$$

określonym dla $x \in [0,a]$, $t \in [0,T]$, $(T > h)$ oraz spełniającym warunki brzegowe

$$w(t,0) = w(t,a) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

i warunki początkowe

$$w(0,x) = w_0(x) \in L^2[0,a] \tag{3}$$

$$u(t) = u_0(t) \in L^2[-h,0] \tag{4}$$

Zakłada się, że sterowania $u(t) \in L^2[0,T]$ oraz, że funkcje $b_0(x)$, $b_h(x) \in L^2[0,a]$. Układ dynamiczny (1) wraz z warunkami (2), (3) oraz (4) może

być przedstawiony w formie zwyczajnego równania różniczkowego w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$, postaci

$$\frac{dw(t,x)}{dt} = A\,w(t,x) + b_0 u(t) + b_h u(t-h) \tag{5}$$

gdzie:
liniowy nieograniczony operator $A : D(A) \to L^2[0,a]$ jest określony równością

$$A\,w(t,x) = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$D(A) = \left\{ w(t,x) \in L^2[0,a] : \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} \in L^2[0,a] \text{ oraz } w(t,0) = w(t,a) = 0 \right\} \tag{7}$$

Ponadto $b_0, b_h \subset L^2[0,a]$.

Wiadomo [3], [5], [7], [9], że operator A posiada wartości własne dane następującą równością

$$q_j = -\left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{8}$$

wszystkie o krotności $r_j = 1$, $j=1,2,\ldots$ Każdej wartości własnej q_j, $j=1,2,\ldots$ odpowiada jedna znormalizowana funkcja własna określona następującą równością [3], [5], [7]

$$g_j(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{j\pi x}{a} \quad j = 1,2,3,\ldots \tag{9}$$

Funkcje własne g_j, $j=1,2,\ldots$ tworzą zupełny układ ortonormalny w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$, [5], [7], [9], a funkcja Greena dla układu dynamicznego (1) jest postaci [7], [9]

$$G(t,x,y) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-q_j t) g_j(x) g_j(y) = \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-q_j t) \frac{2}{a} \sin\frac{j\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{a} \tag{10}$$

Dla układu dynamicznego (1) definiuje się stan zupełny z_0 w chwili początkowej $t = 0$ jako parę funkcji $\left\{ w_0(x), u_0(t) \right\} = z_0$, [5]. Dla danego stanu zupełnego z_0, wykorzystując funkcję Greena (10) rozwiązanie równania (1) dla $t > h$, jest następującej postaci

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \int_0^a G(t,x,y) w_0(y)\,dy + \int_0^t \left(\int_0^a G(t-s,x,y) b_0(y)\,dy \right) u(s)\,ds + \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^a G(t-s,x,y) b_h(y)\,dy \right) u(s-h)\,ds = \int_0^a G(t,x,y) w_0(y)\,dy + \\ &+ \int_{-h}^0 \left(\int_0^a G(t-s-h,x,y) b_h(y)\,dy \right) u_0(s)\,ds + \int_0^t \left(\int_0^a G(t-s,x,y) b_0(y)\,dy \right) u(s)\,ds + \\ &+ \int_0^{t-h} \left(\int_0^a G(t-s-h,x,y) b_h(y)\,dy \right) u(s)\,ds = w_{z_0}(t,x) + w_u(t,x) \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie:

$$w_{z_0}(t,x) = \int_0^a G(t,x,y)w_0(y)dy + \int_{-h}^0 \left(\int_0^a G(t-s-h,x,y)b_h(y)dy\right)u_0(s)ds \quad (12)$$

$$w_u(t,x) = \int_0^t \left(\int_0^a G(t-s,x,y)b_0(y)dy\right)u(s)ds + \int_0^{t-h} \left(\int_0^a G(t-s-h,x,y)b_h(y)dy\right)u(s)ds \quad (13)$$

Dla układu dynamicznego (1) wprowadza się następującą definicję względnej aproksymacyjnej sterowalności na przedziale $[0,T]$, [5].

Definicja 1

Układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$, jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego z_0, dowolnej funkcji $w_T(x) \in L^2[0,a]$ i dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje sterowanie $u(t) \in L^2[0,T]$ takie, że odpowiadająca mu trajektoria układu(1) spełnia następujący warunek

$$\| w(T,x) - w_T(x) \|_{L^2[0,a]} \leq \varepsilon \quad (14)$$

Wprowadza się następujące oznaczenia

$$b_{0j} = \langle b_0(x), \quad g_j(x) \rangle_{L^2[0,a]} \qquad j = 1,2,\ldots \quad (15)$$

$$b_{hj} = \langle b_h(x), \quad g_j(x) \rangle_{L^2[0,a]} \qquad j = 1,2,\ldots \quad (16)$$

gdzie symbol $\langle .,. \rangle_{L^2[0,a]}$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$.

$$C_T : L^2[0,T] \quad L^2[0,a] \quad (17)$$

Liniowy ciągły operator C_T nosi nazwę operatora sterowalności [5] i jest określony następującą równością definicyjną

$$C_T(u) \overset{df}{=} w_u(T,x) \quad (18)$$

Korzystając z wprowadzonych definicji i oznaczeń, a także wykorzystując niektóre rezultaty zawarte w pracach [4], [5], [9], można sformułować następujący warunek konieczny i wystarczający względnej aproksymacyjnej sterowalności układu dynamicznego (1).

Twierdzenie 1

Układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$, $(T > h)$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j=1,2,\ldots$ zachodzi nierówność

$$b_{0j}^2 + b_{hj}^2 \neq 0 \quad (19)$$

Dowód

Z definicji 1 wynika, że układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości operatora sterowalności C_T jest wszędzie gęsty w przestrzeni $L^2[0,a]$ co na mocy znanych twierdzeń z analizy funkcjonalnej [4], [5], [9], jest równoważne następującemu warunkowi

$$\bigwedge_{u \in L^2[0,T]} \langle f(x), C_T(u)\rangle_{L^2[0,a]} = 0 \Rightarrow f(x) \overset{p.w.}{=} 0, \text{ dla } f(x) \in L^2[0,a] \tag{20}$$

Wykorzystując równości (13) i (18) oraz postać iloczynu skalarnego w przestrzeni $L^2[0,a]$, otrzymuje się następującą zależność

$$\langle f(x), C_T(u)\rangle_{L^2[0,a]} = \int_0^a f(x) w_u(T,x)dx =$$

$$= \int_0^{T-h} \Big[\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_jT)\exp(q_js)f_j(b_{oj} + \exp(q_jh)b_{hj})\Big]u(s)\,ds +$$

$$\int_{T-h}^{T} \Big[\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-q_jT)\exp(q_js)f_j\, b_{oj}\Big]u(s)ds \tag{21}$$

Na mocy relacji (21) oraz uwzględniając fakt, że implikacja (20) zachodzi dla wszystkich $u \in L^2[0,T]$, a także korzystając z rezultatów zawartych w pracach [3], [5], [9], warunek (20) można przedstawić w postaci bardziej dogodnej do dalszych rozważań

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_jt)\exp(-q_jT)f_j(b_{oj}+\exp(q_jh)b_{hj})=0 \quad \text{dla} \quad t \in [0,T-h] \\ &\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_jt)\exp(-q_jT)f_jb_{oj} = 0 \quad \text{dla} \quad t \in (T-h,T] \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) \overset{p.w.}{=} 0 \tag{22}$$

gdzie:

$$f_j = \langle f(x), g_j(x)\rangle_{L^2[0,a]} = \int_0^a f(x)g_j(x)dx$$

Dalsza część dowodu będzie prowadzona oddzielnie dla warunku koniecznego i oddzielnie dla warunku wystarczającego, przy czym oba warunki będą dowodzone nie wprost.

Warunek konieczny

Dowód nie wprost

Przypuśćmy, że warunek (19) jest spełniona, a warunek (22) nie zachodzi. Istnieje więc funkcja $\bar{f}(x) \neq 0$, $\bar{f}(x) \in L^2[0,a]$ taka, że zachodzi

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_j t)\exp(-q_j T)\bar{f}_j(b_{oj} + \exp(q_j h)b_{hj}) = 0, \quad \text{dla} \quad t \in [0,T-h]$$

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_j t)\exp(-q_j T(\bar{f}_j\, b_{oj} = 0 \qquad \text{dla} \quad t \in (T-h,T] \tag{23}$$

Ponieważ funkcje $\exp(q_j t)$ $j = 1,2,\ldots$ tworzą układ liniowo niezależny w dowolnym przedziale czasowym [8], [9], więc z równości (23) wynika, że zachodzą równości poniższe

$$\bar{f}_j(b_{oj} + \exp(q_j h)b_{hj}) = 0, \quad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots$$

$$\bar{f}_j\, b_{oj} = 0 \qquad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots \tag{24}$$

Z warunku (19) wynika, że dla każdego indeksu $j = 1,2,\ldots$ zachodzi co najmniej jedna z następujących nierówności: $b_{oj} \neq 0$, $b_{oj} + \exp(q_j h)b_{hj} \neq 0$. Ponieważ funkcja $\bar{f}(x) \neq 0$, więc istnieje przynajmniej jeden indeks $\bar{j}$ taki, że $\bar{f}_{\bar{j}} \neq 0$, [1], [9], [10]. Stąd dla $j = \bar{j}$ zachodzi przynajmniej jedna z poniższych nierówności

$$\bar{f}_{\bar{j}}(b_{o\bar{j}} + \exp(q_{\bar{j}} h)b_{h\bar{j}}) \neq 0$$

$$\bar{f}_{\bar{j}}\, b_{o\bar{j}} \neq 0 \tag{25}$$

co prowadzi do sprzeczności z równościami (24), a zatem do sprzeczności z relacjami (23). Zatem przypuszczenie, że warunek (22) nie zachodzi jest fałszywe, co kończy dowód warunku koniecznego.

<u>Warunek wystarczający</u>

Dowód nie wprost

Przypuśćmy, że warunek (22) jest spełniony, a warunek (19) nie zachodzi. Istnieje więc indeks $\bar{j}$, dla którego zachodzi równość

$$b_{o\bar{j}}^2 + b_{h\bar{j}}^2 = 0 \tag{26}$$

czyli $b_{o\bar{j}} = b_{h\bar{j}} = 0$.

Wybierzmy funkcję $\bar{f}(x) \neq 0$ tak, aby $\bar{f}_{\bar{j}} \neq 0$, oraz $\bar{f}_j = 0$ dla $j \neq \bar{j}$. Stąd uzyskujemy

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_j t)\exp(-q_j T(\bar{f}_j(b_{oj} + \exp(q_j h)b_{hj}) = \exp(q_{\bar{j}} t)\exp(-q_{\bar{j}} T)\bar{f}_{\bar{j}}(b_{o\bar{j}} + \\ &\qquad + \exp(q_{\bar{j}} h)b_{h\bar{j}}) = 0 \\ &\qquad \text{dla} \quad t \in [0,T-h] \\ &\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_j t)\exp(-q_j T)\bar{f}_j\, b_{oj} = \exp(q_{\bar{j}} t)\exp(-q_{\bar{j}} T)\bar{f}_{\bar{j}} = 0 \quad \text{dla} \quad t \in (T-h,T] \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) \neq 0 \tag{27}$$

Warunek (27) jest zaprzeczeniem warunku (22). Zatem przypuszczenie, że warunek (19) nie zachodzi było fałszywe, co kończy dowód warunku wystarczającego i całego twierdzenia.

W przypadku, gdy $T < h$, na podstawie twierdzenia 1 uzyskuje się warunek konieczny i wystarczający aproksymacyjnej sterowalności dla przypadku braku opóźnień w sterowaniu. Warunek ten jest sformułowany we wniosku 1. Podobny warunek został opublikowany w pracach [1 - 4], [6], [8].

Wniosek 1

Jeżeli $T < h$, to układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j = 1,2,\ldots$ zachodzi nierówność

$$b_{oj} \neq 0 \tag{28}$$

Dowód

Jeżeli $T < h$, to wówczas na mocy równości (13) mamy następującą zależność

$$w_u(t,x) = \int_0^t \left(\int_0^a G(t-s,x,y)b_o(y)dy\right)u(s)ds \tag{29}$$

Zatem warunek (22) redukuje się do następującej bardzo prostej postaci [4], [8], [9],

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(q_j t)\exp(-q_j T)f_j b_{oj} = 0 \quad \text{dla} \quad t \in [0,T] \Longrightarrow f(x) \overset{p.w.}{=} 0 \tag{30}$$

Postępując dalej analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1 otrzymuje się tezę wniosku 1.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy mogą być rozszerzone na przypadek sterowania brzegowego, a także na przypadek wielokrotnych stałych opóźnień w sterowaniu. Istnieje także możliwość uogólnienia otrzymanych rezultatów na przypadek wielowymiarowy, to znaczy na przypadek równań parabolicznych określonych w prostopadłościanie $\subset R^n$. Rozpatrywane w niniejszym artykule warunki brzegowe są warunkami typu Dirichleta. W podobny sposób można rozpatrywać zagadnienie względnej aproksymacyjnej sterowalności dla warunków brzegowych typu Neumanna, a także dla warunków brzegowych mieszanych. Natomiast dla układów dynamicznych określonych w dowolnych obszarach przestrzeni R^n, konieczne są pewne modyfikacje przedstawionej powyżej metody postępowania. Modyfikacje te są bezpośrednio związane z własnościami widma operatora A i jego funkcji własnych.

Przykład 1

Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (1) z warunkami (2), (3) - (4), dla którego funkcje $b_o(x)$ oraz $b_h(x)$ spełniają następujące warunki

$$b_o(x) = -b_o(a-x), \quad \text{dla } x \in [0,a] \qquad b_h(x) = b_h(a-x), \quad \text{dla } x \in [0,a]$$

Stąd na mocy relacji (9) oraz (15) i (16) otrzymuje się następujące zależności

$$b_{oj} = 0, \quad \text{oraz} \quad b_{hj} \neq 0, \quad \text{dla} \quad j = 2k - 1, \quad k = 1,2,...$$

$$b_{oj} \neq 0, \quad \text{oraz} \quad b_{hj} = 0, \quad \text{dla} \quad j = 2k, \quad k = 1,2,...$$

Ponieważ $b_{oj}^2 + b_{hj}^2 = 0$, dla $j = 1,2,...$, więc na podstawie twierdzenia 1 rozpatrywany układ dynamiczny jest względnie aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$, $(T > h)$.

Przykład 2

Niech będzie dany układ dynamiczny postaci (1) z warunkami (2), (3) i (4), dla którego funkcje $b_o(x)$ oraz $b_h(x)$ spełniają następujące warunki

$$b_o(x) = - b_o(a - x), \quad \text{dla} \quad x \in [0,a] \quad b_h(x) = -b_h(a - x), \quad \text{dla} \quad x \in [0,a]$$

Stąd na mocy relacji (9) oraz (15) i (16) otrzymuje się następujące zależności

$$b_{oj} = b_{hj} = 0, \quad \text{dla} \quad j = 2k - 1, \quad k = 1,2,...$$

$$b_{oj} \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b_{hj} \neq 0, \quad \text{dla} \quad j = 2k, \quad k = 1,2,...$$

Ponieważ $b_{oj}^2 + b_{hj}^2 = 0$, dla $j = 2k - 1$, $k = 1,2,...$, więc na podstawie twierdzenia 1 rozpatrywany układ dynamiczny nie jest względnie aproksymacyjnie sterowalny na przedziale $[0,T]$, $(t > h)$.

LITERATURA

[1] GLOTHIN G.E.: A modal control model for distributed systems with application to boundary controllability. International Journal on Control, vol. 20, no. 3, s. 417-432, 1974.

[2] GLOTHIN G.E.: Controllability, observability and duality in a distributed parameter system with continuous and point spectrum. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, no. 4, s. 687-690, 1978.

[3] Fattorini H.O.: Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedeon. SIAM Journal on Control, vol. 13, no. 1, s.1-13,1975.

[4] Fattorini H.O., RUSSELL D.L.: Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimonsien. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43, no. 4, s. 272-292, 1971.

[5] KLAMKA J., Relative controllability of infinite-dimensional systems with delays in control. Systems Science, vol. 4, no. 1 s. 43-52, 1978.

[6] RUSSELL D.L.: A unified boundary controllability theory for hiperbolic and parabolic partial differential equations. Studies in Applied Mathematics, vol. III, no. 3, s. 189-211, 1973.

[7] SAKWA Y.: Controllability for partial differential equations of parabolic type. SIAM Journal on Control, vol. 12, no. 3, s. 389-400, 1974.

[8] SEIDMAN T.I.: Approximate boundary controllability for the heat equation. Jornal Mathematical Analysis and Applications, vol. 23, no. 5, s. 699-703, 1968.

[9] TRIGGIANI R.: Controllability and observability in Banach space with bounded operators. SIAM Journal on Control, vol. 13, no. 2, s. 462-491, 1975.

[10] TRIGGIANI R.: Extensions of rank conditons for controllability and observability to Banach spaces and unbounded operators, ibidem, vol. 14, no. 2, s. 313-338, 1976.

УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ

Р е з ю м е

В статье сформулированы необходимые и достаточные условия относительной приближенной управляемости для линейных динамических систем, описанных линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с постоянным запаздыванием в управлении. Даны примеры, иллюстрирующие представленные критерии относительной приближенной управляемости.

THE CONTROLLABILITY CONDITIONS FOR PARABOLIC SYSTEMS WITH DELAY IN CONTROL

S u m m a r y

In the paper the necessary and sufficient conditions for relative approximate controllability for dynamic systems described by linear partial differential equations of parabolic type, with constant delays in control, are formulated. Some examples ilustrating the usefulness of the relative approximate controllability criteria have been given.