ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria : AUTOMATYKA z.52 Nr.kol.645

Ryszard KRASNODĘBSKI

Instytut Meteorologii
i Gospodarki Wodnej

Wrocław

O PEWNYM WSKAŹNIKU JAKOŚCI OPTYMALNEGO STEROWANIA SYSTEMEM WODNO-GOSPODARCZYM

Streszczenie. W artykule rozważa się pewien nieskomplikowany system wodno-gospodarczy (rys.1) i zadanie optymalnego sterowania tym systemem przy założeniu, że funkcje na wejściu do systemu są stałe od chwili początkowej, $t=0$, aż do osiągnięcia horyzontu sterowania, $t=T$. Pokazano, jak rozwiązanie przybliżone w klasie funkcji schodkowych z jednym punktem nieciągłości, αT, zależy od położenia tego punktu i od horyzontu sterowania. Zależność ta jest zilustrowana za pomocą wykresu funkcji celu Q, uzależnionej od parametru α (rys.3) i za pomocą wykresu sterowań zależnych również od parametru α (rys.4).

W niniejszym artykule są rozważane pewne własności funkcji celu (wskaźnika jakości) zastosowanej w pracach Z.Kaczmarka et al. [2] i K.Salewicza [3], w których autorzy zajmują się konstrukcją modelu optymalnego sterowania systemem wodno-gospodarczym Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego. Ponieważ funkcja ta nie jest funkcją kosztów sensu stricto, a jej kształt ma cechy arbitralności, nieodzowną jest rzeczą poddanie możliwie wszechstronnemu zbadaniu formalnych konsekwencji wynikających z przyjęcia takiego właśnie wskaźnika jakości dla określonego systemu, a następnie skonfrontowanie tych konsekwencji z ich stroną praktyczną. Jest to swego rodzaju analiza czułości modelu systemu ze względu na kształt przyjętej funkcji celu. Artykuł niniejszy jest przyczynkiem do tej analizy. Skonstruujemy pewien przykład - nieskomplikowany system wodno-gospodarczy i sformułujemy dla tego systemu zadanie optymalnego sterowania kierując się ideą zawartą w cytowanych pracach. Będziemy się interesować jedynie jakościowymi (nie ilościowymi) cechami rozpatrywanej funkcji celu. Dlatego też wartości parametrów zdefiniowanego niżej systemu pojawiają się tylko wówczas, gdy będzie to pożądane ze względu na przejrzystość ilustracji. Z tego samego względu, a także ze względu na prostotę sformułujemy zadanie sterowania bez ograniczeń. Ich brak nie zmieni ogólnych wniosków jakie wynikają z poniższej analizy.

Elementami rozważanego niżej systemu (rys.1) są : zbiornik wodny i przepływająca przezeń rzeka, miasto X pobierające wodę ze zbiornika, zrzut ścieków w przekroju P rzeki poniżej ujścia ze zbiornika.

Zakładamy :

a) proces samooczyszczania możemy zaniedbać,

b) system jest pozbawiony inercji.

Oznaczenia :

- t – czas rzeczywisty,
- T – horyzont sterowania,
- $w(t)$ – stan zbiornika (trajektoria zbiornika),
- $\bar{w}(t)$ – pożądany stan zbiornika,
- $d(t)$ – prognoza naturalnego dopływu do zbiornika,
- $z(t)$ – zapotrzebowanie na wodę miasta X ,
- $s(t)$ – prognoza ładunku zanieczyszczeń dopływających do rzeki w przekroju P ,
- $m(t)$ – natężenie przerzutu wody ze zbiornika do miasta X (zmienna decyzyjna),
- $u(t)$ – odpływ ze zbiornika (zmienna decyzyjna),
- c – pożądane średnie stężenie zanieczyszczającej rzekę substancji, ze względu na którą formułujemy zadanie optymalnego sterowania,
- $q(t)$ – przepływ w przekroju P , przy którym stężenie zanieczyszczenia nie przekracza pożądanego, $q(t) = s(t)/c$.

Jeżeli zrzut ścieków jest usytuowany na brzegu rzeki, stężenie interesującego nas zanieczyszczenia jest większe przy tym brzegu niż przy brzegu przeciwległym. Przyjmiemy, że pożądane stężenie c , uśrednione w całym przekroju, jest wyższe od normatywnego c_n , również uśrednionego w całym przekroju. Rys.2 ilustruje te dwa pojęcia: stężenia uśrednione i rozkłady stężeń w poprzek rzeki. Gdybyśmy przyjęli, że stężenie pożądane z punktu widzenia sterowania jest równe nieprzekraczalnemu stężeniu normatywnemu, w funkcji celu musielibyśmy pominąć odpowiadający temu stężeniu składnik i w konsekwencji zadanie sterowania byłoby inne. Oczywiście, zadanie optymalnego sterowania realnym systemem winno zawierać ograniczenie pożądanego stężenia większe zarówno od c_n jak i od c .

Model optymalnego sterowania opisanego wyżej systemu zawiera :

równanie stanu zbiornika

$$w(t) = d(t) - m(t) - u(t)$$

oraz funkcję celu

$$Q = \int_0^T \left\{ [z(t) - m(t)]_*^2 + [q(t) - u(t)]_*^2 + [w(t) - \bar{w}(t)]^2 \right\} dt ,$$

gdzie symbol $*$ ma następujące znaczenie :

$$(z-m)_*^2 = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \le m, \\ (z-m)^2, & \text{gdy } z > m. \end{cases}$$

Współczynnikom wagowym, występującym w funkcji celu zdefiniowanej w cytowanych na początku artykułu pracach, nadaliśmy wartość 1 . To uproszczenie nie zmniejsza ogólności naszych wniosków.

Niech w naszym przykładzie prognozy wejść do systemu oraz pożądane wielkości będą stałymi w całym przedziale $[0, T]$, to znaczy niech $\bar{\bar{w}}$ = const, d = const, z = const, q = s/c = const.

Niech ponadto stan początkowy zbiornika będzie równy stanowi pożądanemu $\bar{w}$. Praktycy w dziedzinach związanych ze sterowaniem systemami wodno-gospodarczymi oczekują, jak dwukrotnie przekonał się autor niniejszego artykułu, rozwiązania następującego : m = const i u = const w całym przedziale $[0, T]$. Tymczasem funkcja celu wymusza inne rozwiązanie.

Nie podejmiemy dyskusji nad rozwiązaniem ciągłym, a jedynie nad rozwiązaniem w klasie funkcji schodkowych aproksymującym rozwiązanie ciągłe. Zwykle poszukuje się aproksymacji w tego typu klasie funkcji o tej własności, że jej sąsiednie punkty nieciągłości są jednakowo od siebie oddalone (M.D.Canon et al. [1]). W naszym poszukiwaniu aproksymacji ciągłego rozwiązania postąpimy nieco inaczej. Podzielimy przedział $[0, T]$ na dwa punktem αT, $\alpha \in [0, 1]$ i będziemy poszukiwać takiego α , dla którego funkcje schodkowe postaci

$$m(t) = \begin{cases} m_1, & t \in [0, \alpha T), \\ m_2, & t \in [\alpha T, T], \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & t \in [0, \alpha T) \\ u_2, & t \in [\alpha T, T], \end{cases}$$

gdzie m_1 , m_2 , u_1 , u_2 są stałymi minimalizującymi funkcję celu. Zdefiniowane wyżej sterowanie zależne od parametru α oznaczymy symbolem $D(\alpha)$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia :

$$\delta = z + q - d$$

$$\varepsilon_1 = q - u_1 \; ; \quad \varepsilon_2 = q - u_2 ,$$

$$\eta_1 = z - m_1 \; ; \quad \eta_2 = z - m_2 .$$

Symbol δ oznacza różnicę między łącznym zapotrzebowaniem na wodę a dopływem do zbiornika, pozostałe zaś oznaczają różnicę między zapotrzebowaniem a sterowanym zaspokojeniem ; te ostatnie są zatem korektami potrzeb dokonanymi z punktu widzenia optymalizacji wskaźnika jakości. Zmienne decyzyjne u_j i m_j zamieniliśmy zmiennymi decyzyjnymi ε_j, η_j, $j = 1, 2$.

W nowych oznaczeniach mamy dwa równania stanu zbiornika :

$$\dot{w}_1(t) = \varepsilon_1 + \eta_1 - \delta , \quad \text{dla} \quad t \in [0 , \alpha T] ,$$
$$\dot{w}_2(t) = \varepsilon_2 + \eta_2 - \delta , \quad \text{dla} \quad t \in [\alpha T , T] ,$$

których rozwiązanie łatwo otrzymać, a mianowicie :

$$w_1(t) = (\varepsilon_1 + \eta_1 - \delta)\, t + \bar{w} , \qquad t \in [0 , \alpha T] ,$$
$$w_2(t) = (\varepsilon_2 + \eta_2 - \delta)\, t + TE + \bar{w} , \qquad t \in [\alpha T , T] ,$$

gdzie $E = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \eta_1 - \eta_2$. Funkcja celu ma zatem postać

$$Q = \int_0^{\alpha T} (\eta_1)_*^2\, dt + \int_{\alpha T}^{T} (\eta_2)_*^2\, dt + \int_0^{\alpha T} (\varepsilon_1)_*^2\, dt + \int_{\alpha T}^{T} (\varepsilon_2)_*^2\, dt +$$
$$+ \int_0^{\alpha T} (\varepsilon_1 + \eta_1 - \delta)^2\, t^2\, dt + \int_{\alpha T}^{T} [(\varepsilon_2 + \eta_2 - \delta)t + \alpha TE]^2\, dt$$

łatwą do scałkowania. Zauważmy, że funkcja Q jest symetryczna względem par : ε_1, η_1 oraz ε_2, η_2. Rozwiązanie zadania musi mieć zatem postać $\varepsilon_1 = \eta_1$ oraz $\varepsilon_2 = \eta_2$. Oznaczmy dla prostoty wspólne wartości tych zmiennych decyzyjnych symbolami, odpowiednio x i y. Funkcja celu ma więc w tych oznaczeniach postać :

$$Q = 2\int_0^{\alpha T} x_*^2\, dt + 2\int_{\alpha T}^{T} y_*^2\, dt + \int_0^{\alpha T} (2x - \delta)^2\, t^2\, dt + \int_{\alpha T}^{T} [(2y - \delta)t +$$
$$+ 2\,(x-y)\,\alpha T]^2\, dt ,$$

również łatwą do scałkowania jak poprzednia.

Rozważmy przypadek, w którym $\delta > 0$; przypadek ten oznacza, że dopływ do zbiornika nie pokrywa łącznego zapotrzebowania na wodę. Z czterech możliwości rozwiązań: a) $x > 0$, $y > 0$; b) $x > 0$, $y < 0$; c) $x < 0$, $y > 0$; d) $x < 0$, $y < 0$ rozważymy szczegółowo pierwszy z nich. Pozostałe prowadzą, jak się zdaje, do sprzeczności. Czy fakt ten ma miejsce można sprawdzić na drodze rachunkowej, co pozostawiamy Czytelnikowi. (Sprzeczność zachodzi dla $\alpha = 1$). Sprzeczność w przypadkach b, c i d jest intuicyjna : jeżeli dopływ do zbiornika nie pokrywa zapotrzebowania łącznego, należy oczekiwać, że optymalne sterowanie zrzutem wody ze zbiornika i dostawą wody do miasta X nie pokryje pożądanego zapotrzebowania.

Funkcja Q ma dla $x > 0$ i $y > 0$ po scałkowaniu postać :

$$Q = \frac{T}{3}\Big\{6\left[\alpha x^2 + (1-\alpha)\,y^2\right] + T^2\left[\alpha^3(2x-\delta)^2 + (2y-\delta)^2(1-\alpha^3) + \right.$$
$$\left. + 6\alpha(x-y)(2y-\delta)(1-\alpha^2) + 12\,\alpha^2(x-y)^2(1-\alpha)\right]\Big\}.$$

Różniczkując funkcję Q względem x i y , a pochodne przyrównując do zera, otrzymujemy układ równań, który ma następujące rozwiązanie :

$$x(\alpha) = \left[3(3-\alpha^2) + \alpha(1-\alpha)^2(3+\alpha)\,T^2\right]\,T^2\delta/A,$$

$$y(\alpha) = (1-\alpha)\left[3(2+\alpha) - \alpha(\alpha^2+\alpha-3)\,T^2\right]\,T^2\delta/A,$$

gdzie :

$$A = 9 + 6(1+\alpha-\alpha^2)\,T^2 - \alpha(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha-3)\,T^4.$$

Wobec $x(\alpha) \neq y(\alpha)$ w sterowaniu $D(\alpha)$ pojawiają się w sposób istotny dwa okresy ; oznaczmy sterowanie w okresie pierwszym $[0, \alpha T]$ przez $D_1(\alpha)$ i w drugim $[\alpha T, T]$ przez $D_2(\alpha)$. Mamy więc

$$D(\alpha): \begin{cases} D_1(\alpha) = (q - x(\alpha),\ z - x(\alpha)), \\ D_2(\alpha) = (q - y(\alpha),\ z - y(\alpha)). \end{cases}$$

Rys.3 ilustruje zależność wskaźnika jakości Q od parametru α . Po podstawieniu do prawej strony wzoru (*) w miejsce x i y rozwiązań $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ można się przekonać, że wartość wskaźnika jakości jest proporcjonalna do δ^2. Zatem wnioski, jakie odczytamy z ilustracji są niezależne od δ.

Jak wspomnieliśmy, wbrew oczekiwaniom, rozwiązanie nie należy do klasy D(1), lecz do pewnej klasy $D(\alpha)$, w której α jest funkcją horyzontu T. Z dokładnością do 0,05 mamy (rys.3) : dla T=2 optymalną klasę D(0,7), dla T=4 i T=6 klasę D(0,8), dla T=8 klasę D(0,9). Uzasadnione jest, jak widać z rysunku, przypuszczenie, że w granicy dla $T \to \infty$, optymalną klasą jest oczekiwana przez praktyków klasa D(1). Wydaje się jednak, że zadanie sterowania optymalnego, zarówno niewielkim systemem, jakim zajmujemy się w tym artykule, jak i systemem bardzo złożonym, jakim system GOP, należy formułować dla sterowań operacyjnych, tj. sterowań z krótkim horyzontem czasowym. Sterowanie jest zależne od prognoz meteorologicznych i hydrologicznych (tj. na przykład od d(t), których błąd jest stosunkowo niewielki dla krótkich przedziałów czasu i rośnie, gdy horyzont się oddala. Zbadanie czułości systemu ze względu na przyjęty model sterowania jest rzeczą konieczną. Trudno jest oczekiwać, zwłaszcza gdy system jest skomplikowany, by względny błąd optymalnego sterowania, jako wynik błędu prognozy, był mniejszy niż błąd samej profnozy. Korygowanie natomiast sterowania przed osiągnięciem założonego w chwili początkowej horyzontu T stawia pod znakiem zapytania optymalność w okresie poprzedzającym korektę. Z tych właśnie względów autor tego artykułu sądzi, że T winno być małe. Dla małych T natomiast istotnego znaczenia nabiera, jak pokazuje nasz przykład, podział przedziału [0 , T] na takie podprzedziały (nie koniecznie dwa), żeby była osiągnięta przy tym podziale optymalna aproksymacja w klasie funkcji schodkowych.

Przyjrzyjmy się z kolei zaspokojeniu zarówno potrzeb miasta X , jak i potrzeb z punktu widzenia zachowania odpowiedniej jakości wody w przekroju P . Rysunek 4 ilustruje sterowanie w klasach D(0 , 2), D(0 , 4), D(0 , 6), D(0 , 8) i D(1) dla horyzontu T=2 oraz sterowanie optymalne D(0 , 7) dla T=2 . Odczytajmy dla przykładu: dla T=2 w sterowaniu optymalnym D(0,7) obniżenie zaspokojenia zapotrzebowania aglomeracji X oraz niedostatek odpływu ze zbiornika, jaki zapewniłby pożądane stężenie w przekroju P, winny wynosić 0,405 (=x) w pierwszym okresie długości 0,7 T , natomiast 0,161 (=y) w drugim okresie długości 0,3 T.

Przykład nasz wskazuje również drogę rozwiązania numerycznego, jest nią mianowicie metoda programowania liniowego.

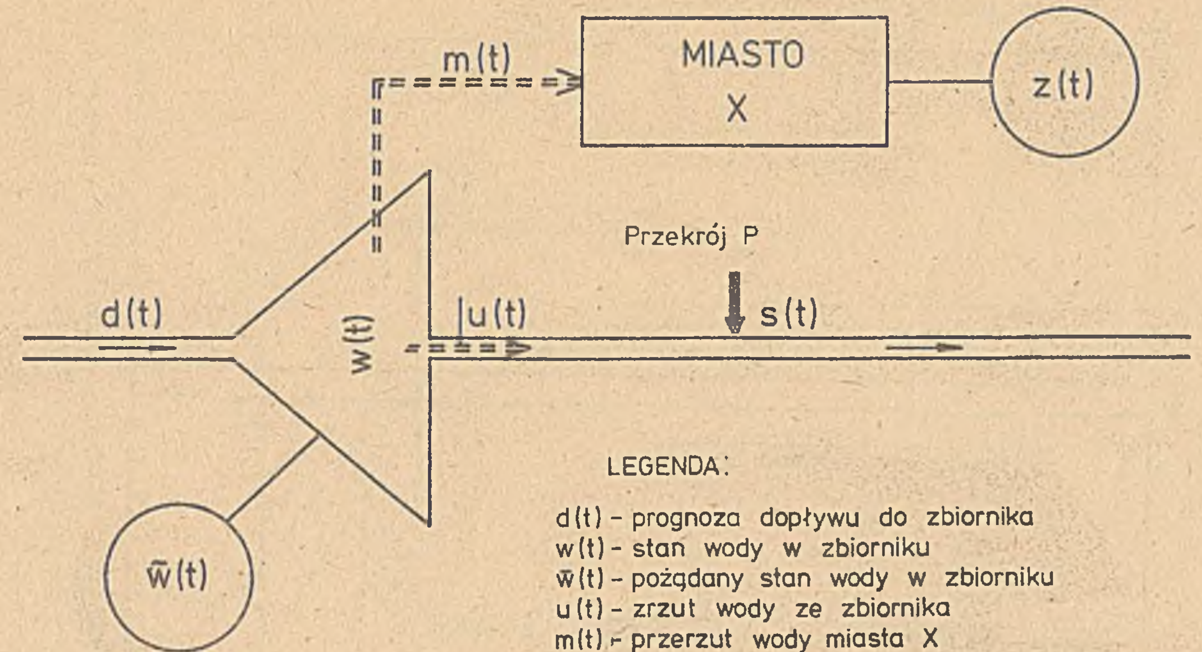
Jest rzeczą oczywistą, że analiza bardziej skomplikowanego systemu nastręczyłaby bardziej skomplikowane problemy i większe trudności rachunkowe.

LITERATURA

[1] Canon M.D., Cullum C.D.,jr, Polak E. : Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne, Warszawa 1975, WNT.

[2] Kaczmarek Z., Malinowski K., Salewicz K. : Long term resources allocation for control purposes in a water management system. Int.Symp. of Logistics and Benefits of Using Mathematical Models of Hydrologic and Water Resources Systems, Pisa, 24-26.X.1978.

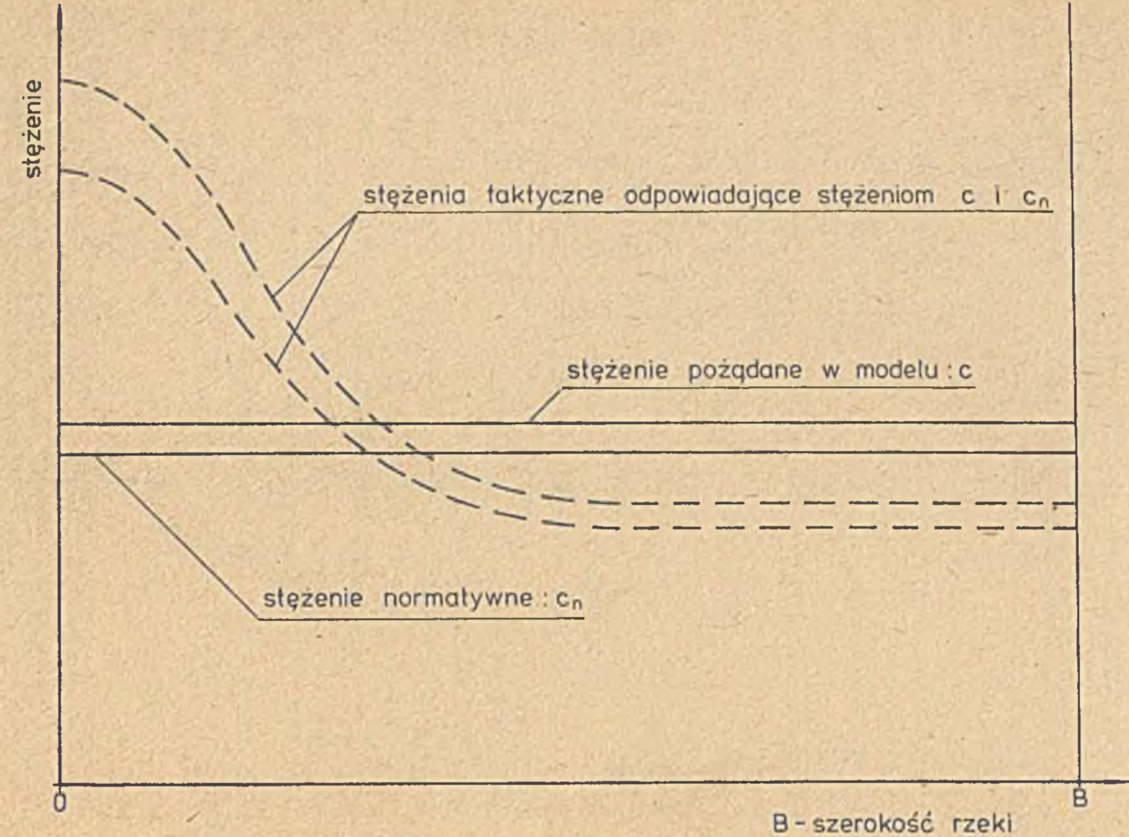
[3] Salewicz K.: Model optymalizacyjny systemu wodno-gospodarczego, Rozdz.I w "Opracowanie i próbne uruchomienie algorytmu sterującego zbiorem modeli dla systemu wodno-gospodarczego w regionie przemysłowym. Zakład Gospodarki Wodnej IMGW, 1978, (maszynopis).



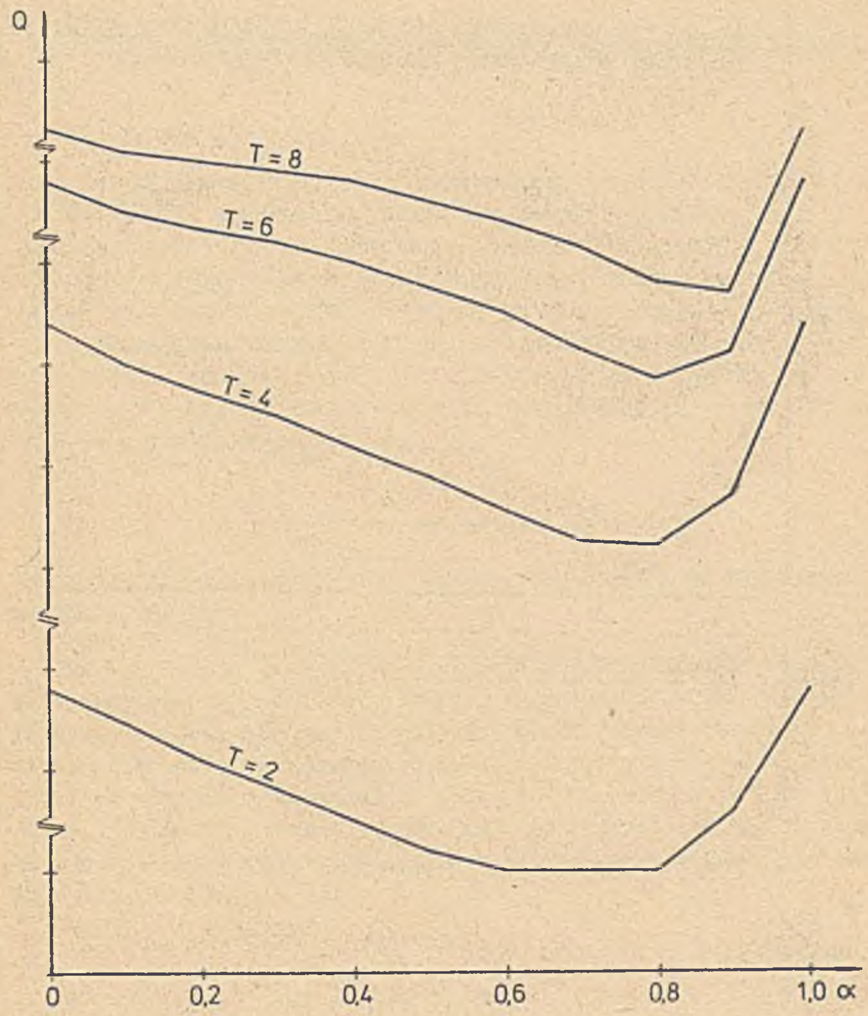
LEGENDA:

d(t) - prognoza dopływu do zbiornika
w(t) - stan wody w zbiorniku
w̃(t) - pożądany stan wody w zbiorniku
u(t) - zrzut wody ze zbiornika
m(t) - przerzut wody miasta X
z(t) - pożądane zapotrzebowanie na wodę miasta X
s(t) - prognoza zrzutu ładunków zanieczyszczeń

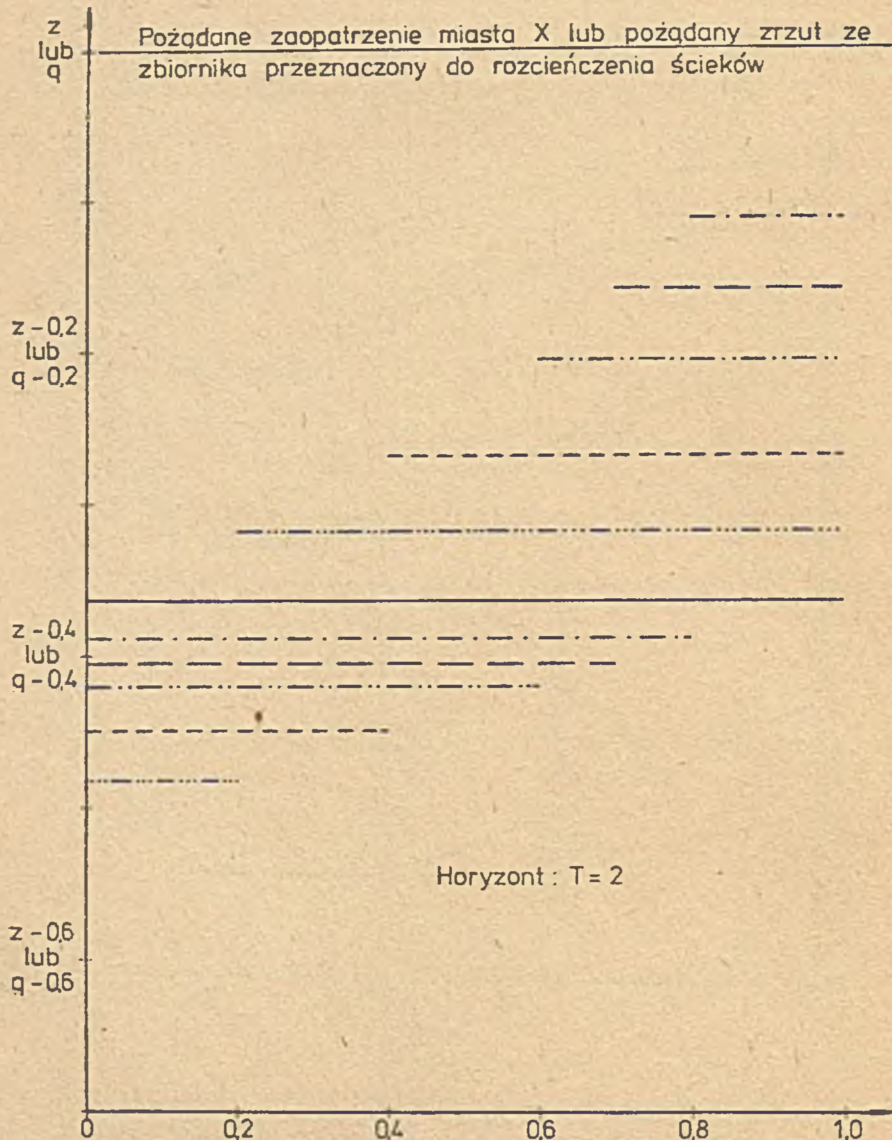
Rys.1 SYSTEM WODNO - GOSPODARCZY MIASTA X



Rys.2 ZWIĄZEK MIĘDZY STĘŻENIEM POŻĄDANYM I NORMATYWNYM



Rys.3 WYKRESY OPTYMALNYCH WARTOŚCI WSKAŹNIKA JAKOŚCI Q DLA DANEGO HORYZONTU T W ZALEŻNOŚCI OD α



Rys.4 STEROWANIA, $D_1(q-x, z-x)$ W PRZEDZIALE $[0, \alpha T]$ I D_2 $(q-y, z-y)$ W PRZEDZIALE $[\alpha T, T]$, DLA $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ i 1 ORAZ STEROWANIE W KLASIE OPTYMALNEJ t.j. DLA $\alpha = 0.7$

О НЕКОТОРОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФИНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ВОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

Р е з ю м е

Рассматривается несложную систему водного хозяйства, Рис.I. Решается задачу оптимизации управления системой принимая, что финкции на входе системы постоянные от начального момента, $т = 0$, до горизонта управления, $т = T$. Показано как приближенное решение в класе ступеньчатоих функций с одной точкой розрива, αT, зависит от положения этой точки и от горизонта управления. Рисунок 3 иллюстрирует целевую функцию, Q , значения которой зависям от параметра α . Рисунок 4 показывает как переменные управления зависят также от параметра α.

ABOUT ONE PERFORMANCE INDEX OF THE OPTIMUM CONTROL OF THE WATER-ECONOMIC SYSTEM

Summary

The article deals with the optimum control problem of the simple water-economic system (Fig.1). There is assumed that the income function are constant during all the control period (from $t=0$ until $t=T$). It is shown how the approximate solution in the class of the function with one discontinuity point, αT, depends on both the position of the discontinuity point and the control period. This dependences are ilustrated by the performance index curves and the control sets curves (Fig. 3, 4).