

Janina SZEBESZCZYK
Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

MODEL MATEMATYCZNY PROCESU FILTRACJI WODY W FILTRACH POSPIESZNYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono przegląd modeli matematycznych procesu filtracji oraz możliwości ich wykorzystania przy sterowaniu pracą filtrów pospiesznych. Zaproponowano metodę wyznaczania optymalnych wartości prędkości filtracji i czasu trwania cyklu filtracyjnego.

1. Wstęp

Celem artykułu jest przedstawienie modelu matematycznego procesu filtracji oraz możliwości wykorzystania modelu przy sterowaniu pracą filtrów. Badania nad zastosowaniem modeli matematycznych do sterowania procesem filtracji nie były dotychczas w Polsce przeprowadzane. W literaturze występują dwa rodzaje modeli procesu filtracji: modele fizyczne i modele chemiczne.

W modelach chemicznych analizowane są charakterystyki chemiczne fazy ciekłej, zawiesin i medium filtracyjnego. Modele te przedstawiane są zazwyczaj w formie opisowej ze względu na trudności sformułowania ich postaci matematycznej.

Z przeglądu chemicznych teorii filtracji [1] wynika, że istnieje wiele różnorodnych teorii, a ich stopień zaawansowania nie wystarcza, by zastosować modele chemiczne do sterowania lub predykcji pracy filtru. Z tego względu w niniejszym artykule zostaną przedstawione jedynie fizyczne modele procesu filtracji.

2. Podstawowe równania filtracji

Zjawisko filtracji można rozpatrywać jako efekt dwóch przeciwdziałających procesów:

- procesu usuwania zawiesin z wody filtrowanej i ich zatrzymywania na ziarnach złoża filtru pod wpływem sił przylepiania,
- procesu odrywania się od ziaren złoża uprzednio przylepionych cząstek

pod wpływem hydrodynamicznego oddziaływania strumienia filtrowanej wody.

Wszystkie modele fizykalne wyprowadzane są z dwóch podstawowych równań sformułowanych po raz pierwszy w roku 1937 przez Iwasaki [2] :

- równanie bilansu masy zawieszin

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial l} \quad /1/$$

- równanie kinetyki zjawisk w warstwie filtracyjnej

$$-\frac{\partial c}{\partial t} = \lambda \cdot c \quad /2/$$

W równaniach zastosowano oznaczenia:

- ζ - stopień zanieczyszczenia złoża (stężenie zatrzymanych zawieszin w jednostce objętości złoża filtru w danej chwili czasu),
- c - objętościowe stężenie zawieszin w filtrowanej wodzie,
- v - umowna prędkość przepływu wody przez złoże filtru (definiowana jako iloraz objętościowego natężenia przepływu wody i powierzchni filtru),
- l - wysokość złoża filtru,
- t - czas filtracji,
- λ - współczynnik proporcjonalności zwany również współczynnikiem filtracji lub współczynnikiem oporu filtru.

Równanie bilansu zanieczyszczeń /1/ wyraża równowagę między prędkością ubywania zanieczyszczeń z wody a prędkością gromadzenia się zanieczyszczeń w złożu. Warunkiem spełnienia równania bilansu jest stała gęstość i porowatość osadzonego materiału wzdłuż strumienia wody w złożu oraz brak reakcji biologicznych i chemicznych, które powodują akumulację w osadzie lub usuwanie z niego materiałów rozpuszczalnych.

Równanie kinetyki /2/ określa fakt, że szybkość zmiany objętościowego stężenia zawieszin w wodzie przy przepływie przez elementarną warstwę filtracyjną jest proporcjonalna do stężenia zawiesziny (przed warstwą).

W modelu matematycznym procesu filtracji stosowanym przez Deba [3] wprowadzono modyfikacje równań /1/ i /2/. Po uwzględnieniu zmiany masy zawiesziny wewnątrz porów złoża równanie /1/ przyjmuje postać:

$$v \frac{\partial c}{\partial l} + (1 - \varepsilon_s) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\varepsilon - \zeta) \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad /4/$$

ε - porowatość złoza, ε_g - porowatość osadzonej zawiesiny.

Ponieważ stężenie zawiesiny $c = F(l, t)$, zamiast równania /2/ Deb stosuje równanie:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{v}{\varepsilon - \sigma} \frac{\partial c}{\partial l} + \frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda' \cdot c \quad /5/$$

gdzie: λ' - zmodyfikowany współczynnik filtracji.

Równania /4/ i /5/ określają fizyczny model filtracji przy założeniu ciągłości procesu. W początkowym okresie filtracji zawiesina wypiera czystą wodę z porów złoza, powstaje nieciągłość gradientu stężenia wzdłuż całej wysokości złoza i równania /4/ i /5/ nie są spełnione. Dlatego jako początek cyklu filtracji ($t = 0$) przyjmuje się moment, w którym zawiesina już wypełniła pory złoza na całej jego głębokości. Wprowadzając do równań /4/ i /5/ bezwymiarowe zmienne \underline{t} , \underline{l} , \underline{c} , $\underline{\lambda}$ otrzymuje się równanie filtracji w postaci uogólnionej:

$$\frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{l}} + (\varepsilon - \sigma) \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{t}} + \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial \underline{t}} = 0 \quad /6/$$

$$\frac{1}{\varepsilon - \sigma} \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{l}} + \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{t}} = -\underline{\lambda}' \cdot \underline{c} \quad /7/$$

gdzie:

$$\underline{t} = \frac{v}{L} t$$

$$\underline{l} = \frac{l}{L}$$

$$\underline{c} = \frac{c}{c_0}$$

c_0 - stężenie zawiesiny w wodzie na dopływie do filtru

$$\underline{\lambda} = \lambda' \cdot \frac{L}{v}$$

3. Zależność współczynnika filtru od stopnia zanieczyszczenia złoza

Współczynnik filtru λ zależy od szeregu zmiennych, między innymi od: wielkości ziaren i porowatości złoza, fizykochemicznych własności filtrowanej wody, prędkości filtracji, stopnia zanieczyszczenia złoza. Dla analizy przebiegu procesu filtracji oraz możliwości jego predykcji szczególnie istotne jest określenie zależności $\lambda = \lambda(\sigma)$. Poniżej

przedstawiono wyniki rozważań teoretycznych oraz badań doświadczalnych uzyskane przez różnych autorów.

Iwasaki [2] sugerował występowanie zależności:

$$\lambda = \lambda_0 + k \cdot \zeta \quad /8/$$

gdzie:

- λ_0 - początkowy współczynnik filtracji,
 k - stała.

Na podstawie rozważań teoretycznych Ives [8] wykazał, że w początkowym okresie filtracji współczynnik λ narasta liniowo ze wzrostem ζ , zgodnie z równaniem podanym przez Iwasaki. W późniejszym okresie filtracji λ maleje ze wzrostem ζ . Zjawisko to jest spowodowane zwiększeniem prędkości przepływu wewnątrz porów złoża i zmniejszeniem się powierzchni osadzania na ziarnach złoża. Na tej podstawie Ives zaproponował zastosowanie zależności [9]:

$$\lambda = \frac{\alpha}{d^m} + \frac{\beta}{d^m} \zeta - \frac{\gamma}{d^m} \frac{\zeta^2}{\xi - \zeta} \quad , \quad /9/$$

gdzie:

- α, β, γ - stałe procesu,
 d - średnica ziaren złoża,
 m - stała zależna od rodzaju zawiesiny.

Celem określenia zależności $\lambda = \lambda(\zeta)$ Mohanka [10] przyjął następujące założenia:

Na początku procesu filtracji ziarna złoża są kuliste i jednolicie otoczone przez osadzone cząsteczki zawiesiny. Narastający osad stopniowo wypełnia wolne przestrzenie, pozostawiając kanaliki przepływu o kształcie w przybliżeniu cylindrycznych. Przy dalszym zwiększaniu się osadu kanaliki te zwężają się, co powoduje zwiększenie prędkości cieczy aż do prędkości granicznej, która umożliwia dalsze osadzanie.

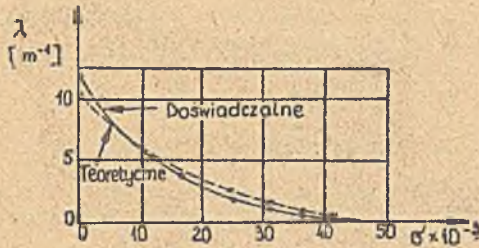
Należy zauważyć, że Mohanka nie uwzględnił wpływu wzajemnego stykania się ziaren złoża na osadzanie się zawiesiny. Przy przyjęciu powyższych założeń zależność $\lambda = \lambda(\zeta)$ przyjmie postać:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + p \frac{\zeta}{\xi}\right)^x \left(1 - \frac{\zeta}{\xi}\right)^y \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_\mu}\right)^z \quad /10/$$

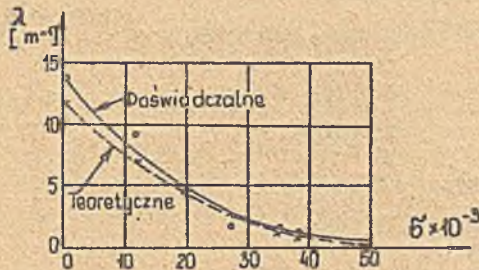
gdzie:

- p - stała, zależna od wymiaru ziaren złoża,
 ζ_μ - graniczny stopień zanieczyszczenia złoża.

Parametry λ_0 , p , x , Y , Z , σ_{μ} zostały określone doświadczalnie dla poszczególnych cieczy i zawiesin stosowanych w eksperymentach. Porównanie teoretycznych i eksperymentalnych zależności $\lambda = \lambda(\sigma)$, które uzyskał S. Mohanka [11] przedstawiono na rys.1 i 2.



Rys.1. Zależność współczynnika filtracji od stopnia zanieczyszczenia złoza wyznaczona teoretycznie i doświadczalnie dla prędkości filtracji 0,04 m/s (S. Mohanka [11])



Rys.2. Zależność współczynnika filtracji od stopnia zanieczyszczenia złoza wyznaczona teoretycznie i doświadczalnie dla prędkości filtracji 0,02 m/s (S. Mohanka [11])

Zgodność przebiegów teoretycznych i doświadczalnych jest uzasadniona faktem, że parametry równania /10/ zostały określone na podstawie badań doświadczalnych.

Rozważając proces filtracji Deb [3] przyjęła, że zawiesziny osadzają się na ziarnach złoza w postaci jednolitej otoczki. Wziął on pod uwagę wpływ wzajemnego stykania się ziaren w złożu i przeanalizował zmiany powierzchni osadzania na ziarnach złoza w trakcie filtracji. Uwzględniając szereg zmiennych fizycznych wpływających na mechanizm filtracji Deb zastosował następujące równanie określające zmodyfikowany współczynnik filtracji λ' :

$$\lambda' = p \frac{\rho v^2}{\mu} \left[\frac{\rho v}{\mu} \frac{(\varepsilon - \zeta) d}{\psi_0 (1 - \varepsilon)} \frac{1}{x} \right]^{a'} \left[\frac{\rho_s}{\rho} \right]^{b'} \left[\frac{\rho v}{\mu} \frac{\varepsilon_s d_s}{\psi' (1 - \varepsilon_s)} \right]^{c'} \quad /11/$$

$$x = 1 + \left(2 - \frac{n}{2} \right) \frac{\Delta d}{d} + \left(1 - \frac{n}{2} \right) \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 \quad /12/$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{12}{n \psi_0 - 24} - \sqrt{\frac{144}{(n \psi_0 - 24)^2} - \frac{24}{(n \psi_0 - 24)} \frac{\zeta}{3(1 - \varepsilon)}} \quad /13/$$

gdzie:

ψ_0 - współczynnik kształtu czystych ziaren,

$n = \frac{15,77 - 26,51}{1 - \varepsilon}$ - średnia liczba styku ziaren,

d - średnica ziaren,

$\frac{\Delta d}{2}$ - grubość warstwy zawiesiny otaczającej ziarno,

μ - lepkość dynamiczna,

ρ_s - gęstość osadzonych zawieszin,

ρ - gęstość filtrowanej cieczy,

d_s - wymiar cząstki zawiesiny,

ψ' - współczynnik kształtu zawiesiny,

ε_s - porowatość zawiesiny,

P, a', b', c' - parametry wyznaczone eksperymentalnie.

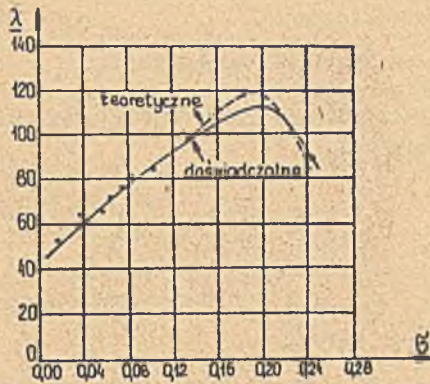
Bezwymiarowy współczynnik filtracji λ będzie wyrażony jako:

$$\lambda = PL \frac{\rho v}{\mu} \left[\frac{\rho v}{\mu} \frac{(\varepsilon - \zeta) d}{\psi_0 (1 - \varepsilon)} \frac{1}{x} \right]^{a'} \left[\frac{\rho_s}{\rho} \right]^{b'} \left[\frac{\rho v}{\mu} \frac{\varepsilon_s d_s}{\psi' (1 - \varepsilon_s)} \right]^{c'} \quad /14/$$

Przy stałej temperaturze, jednolitym uziarnieniu, jednolitej zawiesinie i stałej prędkości filtracji wszystkie współczynniki w równaniu /14/, za wyjątkiem x i współczynnika zawierającego ζ , są stałe podczas cyklu filtracyjnego dla danego złoża, zawiesiny i filtrowanej cieczy. W takiej sytuacji równanie /14/ może być uproszczone do postaci:

$$\lambda = B \left(\frac{x}{\varepsilon - \zeta} \right)^A \quad /15/$$

Parametry A i B zależą od charakterystyk złoża, zawiesiny i filtrowanej cieczy. Powinny one zostać określone eksperymentalnie dla każdego cyklu filtracyjnego. Zależności $\lambda = \lambda(\sigma)$ obliczone teoretycznie na podstawie równania /14/ oraz określone doświadczalnie przedstawiono na rys.3



Rys.3. Zależność bezwymiarowego współczynnika filtracji od stopnia zanieczyszczenia złoża wyznaczona teoretycznie i doświadczalnie (A.Deb [3])

Równanie /14/ dobrze aproksymuje krzywą doświadczalną $\lambda = \lambda(\sigma)$ za wyjątkiem końcowego okresu cyklu. Dla większości wartości σ zwiększenie osadzania powoduje łączenie się powierzchni styków otoczonych zawieszoną ziaren, co zmienia geometrię styku ziaren. Przy określaniu zależności $\lambda = \lambda(\sigma)$ należałoby również uwzględnić zmiany prędkości cieczy w porach złoża wraz z jego zanieczyszczeniem [12]. Zmiany te odgrywają istotną rolę zwłaszcza pod koniec cyklu filtracyjnego.

Przyjmując te same założenia o sposobie osadzania się zawieszin w złożu, na których opierał się Deb, Hereit [13] uzyskał następującą zależność $\lambda = \lambda(\sigma)$:

$$\lambda = k_1 \xi a - k_2 \left[\frac{1(\epsilon - \sigma)}{a} - \frac{1_0 \epsilon}{a_0} \right] \quad /16/$$

gdzie:

- k_1 - współczynnik określający własności filtrowanych zawieszin i złoża filtru,
- ξ - współczynnik określający powierzchnię ziaren złoża,

$$\xi = \frac{G}{G_{kr}} (\xi_{\max} - 1) + 1 \quad /17/$$

- a - powierzchnia ziarna złoża w chwili t ,
 k_2 - współczynnik określający własności filtrowanych zawiesin,
 i - spadek hydrauliczny.

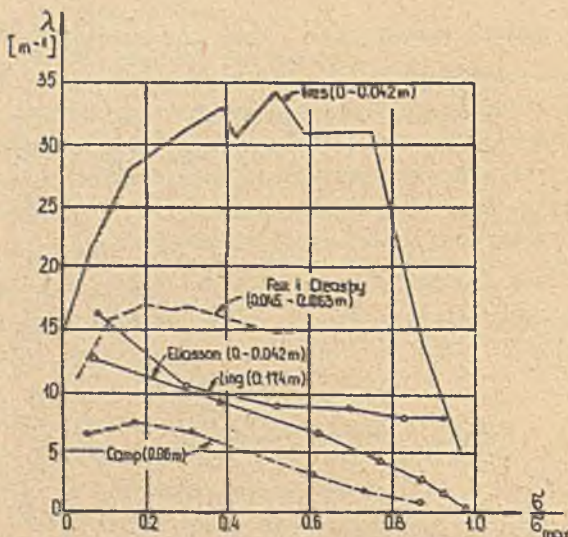
Indeks 0 oznacza wartości początkowe.

Dla określenia wartości $\frac{1}{I_0}$ wykorzystano zależność doświadczalną stosowaną przez Minca [4]:

$$\frac{1}{I_0} = \left(1 - \frac{G}{\varepsilon}\right)^{-3,46} \quad /18/$$

Parametry k_1 , k_2 , ξ_{\max} , G_{kr} określono eksperymentalnie, dla danego filtru i warunków filtracji.

Zależność $\lambda = \lambda(G)$ może zostać wyznaczona doświadczalnie na podstawie równania /2/. Na rys.4 przedstawiono porównanie zależności $\lambda = \lambda\left(\frac{G}{G_{\max}}\right)$ uzyskanych doświadczalnie przez różnych autorów [14].



Rys.4. Porównanie zależności $\lambda = \lambda\left(\frac{G}{G_{\max}}\right)$ otrzymanych doświadczalnie przez różnych autorów

ζ_{\max} jest maksymalną wartością ζ dla danego cyklu filtracyjnego. Pomimo, że badania eksperymentalne były przeprowadzane w różnych warunkach, otrzymane maksymalne wartości λ zawarte są w zakresie jednego rzędu wielkości.

4. Zależność strat ciśnienia na złożu od stopnia zanieczyszczenia złoża

Zależność strat ciśnienia na złożu od stopnia zanieczyszczenia złoża opisuje równanie Kozeny - Carmana:

$$\frac{\Delta H}{L} = v \cdot \frac{\nu S_0^2}{g} \cdot k_0 \left(\frac{L_e}{L} \right)^2 \frac{(1 - \epsilon)^2}{\epsilon^3} \quad /19/$$

gdzie:

- $\frac{\Delta H}{L}$ - spadek hydrauliczny,
- v - średnia prędkość filtracji,
- ϵ - porowatość złoża,
- S_0 - pole powierzchni, na której następuje osadzanie się zawiesin,
- ν - lepkość kinematyczna cieczy,
- k_0 - współczynnik kształtu Carmana,
- L_e - średnia efektywna droga przepływającej cieczy,
- L - wysokość złoża filtru.

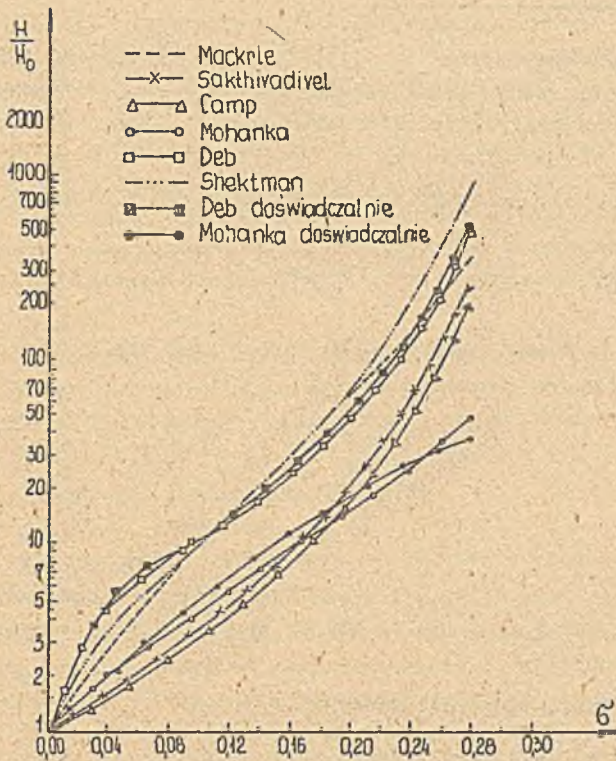
Analizując powyższe równanie należy uwzględnić, że w trakcie filtracji występują zmiany: porowatości złoża filtru, powierzchni osadzania, współczynnika krętości drogi cieczy $(L_e/L)^2$ oraz współczynnika kształtu Carmana. Zmiany te, spowodowane zanieczyszczeniem się złoża podczas filtracji, zależą od rodzaju zawiesiny i rodzaju złoża. Dotychczas nie zostały opracowane dokładne, niezawodne techniki analityczne lub eksperymentalne umożliwiające określenie zmian ww. czynników podczas filtracji. Taka sytuacja jest przyczyną występowania różnic w równaniach strat ciśnienia stosowanych przez różnych autorów. Dla porównania w tabl.1 przedstawiono wzory stosowane do wyrażenia strat ciśnienia [15]. Zależności $H / H_0 = f(\zeta)$ uzyskane teoretycznie i doświadczalnie przez różnych autorów przedstawiono na rys.5. Każdy z badaczy przyjmował model matematyczny i dobierał odpowiednie parametry na podstawie przeprowadzonych eksperymentów. Dla niewielkiego stopnia zanieczyszczenia złoża ζ wartości strat ciśnienia wyznaczone z poszczególnych równań (tabl.1) nie wykazują dużych rozbieżności. Różnice narastają ze zwiększeniem stopnia zanieczy-

Tabl. 1.

Równanie strat ciśnienia na złożu filtracyjnym

H - straty ciśnienia podczas filtracji, H_0 - straty ciśnienia na czystym filtrze

Autor	Proponowane równanie	Nr. równ.	Uwagi
Deb	$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{S_0'}{S_0} \right) \left(\frac{K_0'}{K_0} \right) \left(\frac{L_0'}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \left[\frac{\epsilon}{\epsilon - G} \right]^3$	20	Współczynnik $\left(\frac{S_0'}{S_0} \right) \left(\frac{K_0'}{K_0} \right) \left(\frac{L_0'}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2$, określany jako $\frac{J_0 \gamma^2}{J_0 \gamma_0^2}$ jest wyznaczony eksperymentalnie jako funkcja δ $J_0 \gamma_0^2$ jest nazywany ogólną charakterystyką złoża filtracyjnego
Deb	$\frac{H}{H_0} = [1 + G(1 - 10^{-K^G})] \left[\frac{\epsilon}{\epsilon - G} \right]^3$	21	$G = 3,2$ $K = 13,3$ Równanie empiryczne G i K - stałe doświadczalne
Mohanka	$\frac{H}{H_0} = \left(1 + p \frac{G}{\epsilon} \right)^2 \left(1 - \frac{G}{\epsilon} \right)^{-1}$	22	p zależy od powierzchni osadzania. Wyprowadzone z modelu matemat. Mackrle'a zakładając $x = y = 1$
Mohanka	$\frac{H}{H_0} = 1 + \frac{G}{\epsilon} (2p+1) + \frac{G^2}{\epsilon^2} (p+1)^2 + \frac{G^3}{\epsilon^3} (p+1)^3$	23	Uproszczona wersja równania powyżej
Mackrle	$\frac{H}{H_0} = \left(1 + \frac{pG}{\epsilon} \right)^3 \left(1 - \frac{G}{\epsilon} \right)^{-\frac{1}{2}}$	24	Równanie spełnione przy użyciu eksper. określonych wartości $x = 1,5$, $y = 0,75$ i $p = \frac{29}{(5')^4}$ przez Mohanka
Camp	$\frac{H}{H_0} = \frac{(1 - \epsilon + G)^2}{(1 - \epsilon)^2} \frac{\epsilon^3}{(\epsilon - G)^3} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{G}{3(1-\epsilon)} + \frac{1}{4}} + \frac{G}{3(1-\epsilon)} + \frac{1}{2}} \right]$	25	Oparte na równaniu Kozeny-Camana przy założeniu, że współczynnik $\left(\frac{K_0'}{K_0} \right) \left(\frac{L_0'}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2$ jest stały i równy 1
Sakthivadivel	$\frac{H}{H_0} = \frac{(1 - \epsilon + G)^2}{(\epsilon - G)^3} \frac{\epsilon^3}{(1 - \epsilon)^2} \cdot \frac{1}{S^2}$	26	Równanie uwzględnia jawnie tylko porowatość. Wszystkie inne zmienne są potączone i oznaczone jako S^2 , gdzie $S^2 = \left(\frac{K_0'}{K_0} \right) \left(\frac{L_0'}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2 \left(\frac{S_0'}{S_0} \right)^2$
Shekman	$\frac{H}{H_0} = \frac{1}{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon - G}{\epsilon} \right)} \right)^3}$	27	$\left(\frac{S_0'}{S_0} \right)^2 \left(\frac{K_0'}{K_0} \right) \left(\frac{L_0'}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{L_0} \right)^2$ zakłada się równe 1. Jawnie uwzględ. tylko porowatość.
Jves	$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{K'}{K} \right) \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \frac{(1 - \epsilon + G)^2 \epsilon^3}{(\epsilon - G)^3 (1 - \epsilon)^2}$	28	Sugeruje się empiryczne wyznaczenie K' , r_1^2 $r_1 = \frac{\text{powierzchnia}}{\text{wsp. objętości otoczonych ziaren}}$



Rys.5. Porównanie zależności strat ciśnienia na złożu filtracyjnym od stopnia zanieczyszczenia złoża uzyskanych przez różnych autorów [15]

szczenia złoża. Taka sytuacja może być spowodowana zmianą warunków przepływu od laminarnego (dla niewielkich δ) do przejściowego, a nawet turbulentnego (dla dużych δ).

Sformułowanie ogólnej metody predykcji strat ciśnienia w trakcie filtracji nie będzie możliwe dopóki nie zostaną opracowane niezawodne metody analityczne lub eksperymentalne umożliwiające pomiar zmiennych parametrów równania Kozeny-Carmana. Do czasu opracowania takich metod można stosować jedno z przedstawionych powyżej równań, które najlepiej aproksymuje uzyskane wyniki badań doświadczalnych.

5. Rozwiązanie równań filtracji

Jak pokazano powyżej, proces filtracji jest opisywany przy pomocy układu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Aby równania te rozwiązać metodami analitycznymi konieczne jest przyjęcie uproszczonych zależności $\lambda = \lambda(\sigma)$.

Minc [4] zastosował zmodyfikowane równanie /2/ w postaci:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\lambda \cdot c + \frac{\alpha \sigma}{v} \quad /20/$$

i rozwiązując je łącznie z równaniem /1/ uzyskał wynik:

$$\frac{c}{c_0} = \exp(-\lambda t - \alpha t) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha t}{\lambda t}\right)^{\frac{n}{2}} I_n \left[(\lambda t \alpha t)^{\frac{1}{2}} \right] \quad /21/$$

gdzie:

α - parametr filtracji określający intensywność odrywania się cząstek zawieszin od ziaren złoża (zależny od warunków filtracji),

I_n - funkcja Bessela rzędu n .

Shekhtman [5] zastosował równania /1/ i /2/ po założeniu, że

$\lambda = \lambda_0 - \beta \sigma$ uzyskał rozwiązanie:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\exp(\beta v c_0 t)}{\exp(\lambda_0 t) + \exp(\beta v c_0 t) - 1} \quad /22/$$

Rozwiązanie takie otrzymał również Lerk [6].

Diapre i Ives [7] stosując zależność $\lambda = \lambda_0 - \gamma \sigma^2$ jako rozwiązanie równań /1/ i /2/ otrzymali:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\operatorname{ctg} h T \exp(-\lambda_0 t)}{\operatorname{ctg} h^2 T - 1 + \exp(-2 \lambda_0 t)}^{1/2} \quad /23/$$

gdzie:

$$T = v c_0 t (\lambda_0 \gamma)^{1/2}$$

Zwiększenie dokładności rozwiązania jest możliwe dzięki wykorzystaniu metod numerycznych i realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej. Celem nu-

merycznego rozwiązania równań filtracji można zastosować metodę różnic skończonych. Na podstawie równań /1/ i /2/ (lub ich modyfikacji) z warunkami początkowymi: $c(1,0) = g/1/$, $\zeta(1,0) = 0$ oraz z warunkiem brzegowym: $c(0,t) = f(t)$ otrzymuje się przebiegi stężenia zawieszin i stopnia zanieczyszczenia złoża w funkcji głębokości złoża i czasu: $c(1,t)$, $\zeta(1,t)$. Ponieważ $\lambda = \lambda(\zeta)$, więc równania te należy rozwiązać metodą iteracyjną. Dla otrzymania przebiegu strat ciśnienia w funkcji głębokości złoża i czasu należy wykorzystać zależność $H = H(\zeta)$ z warunkiem początkowym $H(1,0) = m(1)$ i z warunkiem brzegowym: $H(0,t) = 0$.

Numeryczne rozwiązanie równań filtracji zostało m.in. otrzymane przez Deba [16]. Do opisu procesu filtracji zastosowano równania: /6/, /7/, /15/ oraz równanie strat ciśnienia /21/. Przyjęte zostały następujące założenia upraszczające:

- 1) uziarnienie złoża jest jednolite,
- 2) zawieszina jest jednorodna,
- 3) stężenie zawieszin w influencji jest stałe w czasie całego cyklu filtracyjnego $c(0,t) = 1$.

Przy zachowaniu powyższych założeń oraz przy stałej prędkości filtracji przeprowadzono badania doświadczalne na modelach filtrów [16]. Stwierdzono, że przebiegi otrzymane na podstawie rozwiązania numerycznego równań filtracji stanowią dość dobre przybliżenie wyników doświadczalnych.

6. Wskaźnik jakości filtracji

W analizie procesu filtracji szczególnie istotnym zagadnieniem jest określenie wskaźnika jakości filtracji, umożliwiającego ocenę pracy filtru. Próby sformułowania takiego wskaźnika podejmowało wielu autorów, przy czym stosowano zarówno badania modelowe jak i eksperymenty w skali technicznej.

Gamet i Rademacher [17] zastosowali następujący wskaźnik charakteryzujący pracę filtru:

$$FPI = \frac{v \cdot t_f}{\Delta H}, \quad /24/$$

gdzie:

- v - umowna prędkość filtracji,
- t_f - długość cyklu filtracyjnego,
- ΔH - straty ciśnienia na końcu cyklu.

W raporcie przedstawionym w roku 1969 przez grupę roboczą AWWA stwierdzo-

no, że przy definiowaniu wskaźnika jakości filtracji należałoby również uwzględnić jakość filtratu, ograniczającą długość cyklu filtracyjnego.

Dla określenia wskaźnika jakości filtracji można również wykorzystać zależność $\lambda = \lambda(\zeta)$. Pożądaną właściwością krzywej $\lambda = \lambda(\zeta)$ jest duża wartość λ w możliwie jak najdłuższym okresie filtracji (duże ζ). Zarazem korzystne jest, aby filtracja przebiegała przy małych stratach ciśnienia na złożu. Na tej podstawie Cleasby [19] zaproponował następującą postać wskaźnika jakości filtracji dla elementarnej warstwy złoża:

$$F I = \frac{\lambda \cdot \zeta}{\Delta H}, \quad /25/$$

gdzie:

- ζ - stopień zanieczyszczenia złoża w danym momencie czasu,
- λ - współczynnik filtracji w tym samym momencie czasu,
- ΔH - przyrost strat ciśnienia od początku cyklu do danego momentu czasu.

Przy stosowaniu określonego w powyższy sposób wskaźnika jakości filtracji istnieją pewne ograniczenia. W przypadku bardzo małych wartości λ można nie uzyskać żądanej jakości filtratu nawet w początkowym okresie filtracji podczas, gdy oczyszczanie jest maksymalne a straty ciśnienia małe. Z tego względu należy wyznaczyć minimalną wartość początkową λ_{\min} , przy której powyższy wskaźnik może zostać zastosowany. W tym celu można skorzystać z zależności (obowiązującej dla czystego filtru):

$$\frac{dc}{dl} = -\lambda \cdot c \Rightarrow \frac{c}{c_0} = e^{-\lambda L} \quad /26/$$

Z równania /26/ na podstawie stężenia zawieszin na dopływie (c_0) i odpływie (c) określa się minimalną wartość początkową λ_{\min} . Ze względu na przyjęte założenia upraszczające oraz dla uwzględnienia możliwości pogorszenia się jakości filtratu, należy wprowadzić odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa. Jeżeli początkowa wartość λ nie jest większa lub co najmniej równa wartości λ_{\min} , wskaźnik jakości filtracji określony wzorem /26/ może być mylący i nie powinien być stosowany.

7. Możliwości wykorzystania modelu matematycznego przy sterowaniu pracą filtrów

Realizacja zadania optymalnego sterowania pracą filtrów powinna zapewnić uzyskanie maksymalnej wartości wskaźnika jakości filtracji w danym filtrocyklu. Proponuje się zastosowanie wskaźnika jakości filtracji ok-

reślonego na podstawie równania /25/. W trakcie całego cyklu filtracyjnego powinna być utrzymywana żądana jakość filtratu.

Zmiennymi sterowalnymi w procesie filtracji są: prędkość filtracji (v) oraz czas pracy filtru między kolejnymi płukaniem (t_p). Zmieniającą się w funkcji czasu jakość wody na dopływie do filtru należy traktować jako zmienną mierzalną, niesterowalną. Realizacja celu sterowania będzie następować przez dobór optymalnych wartości zmiennych sterowalnych: $c(t, v)$, $\sigma(t, v)$ i $\Delta H(t, v)$. Na tej podstawie możliwe będzie prognozowanie wskaźnika jakości filtracji. Dla rozwiązania równań filtracji konieczna jest znajomość zależności $\lambda = \lambda(\sigma, v)$ oraz $\Delta H = \Delta H(\sigma, v)$, które należy wyznaczyć doświadczalnie dla badanego filtru.

Wartości σ można określić na podstawie równania bilansu masy:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - v \frac{\partial c}{\partial l} \longrightarrow \sigma = \frac{v}{\Delta L} \int_0^t (c_{n-1} - c_n) dt, \quad /27/$$

gdzie:

ΔL - grubość elementarnej warstwy złoża,

v - prędkość filtracji,

c_{n-1} - objętościowe stężenie zawiesin na wlocie do warstwy elementarnej w chwili t ,

c_n - objętościowe stężenie zawiesin na wylocie z warstwy elementarnej w chwili t .

Dla określenia wartości λ wykorzystuje się równanie:

$$\frac{\partial c}{\partial L} = -\lambda \cdot c$$

Przy założeniu, że wzdłuż warstwy elementarnej o wysokości ΔL wartość λ jest stała, otrzymuje się:

$$\ln \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} \right) = -\lambda \cdot \Delta L, \quad \text{skąd} \quad \lambda = -\frac{1}{\Delta L} \ln \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} \right) \quad /28/$$

Zależność $\lambda = \lambda(\sigma, v)$ można więc uzyskać na podstawie pomiarów objętościowego stężenia zawiesin w filtrowanej wodzie w poszczególnych warstwach złoża filtru i w określonych interwałach czasowych dla różnych prędkości filtracji. Celem otrzymania zależności $\Delta H = \Delta H(\sigma, v)$ wykonuje się pomiary strat ciśnienia na złożu dla różnych prędkości filtracji.

Na podstawie uzyskanych dla badanego filtru przebiegów doświadczalnych $\lambda = \lambda(\sigma, v)$ oraz $\Delta H = \Delta H(\sigma, v)$ należy przyjąć odpowie-

dnie zależności analityczne, najlepiej aproksymujące otrzymane charakterystyki. Wartości parametrów występujące w zależnościach analitycznych wyznacza się z przebiegów doświadczalnych. I tak np. w równaniu:

$$\lambda = B \left(\frac{x}{\varepsilon - \delta} \right)^A$$

wyznaczone zostaną wartości parametrów A i B, natomiast w równaniu:

$$\frac{\partial H}{\partial l} = \frac{\partial H}{\partial L} \Big|_0 [1 + G(1 - 10^{-k\delta})] \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta} \right)^3$$

wartości parametrów strat ciśnienia G i K.

Dla uwzględnienia zróżnicowania wymiarów ziaren złoża wzdłuż jego głębokości (np. w filtrach wielowarstwowych) w obliczeniach należy przyjąć wartości parametrów filtracji wyznaczone dla poszczególnych warstw złoża.

Celem określenia warunków brzegowych i początkowych należy dokonać pomiarów stężenia zawieszin na dopływie podczas całego cyklu filtracyjnego: $c(0, t) = f(t)$ oraz rozkładach stężenia zawieszin w filtrowanej wodzie wzdłuż wysokości złoża w chwili $t = 0$: $c(l, 0) = g(l)$.

Na podstawie wzoru /25/ można określić chwilową wartość wskaźnika jakości filtracji dla pojedynczej warstwy filtracyjnej. Dla i-tej warstwy o grubości ΔL :

$$FI_1(t) = \frac{\lambda_1 \delta_1}{\Delta H_1} \quad /29/$$

Dla całego złoża, zawierającego n pojedynczych warstw, wartość chwilowa wskaźnika jakości filtracji przyjmie postać:

$$FI_z(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n FI_1(t) \quad /30/$$

Celem uzyskania optymalnych wartości v i t_f należy przeprowadzić maksymalizację wskaźnika jakości w całym cyklu filtracyjnym:

$$\text{Max}_{v, t_f} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^n FI_1(v, t) dt,$$

przy czym powinien być spełniony warunek:

$$c(L, t) \leq c_{\text{zad}} \quad \text{dla} \quad t \in [0, t_f].$$

Przewiduje się, że realizacja przedstawionego powyżej algorytmu umożliwi maksymalne wykorzystanie możliwości filtracyjnych złoża. Dzięki temu możliwe będzie zmniejszenie zużycia wody na pęknięcie filtrów, co spowoduje zmniejszenie kosztów eksploatacji stacji uzdatniania wody.

LITERATURA

- [1] O'Melia Ch.R., Stumm W.: Theory of Water Filtration. Journal AWWA, 11, 1967.
- [2] Iwasaki T.: Some Notes on Sand Filtration. Journal AWWA, 12, 1937.
- [3] Deb A.K.: Theory of Sand Filtration. Journal Sanit.Eng.Div., Proc. ASCE, SA3, 1969.
- [4] Kastalski A.A., Minc D.M.: Podgotowka wody dla pitjowego i promyszlennogo wodosnabzenija. Moskwa 1962.
- [5] Shekhtman U.M.: Filtracija małokoncentrirowannykh suspenzij. Izd. Akad.Nauk SSSR, Inst.Mechan., Moskwa 1961.
- [6] Meertjes P.M., Lerk C.F.: The Functioning of Deep Bed Filters. Trans. of the Inst.of Chem.Engineers, Vol.45, 1967.
- [7] Diaper E., Ives K.J.: Filtration through Size-Graded Media. Journ. Sanit.Eng.Div., Proc.ASCE, SA3, 1965.
- [8] Ives K.J.: Rational Design of Filtration. Proc.Inst.of Civ.Eng. Vol.16, 189, 1960.
- [9] Oben R.W., Haines H.P., Ives K.J.: Comparision of Normal and Reverse-Graded Filtration. Journal AWWA 4, 1968.
- [10] Mohanka S.S.: Theory of Multilayer Filtration. Journal San.Eng.Div., Proc.ASCE, SA6, 1969.
- [11] Mohanka S.S.: Multilayer Filter Design. Water and Water Engineering 4, 1971.
- [12] Mohanka S.S., Gur A., Ives K.: Theory of Sand Filtration. Discussion, Journal San.Eng.Div., Proc.ASCE, SA1, 1970.
- [13] Hereit F.: Matematicky model pro vypocet filtracniho cyklu vodarenkych rychlofiltru. Vodni hospodarstvi 88, 1973.
- [14] Ott Ch.R., Bogdan R.H.: Theoretical Evaluation of Filter Modeling Experiments. Jour.San.Eng.Div., Proc.ASCE, SA2, 1970.
- [15] Sakthivadivel R., Thonikachelin V., Seetharman S.: Head Loss Theories in Filtration. Journal AWWA 4, 1972.
- [16] Deb A.K.: Numerical solution of Filter Equations. Jour.San.Eng.Div., Proc.ASCE, SA2, 1970.
- [17] Gamet M.B., Rademacher J.M.: Measuring Filter Performance Water Works Engineering 112-117, 1959.

- [18] Hsiung H., Cleasby J.: Prediction of Filter Performance. Journal San.Eng.Div., Proc.ASCE, SA6, 1968.
- [19] Cleasby J.: Approaches to a Filtrability Index for Granular Filters. Journal AWWA 8, 1969.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРОВАНИЯ ВОДЫ В СКОРЫХ ФИЛЬТРАХ

Р е з ю м е

Статья содержит обзор математических моделей процесса фильтрации а также анализ их применения для управления работой скорых фильтров. Предложено метод определения оптимальных значений скорости фильтрации и продолжительности фильтроцикла.

MATHEMATICAL MODEL OF THE WATER FILTRATION PROCESS IN THE FAST FILTERS

Summary

The paper presents review of mathematical models of the filtration process and possibilities of using it for the fast filters control. A method for the optimal values of filtration velocity and filter cycle choosing is proposed.