

Bernard Drzęźła

RUCHY GÓROTWORU NAD EKSPLOATOWANYM POKŁADEM
W ŚWIETLE PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Streszczenie. W artykule przedstawiono przybliżone rozwiązanie równań teorii sprężystości w zastosowaniu do mechaniki górotworu, otrzymane przy założeniu, że równanie przemieszczeń pionowych w całym obszarze nad pokładem zgodne jest z równaniem S. Knothe'go. Istota tego rozwiązania polegała na znalezieniu minimum błędów spełnienia równań teorii sprężystości ze względu na parametry występujące we wzorze S. Knothe'go. Przy okazji stwierdzono, że otrzymane w ten sposób wielkości parametrów różnią się znacznie od przewidywań W. Budzyka. Wyprowadzone w pracy równania przemieszczeń i odkształceń poziomych przedstawiają nową jakościowo obraz ruchów poziomych górotworu przypominający odrzucone u nas koncepcje S. Awierszyna.

1. Wprowadzenie

Istnieje już wiele rozwiązań zagadnienia ruchów i naprężeń górotworu nad eksploatowanym pokładem, otrzymanych na podstawie równań teorii sprężystości (m.in. [2,7,8,9,12,14]). Są to rozwiązania bądź numeryczne bądź też rozwiązania otrzymane metodami właściwymi teorii sprężystości. Praca niniejsza jest próbą skojarzenia metod teorii sprężystości z szeroko stosowanymi w praktyce górniczej formułami całkowitymi służącymi do prognozowania deformacji górotworu pod wpływem eksploatacji. Wykorzystano przy tym metodę minimalizacji średniej kwadratowej pozostałości [4,5] stosowaną do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

Omówimy pokrótce założenia tej metody na przykładzie równania różniczkowego zwozajnego

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0; \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

przy czym funkcja $y = y(x)$ ma spełnić określone ograniczenia (warunki początkowe, brzegowe, węzłowe itp.). Załóżmy, że znana jest funkcja spełniająca wymagane ograniczenia, która w przybliżeniu opisuje proces określony powyższym równaniem różniczkowym. Niech funkcją tą będzie

$$z = z(x, P_1, P_2, \dots, P_n)$$

gdzie:

P_1, \dots, P_m - parametry

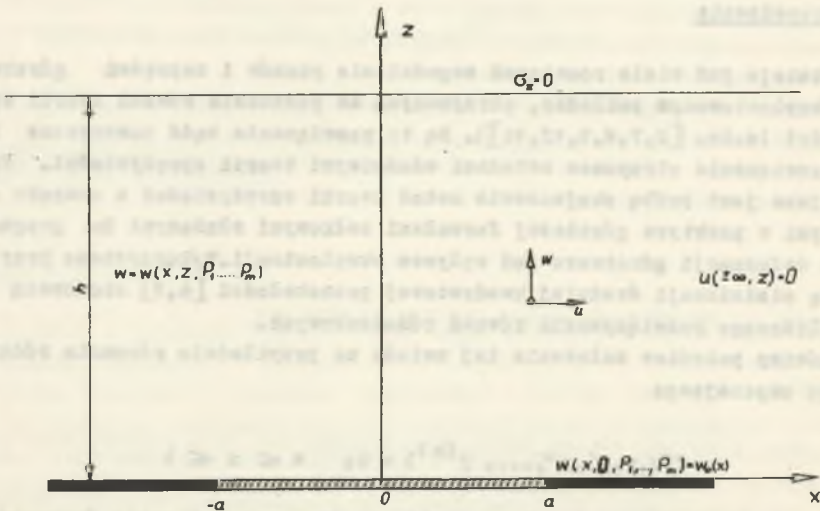
Wtedy dla uzyskania przybliżonego rozwiązania danego równania różniczkowego należy wyznaczyć minimum średniej kwadratowej pozostałości

$$\int_a^b [f(x, z, z', \dots, z^{(n)})]^2 dx$$

ze względu na parametry P_1, \dots, P_m .

2. Sformułowanie zagadnienia i metoda rozwiązania

Rozpatrujemy górotwór będący w płaskim stanie odkształcenia pod wpływem wyeksploatowania nieskończonej długości pasa poziomego pokładu (rys. 1). Przypisując górotworowi cechę liniowej sprężystości oraz nieważkość



Rys. 1. Górotwór w płaskim stanie odkształcenia. Warunki przyjęte w rozwiązaniu

możemy ten stan górotworu opisać przemieszczeniowymi równaniami równowagi

$$(\lambda + G) \frac{\partial u}{\partial x} + G \nabla^2 u = 0 \quad (2.1)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial w}{\partial z} + G \nabla^2 w = 0$$

gdzie:

λ, G - stałe Lamego,

u, w - pozioma i pionowa składowa przemieszczenia

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Układ równań (2.1) ohoemy rozwiązać nakładając na funkcje $u(x, z)$ i $w(x, z)$ określone ograniczenia wynikające z sytuacji przedstawionej na rys. 1.

Zakładamy przede wszystkim, że znana jest postać funkcji opisującej przemieszczenia pionowe górotworu w całym paśmie nad pokładem

$$w = w(x, z, P_1, \dots, P_m) \quad (2.2)$$

gdzie:

P_1, \dots, P_m - parametry o nieznanym wielkościach

Ponadto zakładamy, że znany jest przebieg funkcji (2.2) w stropie pokładu

$$w(x, 0, P_1, \dots, P_m) = w_0(x) \quad (2.3)$$

Dla rozwiązania równań (2.1) z uwzględnieniem warunków (2.2) i (2.3) potrzebne są jeszcze dwa ograniczenia, z których jedno jest zdeterminowane przez przyjętą metodę rozwiązania. Jest nim warunek

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(x, z) = A(z) \quad (2.4)$$

W danym przypadku będziemy oczywiście przyjmować

$$A(z) \equiv 0 \quad (2.5)$$

Natomiast drugie ograniczenie można wybrać na kilka sposobów.

Przyjmujemy tu warunek

$$\bar{\sigma}_z(x, h) = B(x) \equiv 0 \quad (2.6)$$

gdzie:

σ_z - pionowe naprężenie normalne

Dla rozwiązania układu równań (2.1) przy podanych warunkach przekształcamy drugie z tych równań do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial z} = - \frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{G}{\lambda + G} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

gdzie:

$$\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 - \nu)$$

$$\frac{G}{\lambda + G} = 1 - 2\nu$$

ν - stała Poissona.

Otrzymane równanie dwukrotnie całkujemy uzyskując kolejno:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = - 2(1 - \nu) \frac{\partial w}{\partial z} - (1 - 2\nu) \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dz + C'(x) \quad (2.7)$$

$$u = - 2(1 - \nu) \int \frac{\partial w}{\partial z} dx - (1 - 2\nu) \int \frac{\partial w}{\partial x} dz + C(x) + D(z) \quad (2.8)$$

Przy przekształcaniu równania (2.7) do postaci (2.8) oraz przy dalszych przekształceniach zakładamy odpowiednią regularność funkcji $w = w(x, z, P_1, \dots, P_m)$ pozwalającą na zmianę kolejności całkowania i na różniczkowanie pod znakiem całki.

Przyjęcie równania przemieszczeń poziomych górotworu w postaci (2.8) zapewnia tożsamościowe spełnienie drugiego z równań równowagi (2.1). Natomiast pierwsze z tych równań będzie spełnione z pewnym błędem zależnym od parametrów P_1, \dots, P_m . Błąd ten można zminimalizować wyznaczając uprzednio niewiadome funkcje $C(x)$ i $D(z)$ z warunków (2.4 - 2.5) i (2.6).

Funkcję $C(x)$ wyznacza się z warunku (2.6) na podstawie uogólnionego prawa Hooke'a otrzymując

$$C(x) = (1-2\nu) \int \frac{\partial w}{\partial x} dz \Big|_{z=h} - \frac{(1-2\nu)(1-2\nu)}{\nu} \int \frac{\partial w}{\partial z} dx \Big|_{z=h} \quad (2.9)$$

Funkcję $D(z)$ wyznacza się znając funkcję $C(x)$ z warunku (2.4 - 2.5). Otrzymujemy stąd:

$$D(z) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2(1-\nu) \int \frac{\partial w}{\partial z} dx + (1-2\nu) \int \frac{\partial w}{\partial x} dz - C(x) \right] \quad (2.10)$$

Ponieważ funkcja w dla sytuacji pokazanej na rys. 1 musi być funkcją parzystą ze względu na zmienną x , więc aby funkcja $D(z)$ istniała, musi być

$$D(z) \equiv 0 \quad (2.11)$$

przy założeniu, że dobierze się odpowiednie stałe całkowania nieznaczonego w równaniu (2.10).

Podstawiając funkcje (2.2) i (2.8), z uwzględnieniem (2.9) i (2.11), do lewej strony pierwszego z równań równowagi (2.1), otrzymuje się błąd jego spełnienia zależny od postaci funkcji (2.2):

$$L(x, z, P_1, \dots, P_m) = \frac{-G(\lambda + 2G)}{\lambda + G} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \int \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} dx + \right. \\ \left. + \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz - \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dz \Big|_{z=h} + \frac{1-\nu}{\nu} \int \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} dx \Big|_{z=h} \right) \quad (2.12)$$

Średni błąd kwadratowy spełnienia tego równania jest całką kwadratu błędu po rozpatrywanym obszarze nad pokładem

$$F(P_1, \dots, P_m) = \int_0^h dz \int_{-\infty}^{+\infty} L^2 dx \quad (2.13)$$

Rozwiązanie postawionego uprzednio zadania sprowadza się w ten sposób do wyznaczenia minimum funkcji F ze względu na parametry P_1, \dots, P_m , co prowadzi do układu równań:

$$\frac{\partial F}{\partial P_1} = 2 \int_0^h dz \int_{-\infty}^{+\infty} L \frac{\partial L}{\partial P_1} dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dokładność tego rozwiązania będzie zależała od przyjętej postaci funkcji (2.2); w szczególności może to być rozwiązanie dokładne, co oznaczałoby, że

$$\min F(P_1, \dots, P_m) = 0$$

Jeśli chodzi o warunki brzegowe, których w tej pracy się nie rozpatruje, a które spotyka się w innych pracach, to albo można je spełnić kosztem tych, które są tutaj uwzględnione, albo też możliwość ich spełnienia powinna tkwić w przyjętej postaci funkcji $w(x, z, P_1, \dots, P_m)$.

3. Rozwiązanie zagadnienia przy przyjęciu równania przemieszczeń pionowych górotworu w postaci podanej przez S. Knothe'go

W przypadku płaskim, pokazanym na rys. 1, równanie przemieszczeń pionowych będzie następujące (na podstawie [10]):

$$w(x, z) = -w_{\max} \int_{\frac{a-x}{r}}^{\frac{a-x}{r}} e^{-\pi t^2} dt \quad (3.1)$$

gdzie:

$$w_{\max} = a \cdot g,$$

a - współczynnik zależny od sposobu kierowania stropem,

g - grubość pokładu,

r - tzw. promień zasięgu wpływów; $r = r(z)$.

Przyjmujemy za pracą [3] hipotezę (nieco ją uogólniają), że

$$r(z) = r_0 \left(\frac{z+z_0}{h+z_0} \right)^k \quad (3.2)$$

gdzie o i k są nieznanymi parametrami. Wielkość z_0 jest też nieznaną, ale można ją wyrazić przez parametry o i k . Mianowicie zgodnie z założeniem (2.3) przyjmujemy, że przebieg osiadania stropu pokładu określony jest równaniem (3.1) przy znanej wielkości promienia zasięgu wpływów

$$r(0) = r_0 \quad (3.3)$$

Stąd

$$z_0 = \frac{h \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/k}}{1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)} \quad (3.4)$$

Parametry ν i k mają w tej pracy nieco inny sens niż w pracy [3] (pomijając oczywiście różnicę oznaczeń) między innymi dlatego, że będą one wyznaczone na zupełnie innej drodze.

Na podstawie równania (3.1) i wzoru (2.3) wyprowadzamy (patrz appendix) równanie przemieszczeń poziomych górotworu:

$$\begin{aligned} \frac{u(x, z)}{w_{\max}} = & (1-\nu) \frac{\sigma k}{2\mathcal{J}H} \left[2\varrho E_0(x, r) + \frac{1-2\nu}{\nu} E_0(x, 0) \right] + \\ & + (1-2\nu) \frac{H}{(1-k)\sigma} \left[\frac{E_0(x, r)}{\varrho} - E_0(x, 0) \right] + \\ & + (1-2\nu) \frac{2\mathcal{J}Hk}{(1-k)(3k-1)\sigma} \left\{ \frac{E_2(x, r)}{\varrho} - E_2(x, 0) + \right. \\ & \left. + 2\mathcal{J} [f(x+a) - f(x-a)] \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie:

$$H = h + z_0 = \frac{h}{1 - \left(\frac{r}{z_0}\right)^{1/k}}$$

$$E_n(x, r) = \left(\frac{x+a}{r}\right)^n e^{-\mathcal{J} \left(\frac{x+a}{r}\right)^2} - \left(\frac{x-a}{r}\right)^n e^{-\mathcal{J} \left(\frac{x-a}{r}\right)^2};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\varrho = \left(\frac{r}{z_0}\right)^{1-1/k}$$

$$f(x) = \left|\frac{z_0}{x}\right|^{1-1/k} \int_{\left|\frac{x}{z_0}\right|}^{\left|\frac{x}{r}\right|} t^{4-1/k} e^{-\mathcal{J}t^2} dt$$

Zanotujemy jeszcze kilka wzorów mających praktyczne znaczenie, które wynikają z równania (3.5):

$$\frac{\partial_x u(x, z)}{w_{\max}} = \frac{1}{w_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} = - (1-\nu) \frac{k}{h} \left[\left(\frac{z_0}{r}\right)^{1/k} E_1(x, r) + \right.$$

$$+ \frac{1-2\nu}{\gamma} E_1(x,0) \Big] - (1-2\mathcal{N}) \frac{2\mathcal{N}H}{o^2(3k-1)} \left\{ \left(\frac{o}{r}\right)^{2-1/k} E_1(x,r) - \right. \quad (3.6)$$

$$\left. - E_1(x,0) - 2\mathcal{N}o \left[\frac{f(x+a)}{x+a} - \frac{f(x-a)}{x-a} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial z} \frac{1}{w_{\max}} = 2(1-\nu) \left[k E_2(x,r) - \right. \quad (3.7)$$

$$\left. - \frac{1-k}{2\mathcal{N}} E_0(x,r) \right] \frac{ok}{H^2} \left(\frac{r}{o}\right)^{1-2/k} + \frac{1-2\nu}{r} E_0(x,r)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2} \frac{1}{w_{\max}} = 2(1-\nu) \left[2\mathcal{N}k^2 E_4(x,r) - 3k E_2(x,r) + \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + \frac{(1-k)(2-k)}{2\mathcal{N}} E_0(x,r) \right] \frac{ok}{H^3} \left(\frac{r}{o}\right)^{1-3/k} +$$

$$+ (1-2\nu) \left[2\mathcal{N} E_2(x,r) - E_0(x,r) \right] \frac{k}{oH} \left(\frac{o}{r}\right)^{1+1/k}$$

4. Wyznaczenie parametrów wzoru całkowego S. Knothe'go

Jak już powiedziano, przy stosowanej metodzie rozwiązania zagadnienia ruchów górotworu nad eksploatowanym pokładem, spełnione jest dokładnie drugie z równań równowagi ośrodka sprężystego (2.1). Defekt spełnienia pierwszego z równań (2.1) otrzymamy podstawiając wzory (3.1) i (3.5) do wzoru (2.12), w ten sposób defekt będzie funkcją współrzędnych punktu górotworu (x, z) oraz parametrów o i k o nieznanych wielkościach.

$$\frac{I(x, z, o, k)}{w_{\max}} \cdot \frac{\lambda + G}{G(\lambda + 2G)} = \left[\frac{k(1-k)(2-k)}{2\mathcal{N}} \nu^3 r - \frac{2k\nu}{r} + \right. \quad (4.1)$$

$$\left. + \frac{2\mathcal{N}}{(3k-1)\nu^3 r} \right] E_0(x,r) + \left(\frac{4\mathcal{N}k\nu}{r} - 3k^2\nu^3 r \right) E_2(x,r) +$$

$$+ 2\mathcal{N}k^3\nu^3 r E_4(x,r) - \frac{4\mathcal{N}^2(2k-1)H}{(3k-1)ko} \left[\frac{f(x+a)}{(x+a)^2} - \frac{f(x-a)}{(x-a)^2} \right] -$$

$$- \left[\frac{2\mathcal{N}H}{o^3(3k-1)} + \frac{Nk}{oH} \right] E_0(x,0) + \frac{2\mathcal{N}Nk}{oH} E_2(x,0)$$

gdzie:

$$r = \frac{1}{H} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/k}$$

$$r = r_0 \left(\frac{z+z_0}{H} \right)^k$$

$$H = h + z_0$$

$$z_0 = \frac{h \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/k}}{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/k}}$$

r_0 - znana wielkość promienia zasięgu wpływów w stropie pokładu,

$$N = \frac{\lambda + 2Q}{\lambda} = \frac{1-\nu}{\nu}$$

Średni błąd kwadratowy spełnienia pierwszego z równań (2.1), który w dalszym ciągu będziemy nazywać funkcją błędów, obliczamy jako całkę kwadratu defektu po obszarze pasma górotworu nad pokładem (wzór 2.13):

$$F(0, k) = \int_0^h \left(\int_{-\infty}^{+\infty} L^2 dx \right) dz$$

Po wykonaniu całkowania i przyjęciu kilku uproszczeń [6] otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\lambda+Q)h}{G(\lambda+2G)w_{\max}} \right]^2 \frac{F(d, k)}{\sqrt{2}} &\cong \frac{k}{2(3k-1)(k+1)} \left[-3k^3 + 14k^2 - \right. \\ &\quad \left. - 15k + 4 + (5k^2 - 5k + 2) l(k) \right] \frac{q}{p} + \\ &\quad + \frac{k^2(145k^4 - 396k^3 + 508k^2 - 288k + 64)}{64\pi^2(5-3k)} q^5 p^3 + \\ &\quad + \frac{2\pi^2}{(3k-1)^2(5k-3)(5k-2)} \left[-27k^2 + 18k - 3 + \right. \end{aligned}$$

$$+ (4k^2 + k - 1) l(k) \left] \frac{1}{q^3 p^5} + \frac{k^2 (5k^2 + 6k - 8)}{4\pi(3-k)} q^3 p + \right. \\ \left. + \frac{2\pi k}{(3k-1)^2} [9k - 3 - 2k l(k)] \frac{1}{qp^3} \right.$$

gdzie:

$$p = \frac{r_0}{h}$$

$$q = \left(\frac{d}{p}\right)^{1/k} - 1$$

$$d = \frac{o}{h}$$

$$l(k) = 64 \sqrt{2} \pi^3 \int_0^\infty s^{1+1/k} e^{-\pi s^2} \left(\int_0^s t^{4-1/k} e^{-\pi t^2} dt \right) ds$$

Wielkości $d = \frac{o}{h}$ i k określające minima funkcji błędów $F(d, k)$ przy różnych wielkościach bezwymiarowego promienia zasięgu wpływu w stropie pokładu $p = \frac{r_0}{h}$ przedstawiono w tabeli 1. Wielkości te wyznaczono przy pomocy maszyny cyfrowej z dokładnością lepszą niż 10^{-5} .

Ciekawy i nieoczekiwany wynik otrzymano jeśli chodzi o parametr k . Po pierwsze dlatego, że wielkość k jest stała, niezależna od parametru wyjściowego p , a po drugie dlatego, że wielkość k różni się znacznie od wielkości analogicznego parametru teorii ruchów poziomych W. Budryka uzyskanej na drodze rozważań geometrycznych w oparciu o założenie, że górotwór nie podlega odkształceniom objętościowym. W teorii Budryka wielkość tego parametru jest zależna od tak zwanego kąta zasięgu wpływów i znacznie większą od jedności. Z kolei w eksperymentalnych badaniach prowadzonych na modelach piaskowych przez D. Krzysztoń [11] uzyskano wielkość parametru k zbliżoną do jedności. Natomiast dla górotworu potraktowanego jako ośrodek liniowo-sprężysty wielkość k jest stała i równa 0,665, czyli mniejsza od jedności. Parametr $d = o/h$, jak oczekiwano, jest zmienny i rośnie wraz ze wzrostem bezwymiarowego promienia zasięgu wpływów w stropie pokładu $p = r_0/h$.

5. Niektóre wyniki obliczeń ruchów górotworu według wyprowadzonych wzorów

Do obliczania przemieszczeń, odkształceń, krzywizn, naprężeń i własności energii odkształcenia według wzorów podanych w tej pracy sporządzono odpowiednie programy dla maszyny cyfrowej.

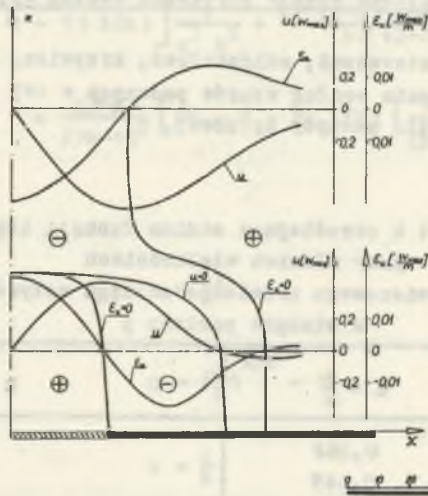
Tablica 1

Wielkości d i k określające minima funkcji błędu $F(d,k)$
przy różnych wielkościach
bezwymiarowego promienia zasięgu wpływów
w stropie pokładu p

$p = \frac{r_0}{h}$	$d = \frac{a}{h}$	k
0,001	0,262	$k = \text{const} = 0,66466$
0,005	0,449	
0,01	0,567	
0,02	0,716	
0,025	0,772	
0,03	0,821	
0,04	0,906	
0,05	0,978	
0,06	1,041	
0,07	1,098	
0,08	1,150	
0,09	1,198	
0,10	1,243	
0,11	1,285	
0,12	1,325	
0,13	1,363	
0,14	1,399	
0,15	1,434	

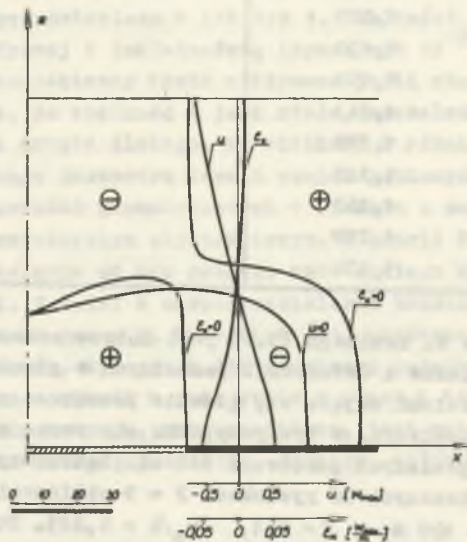
Ponieważ równanie S. Konthego (3.1) jest dobrze znane i znany jest tym samym przebieg osiadania i deformacji pochodnych w górotworze, więc w przeprowadzonych obliczeniach zajęto się głównie przemieszczeniami i odkształceniami poziomymi górotworu. W tym przypadku otrzymano zresztą nowy jakościowo obraz ruchów poziomych górotworu nad eksploatowanym pokładem.

W przypadkach pokazanych na rysunkach 2 - 5 obliczenia przeprowadzono przyjmując dane $h = 100$ m; $\nu = 0,1$, $r_0/h = 0,025$. Stwierdzono, co pokazano na rysunkach, że w górotworze występują pewne linie, wzdłuż których przemieszczenia i odkształcenia poziome są zerowe. Istnienie takiego zjawiska stwierdzał już S. Awierszyn [1] na podstawie badań modelowych i po-



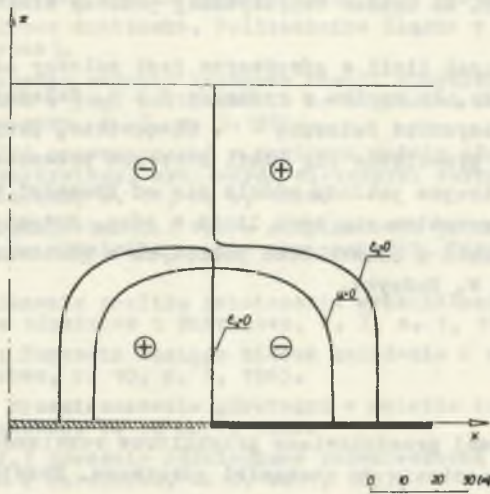
Rys. 2. Wykresy przemieszczeń i odkształceń poziomych oraz linie zerowych przemieszczeń i odkształceń poziomych w górotworze przy $a = 30$ m

- ⊕ obszary poziomego rozciągania
- ⊖ obszary poziomego ściskania



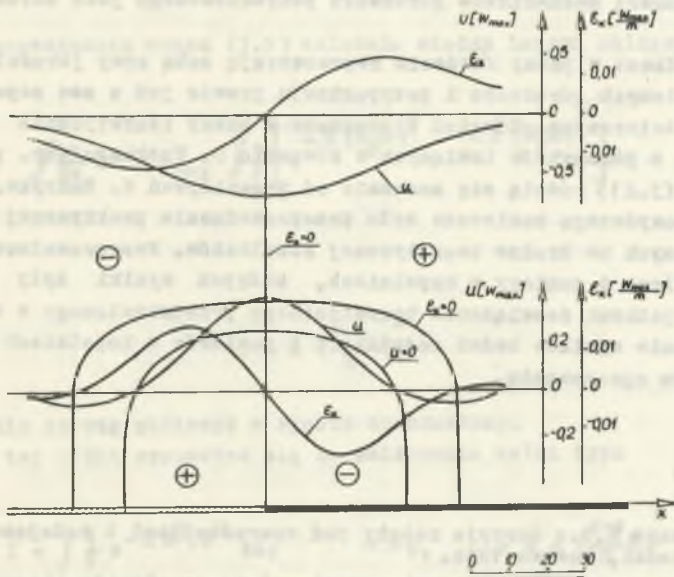
Rys. 3. Wykresy przemieszczeń i odkształceń poziomych oraz linie zerowych przemieszczeń i odkształceń poziomych w górotworze przy $a = 45$ m

- ⊕ obszary poziomego rozciągania
- ⊖ obszary poziomego ściskania



Rys. 4. Linie zerowych przemieszczeń i odkształceń poziomych w górotworze przy $a = 60$ m

- ⊕ obszary poziomego rozciągania
- ⊖ obszary poziomego ściskania



Rys. 5. Wykresy przemieszczeń i odkształceń poziomych oraz linie zerowych przemieszczeń i odkształceń poziomych w górotworze przy $a = \infty$

- ⊕ obszary poziomego rozciągania
- ⊖ obszary poziomego ściskania

miarów w kopalniach. Na drodze teoretycznej podobny efekt uzyskali autorzy pracy [14].

Przebieg omawianych linii w górotworze jest zależny od szerokości wybranego pasa pokładu, co wynika z rysunków 2 + 5. Zależny jest on również od wielkości współczynnika Poissona ν . Mianowicie, przy wzroście współczynnika ν , punkt przecięcia się linii zerowych przemieszczeń i odkształceń poziomych ze stropem pokładu oddala się od krawędzi wybierania z jednoczesnym przemieszczeniem się tych linii w górę. Natomiast przy $\nu = 0,5$ przebieg przemieszczeń i odkształceń poziomych w górotworze jest jakościowo zgodny z teorią W. Budryka.

6. Podsumowanie

W pracy niniejszej przedstawiono przybliżone rozwiązanie równań teorii sprężystości w odniesieniu do mechaniki górotworu. Przyjęty sposób rozwiązania równań teorii sprężystości, polegający na minimalizacji średniego błędów kwadratowego spełnienia równań różniczkowych równowagi przy założeniu, że równanie przemieszczeń pionowych ma postać funkcji S. Knothe'go, można jednocześnie traktować jako pewną metodę wyznaczania parametrów formuł empirycznych, określających ruchy górotworu nad eksploatującą, w oparciu o własności mechaniczne górotworu potraktowanego jako ośrodek sprężysty.

Wyprowadzone w pracy równania reprezentują sobą nowy jakościowo obraz ruchów poziomych górotworu i przypominają prawie już u nas zapomniane koncepcje S. Awierszyna. Również wyznaczone w pracy teoretycznie wielkości niektórych z parametrów tkwiących w równaniu S. Knothe'go (np. parametr k w wzorze (3.2)) różnią się znacznie od przewidywań W. Budryka.

Wobec powyższego konieczne było przeprowadzenie praktycznej weryfikacji uzyskanych na drodze teoretycznej rezultatów. Przeprowadzono więc badania modelowe i pomiary w kopalniach, których wyniki były jakościowo zgodne z wynikami rozwiązania teoretycznego przedstawionego w tej pracy. Opublikowanie wyników badań modelowych i pomiarów w kopalniach przewiduje się w innym opracowaniu.

LITERATURA

- [1] Awierszyn S.G.: Gornyje raboty pod sooruženijami i wodojomami. Ugle-
teohizdat, Moskwa 1954.
- [2] Berry D.S.: Ground movement considered as an elastic phenomenon. The
Mining Engineer no 123, 1963.
- [3] Budryk W.: Wyznaczenie wielkości poziomych odkształceń terenu. Archi-
wum Górniczo i Hutniczo, t. I, zeszyt 1, 1953.
- [4] Cunningham W.J.: Analiza układów nieliniowych. WN-T, Warszawa 1962.

- [5] Derski W.: Podstawy teorii sprężystości. PWN, Warszawa - Łódź, 1965.
- [6] Drzęźła B.: Praca doktorska. Politechnika Śląska w Gliwicach, 1971 (nieopublikowana).
- [7] Dymek F.: Mieszane zadanie brzegowe teorii sprężystości dla nieograniczonego pasma i jego zastosowanie do zagadnień mechaniki górotworu. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. 7, z. 3, 1962.
- [8] Gil H.: Rozkład przemieszczeń w poziomym paśmie złożonym z ośrodka sypkiego i sprężystego, wywołanych mieszanymi warunkami brzegowymi. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. 11, z. 4, 1966.
- [9] Golecki J., Józkiwicz S.: Wpływ eksploatacji podziemnej na odkształcenia górotworu w świetle teorii sprężystości. Przegląd Górniczy nr 6, 1963.
- [10] Knothe S.: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. I, z. 1, 1953.
- [11] Krzysztoń D.: Parametr zasięgu niecek osiadania w ośrodku sypkim. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. 10, z. 1, 1965.
- [12] Lisowski A.: Przemieszczenia górotworu w świetle teorii sprężystości. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. 1, z. 1, 1956.
- [13] Litwińczuk J.: Równanie różniczkowe przemieszczeń górotworu. Archiwum Górniczo-Hutnicze, t. I, z. 1, 1953.
- [14] Wang Y.J., Singh M.M.: A numerical method for the determination of stresses around underground openings. Proceedings of The First Congress of the International Society of Rock Mechanics, Lisboa 1966.

APPENDIX

Przy wyprowadzaniu wzoru (3.5) należało między innymi obliczyć całkę

$$\int \frac{\partial w}{\partial x} dz = w_{\max} \int \frac{1}{r} \left[e^{-\pi \left(\frac{x-a}{r}\right)^2} - e^{-\pi \left(\frac{x+a}{r}\right)^2} \right] dz$$

gdzie:

$$r = c \left(\frac{z+E}{H-Q} \right)^k$$

Całki tej nie da się obliczyć w sposób elementarny.

Obliczenie tej całki sprowadza się do obliczenia całki typu

$$I = \int \frac{1}{r} e^{-\alpha x^2/r^2} dz; \quad \alpha > 0, \quad r = c \left(\frac{z+E}{H-Q} \right)^k$$

Udowodnimy następujący

LEMAT

Jeśli $\alpha > 0$ i $x = o\left(\frac{x+\varepsilon}{H}\right)^k$, to

$$I = \int \frac{1}{x} e^{-\alpha x^2/x^2} dx = \frac{H}{k\alpha^{1/k}} \left[\frac{k}{1-k} x^{-1+1/k} + \right. \\ \left. + |x|^{-1+1/k} \int_0^{|x/x|} \frac{1 - e^{-\alpha t^2}}{t^{1/k}} dt \right]$$

Dowód

Korzystając z różniczkowego związku

$$dx = \frac{H}{k\alpha^{1/k}} x^{-1+1/k} dx$$

przeprowadzamy zmianę zmiennej całkowania, opuszczając jednocześnie wyrażenie stałe w tym związku

$$I_1 = \int \frac{1}{x^{2-1/k}} e^{-\alpha x^2/x^2} dx$$

Funkcję eksponencjalną w wyrażeniu podcałkowym rozwijamy w szereg. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, dlatego możemy go soalkować wyraz po wyrazie

$$I_1 = \int \frac{1}{x^{2-1/k}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} \frac{x^{2n}}{x^{2n}} \right) dx = \\ = \frac{k}{1-k} x^{-1+1/k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n! (2n+1-1/k)} \cdot \frac{x^{2n}}{x^{2n+1-1/k}}$$

W ten sposób całkę I można uważać za rozwiązana, ale otrzymany szereg jest bardzo wolno zbieżny i w związku z tym niedogodny do obliczeń numerycznych. Poza tym, przy tej postaci rozwiązania, zupełnie nie wiadomo, co ta funkcja przedstawia, jaki jest jej przebieg i jaka jest jej granica przy $x \rightarrow \infty$.

Dlatego weźmy pod uwagę funkcję

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n! (2n+1-1/k)} \frac{x^{2n}}{r^{2n+1-1/k}}$$

którą przekształcimy do postaci

$$I_2 = |x|^{-1+1/k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n! (2n+1-1/k)} \left| \frac{x}{r} \right|^{2n+1-1/k}$$

Z kolei rozpatrujemy funkcję

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n! (2n+1-1/k)} |s|^{2n+1-1/k}$$

którą można sprowadzić do postaci całkowej poprzez przekształcenia

$$g'(s) = \text{sign } s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^n}{n!} |s|^{2n-1/k} = \frac{\text{sign } s}{|s|^{1/k}} (e^{-\alpha s^2} - 1)$$

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_0^s g'(t) dt = \int_0^s \frac{\text{sign } t}{|t|^{1/k}} (e^{-\alpha t^2} - 1) dt = \\ &= - \int_0^{|s|} \frac{1 - e^{-\alpha t^2}}{t^{1/k}} dt \end{aligned}$$

W przytoczonej postaci funkcja $g(s)$ jest określona, gdy $k > \frac{1}{3}$, bo funkcja podcałkowa jest całkowalna.

Uwzględniając kolejne przekształcenia otrzymujemy dowód lematu.

Na podstawie udowodnionego lematu całka wyjściowa wyrazi się wzorem

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial w}{\partial x} dx &= \frac{w_{\max}}{k_0} H \left(\frac{x}{r} \right)^{-1+1/k} \left[\left| \frac{x-a}{r} \right|^{-1+1/k} \int_0^{\left| \frac{x-a}{r} \right|} \frac{1 - e^{-\alpha t^2}}{t^{1/k}} dt - \right. \\ &\quad \left. - \left| \frac{x-a}{r} \right|^{-1+1/k} \int_0^{\left| \frac{x+a}{r} \right|} \frac{1 - e^{-\alpha t^2}}{t^{1/k}} dt \right] \end{aligned}$$

Ta postać rozwiązania ośrodka wyjściowej jest jednak niedogodna do obliczeń numerycznych, dlatego przekształcamy ją ośkując powyższe ośki dwukrotnie przez ośki. Otrzymujemy wtedy

$$\int \frac{\partial w}{\partial x} dz = - \frac{w \max H}{\sigma(1-k)} \left\{ \frac{E_0(x, r)}{\rho} + \frac{2 \pi k}{3k-1} \left[\frac{E_2(x, r)}{\rho} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \pi \left(\left| \frac{x+a}{\sigma} \right|^{-1+1/k} \left| \frac{x+a}{r} \right| \int_0^t \psi(t) dt - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left| \frac{x-a}{\sigma} \right|^{-1+1/k} \left| \frac{x-a}{r} \right| \int_0^t \psi(t) dt \right) \right] \right\}$$

gdzie:

$$\psi(t) = t^{4-1/k} e^{-\pi t^2}$$

- pozostałe oznaczenia, jak we wzorze (3.5).

ДВИЖЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД НАД ЭКСПЛУАТИРУЕМЫМ ПЛАСТОМ В СВЕТЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Резюме

В статье представлено приближенное решение уравнений теории упругости в применении к механике горных пород, полученное при исходных данных, что уравнение вертикальных смещений во всей области над пластом соответствует уравнению С. Кноте.

Сущность этого решения заключается в том, что найдено минимум погрешности удовлетворять уравнениям теории упругости, учитывая параметры, находящиеся в формуле С. Кноте. Заодно установлено, что полученные таким образом величины параметров отличаются значительно от расчетов В. Будрыка. Выведенные в работе уравнения горизонтальных смещений и деформаций представляют качественно новое изображение горизонтальных движений горных пород, напоминающее отвергнутые у нас концепции С. Авершина.

ROCKS MOVEMENTS ABOVE THE MINED BED IN THE LIGHT OF APPROXIMATE SOLUTION OF ELASTICITY THEORY EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper an approximate solution of elasticity theory equations applied to the rock's mechanics have been received. It was assumed that the vertical dislocations equation throughout the whole area above the seam accord with the S. Knothe's equation.

The essential thing in this equation depends on finding the minimum mistake in satisfying the elasticity theory equations on account of parameters of the S. Knothe's formula.

It was found occasionally that the quantities of parameters received in this way are different considerably from those anticipated by W. Budryk.

The equations of horizontal dislocations and deformations represent a new qualitative picture of horizontal rock movements, which reminds rejected by W. Budryk ideas of S. Awierszyn.