ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 53 Nr kol. 649

Jerzy KLAMKA

WARUNKI BRZEGOWEJ STEROWALNOŚCI DLA UKŁADÓW PARABOLICZNYCH Z OPÓŹNIENIEM W STEROWANIU

Streszczenie. W pracy sformułowano warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności dla układów dynamicznych opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego ze stałym opóźnieniem w sterowaniu brzegowym. Podano przykłady ilustrujące przedstawione kryteria względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności.

W okresie ostatnich kilku lat nastąpił burzliwy rozwój badań nad problematyką sterowalności układów dynamicznych opisanych równaniami cząstkowymi różnych typów. Dowodem na to jest duża ilość prac z tej dziedziny, z których część została wyszczególniona w spisie literatury [1-10]. W wymienionych pozycjach literaturowych, stosując aparat analizy funkcjonalnej rozpatrywano aproksymacyjną sterowalność, jednak bez uwzględnienia opóźnień występujących w sterowaniu. W niniejszej pracy zdefiniowano względną aproksymacyjną brzegową sterowalność liniowych układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu parabolicznego, ze stałym opóźnieniem w sterowaniu brzegowym. W dalszej części pracy, sformułowano warunki konieczne i wystarczające względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności w ustalonym przedziale czasu. Podano przykłady zastosowania tych warunków. Uzyskane wyniki są uogólnieniem w przypadku występowania opóźnień znanych rezultatów zawartych w pracach [1-10] i dotyczących aproksymacyjnej sterowalności bez uwzględniania opóźnień w sterowaniu.

Niech będzie dany układ dynamiczny opisany liniowym równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego następującej postaci:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} \tag{1}$$

określonym dla $x \in [0,a]$, $t \in [0,T]$, $(0 < h < T)$, spełniającym warunki brzegowe

$$w(t,0) = b_{oo}u(t) + b_{oh}u(t-h) \quad \text{dla} \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$w(t,a) = b_{ao}u(t) + b_{ah}u(t-h) \quad \text{dla} \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

i warunki początkowe

$$w(0,x) = w_o(x) \in L^2[0,a], \tag{4}$$

$$u(t) = u_o(t) \in L^2[-h,0]. \tag{5}$$

Zakłada się, że sterowania dopuszczalne $u(t) \in L^2[0,T]$, $(T > h > 0)$. Dla układu dynamicznego (1) z warunkami (2), (3), (4), (5) definiuje się stan zupełny z_o w chwili początkowej $t = 0$, jako parę funkcji $\{w_o(x), u_o(t)\} = z_o$.

Wykorzystując znane metody teorii równań cząstkowych typu parabolicznego [3], [4], [6], [8], dla danego stanu zupełnego z_o oraz $t > h$, rozwiązanie równania (1) z warunkami (2), (3), (4), (5) ma następującą postać:

$$w(t,x) = \frac{2}{a}\int_0^a \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}t)\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{a}w_o(y)dy +$$

$$+\frac{2\pi}{a^2}\int_0^t \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s))j\sin\frac{j\pi x}{a}(b_{oo}u(s) + b_{oh}u(s-h)ds +$$

$$+\frac{2\pi}{a^2}\int_0^t \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s))j(-1)^{j+1}\sin\frac{j\pi x}{a}(b_{ao}u(s) + b_{ah}u(s-h))ds. \tag{6}$$

Stąd po prostych przekształceniach otrzymuje się następującą postać rozwiązania

$$w(t,x) = w_{z_o}(t,x) + w_u(t,x), \tag{7}$$

gdzie:

$$w_{z_o}(t,x) = \frac{2}{a}\int_0^a \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}t)\sin\frac{j\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{a}w_o(y)dy +$$

$$+\frac{2\pi}{a^2}\int_{-h}^0 \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s-h))j\sin(\frac{j\pi x}{a})(b_{oh} + (-1)^{j+1}b_{ah})u_o(s)ds \tag{8}$$

$$w_u(t,x)\ \frac{2\pi}{a^2}\int_{t-h}^t \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s))j\sin\frac{j\pi x}{a}(b_{oo} + (-1)^{j+1}b_{ao})u(s)ds +$$

$$+\frac{2\pi}{a^2}\int_0^{t-h} \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s))j\sin\frac{j\pi x}{a}(b_{oo} + b_{oh}\exp(\frac{j^2\pi^2 h}{a^2}) +$$

$$+ (-1)^{j+1}b_{ao} + (-1)^{j+1}b_{ah}\exp(\frac{j^2\pi^2 h}{2}))u(s)ds \tag{9}$$

Z zależności (8) oraz (9) wynika, że wyrażenie $w_{z_o}(t,x)$ jest zależne wyłącznie od stanu zupełnego w chwili t=0, z_o, natomiast wyrażenie $w_u(t,x)$ zależy od przebiegu sterowania brzegowego u(s) dla $s\in[0,t]$, co powoduje, że ma ono decydujące znaczenie dla względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności układu dynamicznego postaci (1). Wykorzystując definicję aproksymalnej brzegowej sterowalności układów cząstkowych [3],[4],[6],[8] oraz definicję względnej sterowalności układów z opóźnieniem w sterowaniu [5], można sformułować następującą definicję względnej aproksymacyjnej sterowalności w przedziale [0,T] układu dynamicznego (1) z warunkami (2),(3),(4),(5).

Definicja: Układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie brzegowo stosowalny w przedziale [0,T], jeżeli dla dowolnego stanu zupełnego z_o dowolnej funkcji $w_T(x)\in L^2[0,a]$ i dowolnego $\varepsilon>0$ istnieje sterowanie $u(t)\in L^2[0,T]$ takie, że odpowiadająca temu sterowaniu trajektoria układu dynamicznego (1) spełnia następujący warunek:

$$\left\|w(T,x)-w_T(x)\right\|_{L^2[0,a]}\leq\varepsilon. \qquad (10)$$

Korzystając z wprowadzonej definicji oraz postaci rozwiązania równania (1), można sformułować warunek konieczny i wystarczający względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności w przedziale [0,T] układu dynamicznego (1).

Twierdzenie: Układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale [0,T], (T>h) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków:

$$|b_{oo}|\neq|b_{ao}| \qquad (11)$$

lub

$$|b_{oh}|\neq|b_{ah}| \qquad (12)$$

Dowód: Niech $C_T : L^2[0,T]\to L^2[0,a]$ będzie liniowym ciągłym operatorem sterowalności [5], określonym następującą równością definicyjną:

$$C_T(u)\overset{df}{=}w_u(T,x) \qquad (13)$$

Z podanej uprzednio definicji wynika, że układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie sterowalny w przedziale [0,T] wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości operatora C_T jest wszędzie gęsty w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$, co na mocy znanych twierdzeń analizy funkcjonalnej [4],[5], [9], jest równoważne następującemu warunkowi:

$$\bigwedge_{u\in L^2[0,T]}\langle f(x),C_T(u)\rangle_{L^2[0,a]}=0\Longrightarrow f(x)\ \underline{\underline{\text{p.w.}}}\ 0,\quad \text{dla } f(x)\in L^2[0,a], \qquad (14)$$

gdzie symbol $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2[0,a]}$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$. Wykorzystując zależności (9) oraz (13), a także postać i własności iloczynu skalarnego w przestrzeni Hilberta $L^2[0,a]$, otrzymuje się następującą równość:

$$\langle f(x),\, G_T(u)\rangle_{L^2[0,a]} = \int_0^a f(x)\, w_u(T,x)dx =$$

$$= \int_0^a f(x)\Big(\int_0^{T-h} \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\Big(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\Big) \exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}s\Big) j \sin\frac{j\pi x}{a}\Big(b_{oo} + b_{oh}\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}h\Big) +$$

$$+ (-1)^{j+1}b_{ao} + (-1)^{j+1}b_{ah}\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}h\Big)\Big)u(s)ds\Big)dx +$$

$$+ \int_0^a f(x)\Big(\int_{T-h}^{T} \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\Big(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\Big)\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}s\Big) j \sin\frac{j\pi x}{a}\big(b_{oo}+(-1)^{j+1}b_{ao}\big)u(s)ds\Big)dx =$$

$$= \int_0^{T-h} \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\Big(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\Big)\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}s\Big)f_j\Big(b_{oo} + b_{oh}\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}h\Big) + (-1)^{j+1}b_{ao} +$$

$$+ (-1)^{j+1}b_{ah}\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}h\Big)\Big)u(s)ds +$$

$$+ \int_{T-h}^{T} \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\Big(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\Big) \exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}s\Big)f_j\big(b_{oo} + (-1)^{j+1}b_{ao}\big)u(s)ds, \quad (15)$$

gdzie f_j, $j = 1,2,3,\ldots$ są współczynnikami Fouriera funkcji $f(x) \in L^2[0,a]$ względem zupełnego układu ortonormalnego w przestrzeni $L^2[0,a]$, zbudowanego z funkcji własnych liniowego nieograniczonego operatora, wynikającego z równania (1), [1],[3],[6],[7],[8]. Na mocy zależności (15) warunek (14) można przedstawić w formie bardziej dogodnej do dalszych rozważań, a mianowicie w postaci następującej:

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\Big(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\Big)\exp\Big(\frac{j^2\pi^2}{a^2}t\Big) j\, f_j\big(b_{oo} + (-1)^{j+1}b_{ao} +$$

$$
\left.\begin{array}{l}
+ b_{oh} + (-1)^{j+1} b_{ah} \exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} h)) = 0, \quad \text{dla } t \subset [0, T-h] \\[2ex]
\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2} T)\exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} t) j f_j(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao}) = 0, \quad \text{dla } t \subset [T-h, T]
\end{array}\right\} f(x)\,\text{pw.} = 0 \qquad (16)
$$

Dalsza część dowodu będzie prowadzona oddzielnie dla warunku koniecznego i oddzielnie dla warunku wystarczającego. Oba te warunki będą dowodzone metodą nie wprost.

Warunek wystarczający: Przypuśćmy, że warunki (11) oraz (12) są spełnione, natomiast warunek (16) nie zachodzi. Istnieje zatem funkcja $\bar{f}(x) \neq 0$, $\bar{f}(x) \in L^2[0,a]$ taka, że poprzednik implikacji (16) jest prawdziwy, to znaczy, że zachodzą równości:

$$
\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2} T)\exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} t) j \bar{f}_j(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao} +
$$

$$
+ b_{oh} + (-1)^{j+1} b_{ah} \exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} h)) = 0, \quad \text{dla } t \in 0, [T-h] \qquad (17)
$$

$$
\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp(-\frac{j^2\pi^2}{a^2} T)\exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} t) j \bar{f}_j(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao}) = 0, \text{ dla } t \in [T-h, T].
$$

Ponieważ funkcje $\exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} t)$, $j = 1,2,3,...$ tworzą układ liniowo niezależny w dowolnym przedziale czasowym [8],[9], więc z równości (17) wynika, że zachodzą równości

$$
\bar{f}_j(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao} + b_{oh} + (-1)^{j+1} b_{ah} \exp(\frac{j^2\pi^2}{a^2} h)) = 0, \quad \text{dla } j=1,2,3,...
$$

$$
\bar{f}_j(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao}) = 0, \quad \text{dla } j = 1,2,3,... \qquad (18)
$$

Ponieważ $\bar{f}(x) \neq 0$, więc istnieje przynajmniej jeden współczynnik Fouriera tej funkcji różny od zera. Zatem, aby równości (18) były spełnione dla wszystkich $j = 1,2,3,...$ muszą zachodzić następujące związki $|b_{oo}| = |b_{ao}|$ oraz $|b_{oh}| = |b_{ah}|$ (szczególny przypadek: $b_{oo} = b_{ao} = b_{oh} = b_{ah} = 0$), co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że relacje (11) i (12) zachodzą. Zatem przypuszczenie, że warunek (16) nie zachodzi jest fałszywe, co kończy dowód warunku wystarczającego.

Warunek konieczny: Przypuśćmy, że układ dynamiczny (1) jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ (a zatem implikacja (16) zachodzi), natomiast warunki (11) i (12) nie są spełnione. Stąd $|b_{oo}| = |b_{ao}|$ oraz $|b_{oh}| = |b_{ah}|$. Można więc dobrać współczynniki Fouriera w poprzedniku implikacji (16) tak, aby niektóre z nich były niezerowe, a poprzednik implikacji był spełniony. Zatem funkcja $f(x)$ w następniku implikacji (16) byłaby niezerowa, co jest sprzeczne z założeniem względnej aproksymacyjnej brzegowej sterowalności i kończy dowód warunku koniecznego.

W przypadku gdy $T > h$ na podstawie powyższego twierdzenia uzyskuje się warunek konieczny i wystarczający aproksymacyjnej brzegowej sterowalności dla przypadku braku opóźnień w sterowaniu. Otrzymany w ten sposób warunek jest zgodny z warunkiem jaki można uzyskać na podstawie rezultatów zawartych w pracy [1].

Wniosek: Jeżeli $T > h$, to układ dynamiczny (1) jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j = 1,2,3,\ldots$ zachodzi następujący warunek:

$$|b_{oo}| \neq |b_{ao}| \tag{19}$$

Dowód: Jeżeli $T > h$, to wówczas na mocy równości (9) otrzymuje się następującą zależność określającą wyrażenie $w_u(t,x)$

$$w_u(t,x) = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^t \sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\left(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}(t-s)\right) j \sin\frac{j\pi x}{a}\left(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao}\right) u(s)\,ds. \tag{20}$$

Zatem implikacja (16) redukuje się do następującej prostej postaci [3], [7], [8].

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \exp\left(-\frac{j^2\pi^2}{a^2}T\right) \exp\left(\frac{j^2\pi^2}{a^2}t\right) j\, f_j \left(b_{oo} + (-1)^{j+1} b_{ao}\right) = 0, \text{ dla } t \in [0,T] \Rightarrow f(x) \overset{p.w.}{=} 0 \tag{21}$$

Postępując analogicznie jak w dowodzie twierdzenia otrzymuje się tezę wniosku.

Przykład 1. Układ dynamiczny (1), dla którego $b_{oo} = b_{ao} = 0$ oraz $|b_{oh}| = |b_{ah}|$, jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ dla $T > h$, a nie jest aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w przedziale $[0,T]$ dla $T < h$. Wynika to z bezpośrednio z tezy twierdzenia oraz wniosku.

Przykład 2. Układ dynamiczny (1), dla którego $|b_{oo}| \neq |b_{ao}|$ oraz $|b_{oh}| = |b_{ah}| \neq 0$, jest względnie aproksymacyjnie brzegowo sterowalny w dowolnym przedziale $[0,T]$, co wynika bezpośrednio z tezy twierdzenia.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy mogą być rozszerzone w przypadku mieszanych warunków brzegowych oraz wielokrotnych, stałych opóźnień w sterowaniu. Istnieje także możliwość uogólnienia otrzymanych rezultatów w przypadku wielowymiarowym, to znaczy równań parabolicznych określonych w prostopadłościanie $\subset R^n$. Rozszerzenia te będą wymagały pewnych istotnych modyfikacji, wynikających z różnych postaci rozwiązania w (t,x) równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego.

LITERATURA

[1] Glothin G.E.: A modal control model for distributed systems with application to boundary controllability, International Journal fo Control, Vol. 20, No 3, ss. 417-432, 1974.

[2] Glothin G.E.: Controllability, observability and duality in a distributed parameter system with continuous and point spectrum, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-23, No 4, ss. 687-690, 1978.

[3] Fattorini H.O.: Boundary control of temperature distributions in a parallelepipedeon, SIAM Journal on Control, vol. 13, No 1, ss. 1-13, 1975.

[4] Fattorini H.O., Russell D.L.: Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 43, No 4, ss. 272-292, 1971.

[5] Klamka J.: Relative controllability of infinite-dimensional systems with delays in control, Systems Science, vol. 4, No 1, ss.43-52,1978.

[6] Russell D.L.: A unified boundary controllability theory for hiperbolic and parabolic partial differential equations, Studied in Applied Mathematics, Vol. LII, No 3, ss. 189-211, 1973.

[7] Sakawa Y.: Controllability for partial differential equations od parabolic type, SIAM Journal on Control, vol. 12, No 3, ss.389-400,1974.

[8] Seidman T.I.: Approximate boundary controllability for the heat equation, Journal Mathematical Analysis and Applications, vol. 23, ss. 699-703, 1968.

[9] Triggiani R.: Controllability and observability in Banach space with bounded operators, SIAM Journal on Control, vol. 13, No 2, ss. 462-491, 1975.

[10] Wang P.K.C.: Optimal control of parabolic systems with boundary conditions involving time delays, SIAM Journal of Control, vol. 13, No2, ss. 274-293, 1975.

УСЛОВИЯ КРАЕВОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИЮ

Р е з ю м е

В статье сформулированы необходимые и достаточные условия относительной приближенной краевой управляемости для линейных динамических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, с неизменяемым запаздыванием по управлению. Представленный метод оценки относительной приближенной краевой управляемости иллюстрируется несколькими примерами.

BOUNDARY CONTROLLABILITY CONDITIONS
FOR PARABOLIC SYSTEMS WITH DELAY IN CONTROL

S u m m a r y

In the paper the necessary and sufficient conditions for the relative approximate boundary controllability for the dynamical systems described by the linear partial differential equations of parabolic type, with constant delay in control, are formulated. Some illustrative examples are also given. These examples illustrate the usefullness of the relative approximate controllability criterion, obtained in this paper.