ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 53 Nr kol. 649

Marek KIMMEL

ZASTOSOWANIE METODY TYPU MONTE CARLO DO OPTYMALIZACJI SEKWENCJI W PROBLEMIE KOLEJNOŚCIOWYM

Streszczenie. W pracy sformułowano podejście heurystyczne do tzw. problemu kolejnościowego. Podstawowym pojęciem wprowadzonym w pracy jest selektywny algorytm losowego generowania sekwencji. Podano przykład podobnego algorytmu, jak również oceniono jego efektywność. Metodę zastosowano do optymalizacji sekwencji w problemie kolejnościowym występującym w procesie montażu taśmowego.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono zastosowanie selektywnych algorytmów generowania sekwencji do badania pewnej klasy systemów. W punkcie 2 pracy zdefiniowano dla tej klasy systemów problem kolejnościowy. W dalszym ciągu zdefiniowano pojęcia funkcji struktury sekwencji oraz selektywnego algorytmu losowania sekwencji (pkt. 3). Podano heurystyczną metodykę optymalizacji sekwencji (pkt 4). Rozważania zilustrowano przykładami dotyczącymi problemu kolejnościowego w procesie montażu taśmowego.

2. Problem kolejnościowy

Rozważa się system z czasem dyskretnym, reprezentowanym przez zbiór liczb naturalnych od 1 do N. Dynamika systemu określona jest przez równanie stanu, równanie wyjścia i warunek początkowy:

$$\underline{x}(k+1) = \underline{f}[\underline{x}(k),\ u(k+1)] \qquad k = 0,1,\dots,N-1 \tag{1}$$

$$\underline{y}(k) = g\,[\underline{x}(k),\ u(k)] \qquad k = 1,2,\dots,N \tag{2}$$

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \tag{3}$$

Stan $\underline{x}$ jest M-wymiarowym wektorem o współrzędnych całkowitych, wejście u oraz wyjście y są skalarami, u może przyjmować wartości całkowite. Wskaźnik jakości L:

$$L = L\left[\underline{x}(k)\Big|_0^N,\ u(k)\Big|_1^N,\ y(k)\Big|_1^N\right] \tag{4}$$

jest funkcją $\underline{x}_0$ oraz $\underline{x}(k)$, $u(k)$, $y(k)$ dla $k = 1,2,\ldots,N$. Stanowi on kryterium optymalizacyjne dla systemu. Sens tego kryterium zależny jest od zadań konkretnego obiektu, którego dynamikę modelują wzory (1)-(3). Ograniczenie na wejście systemu:

$$u(k) \in U \subset N; \qquad k = 1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

gdzie U jest skończonym zbiorem liczb naturalnych. Niech U zawiera K elementów oznaczonych przez v_j, tzn.:

$$U = \{v_1, v_2, \ldots, v_K\} \tag{6}$$

Definicja 2.1. Niech będzie dany ciąg liczb naturalnych $\{N_j\}$, $j=1,2,\ldots,K$ takich, że:

$$\sum_{j=1}^{K} N_j = N \tag{7}$$

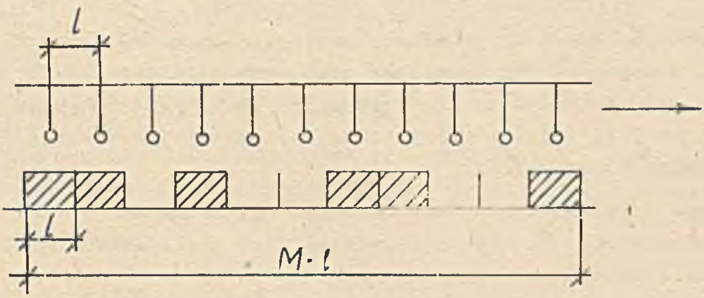
Ciąg $\{u(k)\}$, $k = 1,2,\ldots,N$, taki, że $u(k) \in U$ nazywa się sekwencją dopuszczalną, jeżeli dokładnie N_j wyrazów tego ciągu jest równe v_j.

Definicja 2.2. Zadanie optymalizacji (minimalizacji lub maksymalizacji) wskaźnika jakości (4) w systemie opisanym równaniami (1)-(3) nazywa się problemem kolejnościowym, jeżeli funkcje wejścia są sekwencjami dopuszczalnymi w sensie definicji 2.1.

Intuicyjnie, definicja 2.2 oznacza, że zbiór U jest "dynamicznie wyczerpywany", Jest jasne, że nawet przy addytywnym wskaźniku jakości L, do rozwiązania problemu kolejnościowego nie można użyć zasady optymalności Bellmana (z powodu niespełnienia "własności Markowa" [1]). Z drugiej strony, problemy kolejnościowe w sensie definicji 2.1 spotyka się przy optymalizacji tzw. dyskretnych procesów przemysłowych. Ważne jest więc znalezienie metod dokładnych lub przybliżonych rozwiązywania takich problemów, nie sprowadzających się przy tym do przeglądu wszystkich sekwencji dopuszczalnych, których liczba S może być bardzo duża:

$$S = N!/\prod_{j=1}^{K}(N_j!) \tag{8}$$

Przykładem problemu kolejnościowego jest następujące zadanie dotyczące linii montażowej [2]. Niech mianowicie linia składa się z m stanowisk o długości l każde, rozmieszczonych w odstępach $i.l$ ($i = 0,1,2$). Zerowy odstęp oznacza stanowiska rozlokowane bezpośrednio jedno obok drugiego. Montowane produkty umocowane są na transportrze linii (na tzw. zawieszkach) w odstępach l. Liczba równocześnie montowanych obiektów wynosi M (rys.1). Strukturę linii można opisać ciągiem $\{\lambda_i\}$, $i = 1,2,\ldots,m$, gdzie λ_i jest numerem produktu znajdującego się nad i-tym stanowiskiem, licząc od poozątku linii. Na linii można montować K typów produktów. Czas trwania operacji na stanowisku i-tym w przypadku montażu obiektu typu j-tego, wy-



Rys. 1. Schematyczne oznaczenie linii montażowej $(m = 6,\ M = 11, \{\lambda_i\} = \{1,2,4,7,8,11\})$

nosi a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,K$. Należy wyprodukować N egzemplarzy produktu, w tym N_j egzemplarzy typu j-tego. Zakłada się, że transporter linii porusza się z maksymalną dopuszczalną prędkością. Przez cykl linii rozumie się przedział czasu w jakim zawieszki przesuwają się od lewych do prawych granic poszczególnych stanowisk montażu. Maksymalna dopuszczalna prędkość linii jest więc stała w czasie trwania danego cyklu i zmienia się skokowo z cyklu na cykl. Niech $u(k)$ oznacza numer typu produktu wprowadzonego na linię w k-tym cyklu, $x^i(k)$ - numer produktu znajdującego się w k-tym cyklu na i-tej zawieszce, $y(k)$ czas trwania k-tego cyklu. Dynamikę linii można opisać równaniami (1)-(3), gdzie:

$$\underline{x}(k) = [x^1(k),\ldots,x^M(k)]^T \tag{9}$$

$$\underline{f} = [f^1,\ldots f^M]^T \tag{10}$$

$$f^1\,[\underline{x}(k),\ u(k+1)] = u(k+1) \tag{11}$$

$$f^i[\underline{x}(k),\ u(k+1)] = x^{i-1}(k); \qquad i = 2,3,\ldots,M$$

$$y(k) = \max_{1 \le i \le m}\{a_{i,j(i)}\}; \qquad j(i) = x^{\lambda_i}(k) \tag{12}$$

Symbol λ_i we wzorze (12) jest wskaźnikiem składowej wektora $\underline{x}(k)$. Stan początkowy linii jest wektorem numerów typów produktów znajdujących się na linii w momencie jej uruchomienia. Zadanie zmontowania N produktów w minimalnym czasie jest więc problemem kolejnościowym w sensie definicji 2.2, jeżeli przyjąć:

$$L = \sum_{k=1}^{N} y(k) \tag{13}$$

Proste przykłady, pozwalające zorientować się w funkcjonowaniu systemu opisanego równaniami (9)-(12) podano w [2].

3. Selektywne algorytmy losowania sekwencji

W literaturze znane są przykłady zastosowania metod Monte Carlo do poszukiwania suboptymalnych rozwiązań problemów kolejnościowych [4]. Zazwyczas używa się do tego celu algorytmów "obiektywnych" losowego generowania sekwencji, to jest takich, które każdą dopuszczalną sekwencję losują z jednakowym prawdopodobieństwem.

Definicja 3.1. Funkcją struktury sekwencji nazywana będzie nieujemna funkcja rzeczywista F, której dziedziną jest zbiór sekwencji dopuszczalnych w sensie definicji 2.1.

Przykładowo, niech element n_{lj} macierzy $[n_{lj}]$, $l = 1,2,\ldots,N$, $j=1,2,\ldots,K$ jest równy liczbie wyrazów równych v_j w l początkowych wyrazach sekwencji dopuszczalnej $\{u(k)\}$. Niech macierz $[\alpha_{lj}]$ o tych samych wymiarach co $[n_{lj}]$ ma elementy równe:

$$\alpha_{lj} = \begin{cases} 1; & n_{lj} \leqslant N_j \\ 0; & n_{lj} > N_j \end{cases} \tag{14}$$

Dalej określa się:

$$F\left[u(k)\Big|_1^N\right] = \left\{\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{K}(\alpha_{lj}N_j)\right]\right\}^{-1} \tag{15}$$

Funkcja (15) ma interesującą własność. Jej wartość jest mianowicie tym większa, im sekwencja $\{u(k)\}$ jest "gorzej przemieszana". Tabela 1 ilustruje tę własność na prostym przykładzie. Odpowiednio dobrana funkcja struktury może więc być formalizacją pewnych "globalnych" cech sekwencji dopuszczalnej.

Tabela 1

Przykład funkcji struktury sekwencji (15) dla $N=4$, $K=2$, $N_1=N_2=2$, $v_1=1$, $v_2=2$, $S=6$

$\{u(k)\}$	$F\left[u(k)\Big|_1^N\right]$
1 1 2 2	1/64
2 1 1 2	1/128
2 2 1 1	1/64
2 1 2 1	1/128
1 2 2 1	1/128
1 2 1 2	1/128

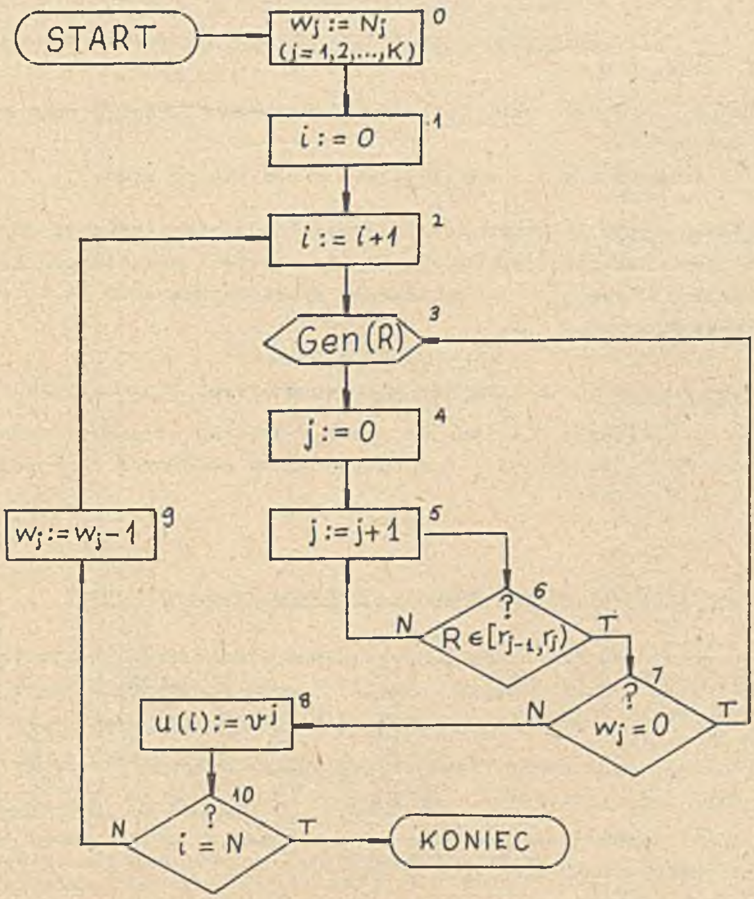
Definicja 3.2. Algorytm losowania sekwencji nazywa się selektywnym względem funkcji struktury sekwencji F, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania sekwencji spełnia warunek:

$$F\left[v(k)\Big|_1^N\right] \lesseqgtr F\left[w(k)\Big|_1^N\right] \Longleftrightarrow P\left[v(k)\Big|_1^N\right] \lesseqgtr P\left[w(k)\Big|_1^N\right], \tag{16}$$

gdzie:

$\{v(k)\}$, $\{w(k)\}$ - sekwencje dopuszczalne.

Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy jednego z możliwych algorytmów losowania sekwencji dopuszczalnych.



Rys. 2. Algorytm losowania sekwencji (selektywny). Gen(R) oznacza, że liczba R wylosowana została z rozkładu równomiernego (prostokątnego) od 0 do 1. Liczby r_j są zdefiniowane jako: $r_0 = 0$, $r_j = (N_1+N_2+\dots+N_j)/N$, $j = 1,2,\dots,K$

Istota algorytmu polega na tym, że dla każdego $i=1,2,\ldots,N$ losuje się wartość dla $u(i)$ spośród elementów zbioru $U = \{v_1,\ldots,v_K\}$ (pkt 3,4,5,6 algorytmu), przy czym v_j losowane jest z prawdopodobieństwem $P_j=N_j/N = r_j-r_{j-1}$. Następnie sprawdza się (pkt 7) czy liczba elementów równych v_j nie przekroczyła N_j. Jeżeli tak, to losuje się następną wartość dla $u(i)$. Jeżeli nie, to nadaje się wyrazowi $u(i)$ wartość v_j (pkt 8). Dalej, o ile nie wylosowano już całej sekwencji, aktualizuje się w_j oraz i (pkt 9,2) itd.

Twierdzenie 3.1. Prawdopodobieństwo wylosowania sekwencji $\{u(k)\}$ za pomocą algorytmu z rys. 2 wynosi:

$$P\left[u(k)\,\middle|\,{N \atop 1}\right] = \prod_{j=1}^{K}(P_j)^{N_j} \Big/ \left\{\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{K}(\alpha_{lj}P_j)\right]\right\}^{-1}, \tag{17}$$

gdzie: α_{lj} jak we wzorze (14), a $P_j = N_j/N$.

Wniosek. Algorytm jest selektywny względem funkcji struktury zdefiniowanej wzorem (15).

Dowód twierdzenia 3.1 znajduje się w dodatku do pracy.

Definicja 3.3. Efektywność algorytmu losowania sekwencji jest to wartość stosunku długości sekwencji N do wartości oczekiwanej liczby losowań zmiennej losowej R o rozkładzie prostokątnym od 0 do 1, potrzebnych do wylosowania sekwencji.

Twierdzenie 3.2. Efektywność algorytmu z rys. 2 wynosi $1/K$.

Dowód twierdzenia 3.2. znajduje się w dodatku do pracy. Definicja 3.3. jak i dowody twierdzeń 3.1, 3.2 oparte są na podobnych definicjach i dowodach jak w [5,6].

4. Heurystyczna metoda badania problemu kolejnościowego

W oparciu o zdefiniowane pojęcia można sformułować heurystyczną metodę, umożliwiającą badanie wpływu wybranej "cechy struktury sekwencji" (np. jej przemieszania) na wartość wskaźnika jakości. Metodę ujęto w punktach:

A. Formalizacja cechy struktury za pomocą funkcji struktury sekwencji (por. def. 3.1).

B. Konstrukcja algorytmu losowania sekwencji, selektywnego względem funkcji struktury (por. def. 3.2).

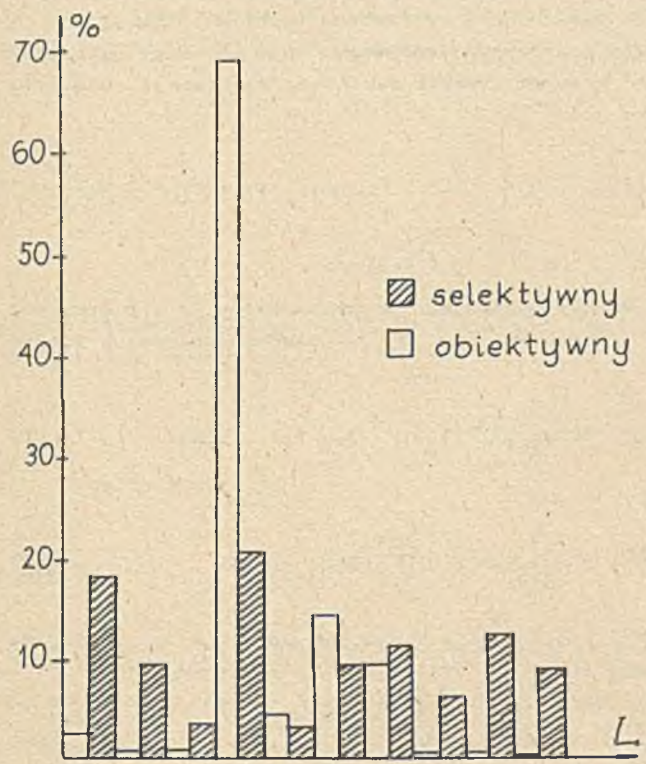
C. Wylosowanie odpowiednio dużej liczby sekwencji dopuszczalnych za pomocą algorytmu selektywnego i wyznaczenie odpowiadających im wartości wskaźnika jakości.

D. Eksperyment analogiczny do C, z zastosowaniem obiektywnego algorytmu losowania sekwencji (tj. każda sekwencja z jednakowym prawdopodobieństwem).

E. Porównanie rezultatów C i D. Ewentualne zastosowanie testu statystycznego.

Uwagi dotyczące stosowalności powyższego schematu zestawiono w punkcie 5 pracy.

Dla problemu kolejnościowego na linii montażowej, wzory (8)-(13), wybrano jako cechę struktury sekwencji jej przemieszanie. Funkcja struktury sekwencji jest więc określona wzorem (15), algorytmem selektywnym jest algorytm z rys. 2. Eksperymenty C i D przeprowadzono dla linii o parametrach: $m = 10$, $M = 15$, $\{\lambda_i\} = \{1,3,4,5,6,8,9,10,13,15\}$. Parametry sekwencji dopuszczalnych: $K=2$, $N=160$, $N_1=80$, $N_2=80$. Wyniki zestawiono na rys. 3, będącym histogramem osiąganych wartości wskaźnika jakości L, wzór (13). Liczba sekwencji losowanych w C i D była jednakowa i wynosiła 1000. Interpretacja wyników jest następująca: przeciętnie, bardziej opłacalne jest wprowadzanie na linię sekwencji "lepiej przemieszanych", ponieważ histogram dla algorytmu obiektywnego jest wyraźnie skupiony wokół mniejszych wartości L. Ściślej, w dolnej połowie przedziału zmienności L znajduje się 55% realizacji wylosowanych obiektywnie i 78% - wylosowanych selektywnie. Znamienność statystyczna tej różnicy jest oczywista wobec dużej liczby losowań. Praktyczny wniosek dla operatora procesu: należy wprowadzać na linię obiekty różnych typów tak, aby sekwencja wejściowa była jak najbardziej "przemieszana".



Rys. 3. Wyniki eksperymentu symulacyjnego dla problemu kolejnościowego na linii montażowej. Szczegóły w tekście

Czas trwania eksperymentu symulacyjnego wynosił około 5 minut (FORTRAN, m.c. Mińsk). Wydaje się, że można tę wielkość zmniejszyć kilkakrotnie przez eliminację wydruków kontrolnych, optymalizację programu itp.

5. Wnioski

Metodyka badania problemu kolejnościowego opisana w pracy umożliwia weryfikację przypuszczenia, że pewne ogólne cechy sekwencji dopuszczalnej mają wpływ na wartość wskaźnika jakości. Trudności techniczne sprowadzają się do braku ogólnego przepisu na ekonomiczny algorytm losowania sekwencji, selektywny względem zadanej funkcji struktury. Wydaje się, że zaletą opisanej metody jest to, że rezultat może być przedstawiony w kategoriach zgodnych z intuicją operatora procesu. Ponadto algorytm selektywny, który losuje nie tylko sekwencje posiadające wyróżnioną cechę struktury, ale i wszystkie inne (z mniejszym prawdopodobieństwem), daje poprawkę na częsty w warunkach rzeczywistych brak możliwości dokładnej realizacji algorytmu sterowania.

D O D A T E K

I. Dowód twierdzenia 3.1.

Niech S_j oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu j pierwszych wyrazów sekwencji $\{u(k)\}$. Ponieważ $S_j \subset S_{j+1}$, prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(S_{j+1}|S_j) = P(S_{j+1})/P(S_j); \quad j = 1,2,\ldots,N-1 \tag{D1}$$

Ze wzoru (D1) wynika, że:

$$P[u(k)|_1^N] = P(S_N) = P(S_1)\prod_{j=1}^{N-1} P(S_{j+1}|S_j) \tag{D2}$$

Niech $u(j+1) = v_l$, $j = 1,2,\ldots,N-1$; $l = 1,2,\ldots,K$ (por. (6)). Z punktów 3,4,5,6,7 algorytmu wynika, że:

$$P(S_{j+1}|S_j) = P_l \Big/ \left[\sum_{n=1}^{K} P_n\,\alpha_{j+1,n}\right] \tag{D3}$$

gdzie: $P_n = N_n/N$, $\alpha_{j+1,n}$ zdefiniowane w (14). Podobnie dla $u(1) = v_p$:

$$P(S_1) = P_p = P_p\Big/\left[\sum_{n=1}^{K} P_n\,\alpha_{1,n}\right] \tag{D4}$$

Podstawienie (D3,D4) do (D2) kończy dowód.

II. Dowód twierdzenia 3.2

Efektywność e algorytmu wyraża się wzorem:

$$e = N/E(m) = N/\left\{ \sum_{u(k) \in \mathcal{U}} P[u(k)|_1^N]\ E[m|\{u(k)|\}] \right\} \tag{D5}$$

gdzie: m jest zmienną losową równą liczbie losowań zmiennej losowej R (por. rys. 2), warunkowa wartość oczekiwana jest brana przy ustalonej sekwencji $\{u(k)\}$, sumowanie jest rozciągnięte po zbiorze $\mathcal{U}$ wszystkich sekwencji dopuszczalnych w sensie definicji 1.2. Prawa strona (D5) wynika ze znanego [3] wzoru na iterowaną wartość oczekiwaną. Dalej zachodzi:

$$E[m|\{u(k)\}] = \sum_{i=1}^{N} E[m_i|\{u(k)\}], \tag{D6}$$

gdzie: zmienna losowa m_i jest liczbą losowań R potrzebnych do wylosowania wyrazu u(i) sekwencji oraz

$$E[m_i|\{u(k)\}] = \sum_{m_i=1}^{\infty} m_i \cdot P[m_i | \{u(k)\}] \tag{D7}$$

Z własności algorytmu (pkt 3,4,5,6,7) wynika, że jeżeli $u(i) = v_j$, to:

$$P[m_i|\{u(k)\}] = P_j(1-P_j)^{m_i-1} \tag{D8}$$

Po podstawieniu (D8) do (D7), (D7) do (D6), (D6) do (D5) i wykonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$e = 1/K \tag{D9}$$

tzn. tezę twierdzenia.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Adaptive Control Processes: A Guided Tour. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1958.

[2] Kimmel M.: Analiza i modelowanie nieustalonego procesu montażu taśmowego. ZN Pol.Śl. seria Automatyka, z. 43, 1978.

[3] Rozanow J.A.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych. PWN, Warszawa 1974.

[4] Thomopoulos N.T.: Line Balancing-Sequencing Mixed-Model Assembly. Management Science, v. 13, 2, 1967.

[5] Zieliński R.: Generatory liczb losowych. WNT, Warszawa 1972.

[6] Zieliński R.: Metody Monte Carlo. WNT, Warszawa 1972.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТИПА МОНТЕ КАРЛО К ОПТИМИЗАЦИИ СЕКВЕНЦИИ В СЕКВЕНЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Р е з ю м е

Разработан эвристический метод исследования так называемой секвенционной задачи. Основное понятие - так называемый селективный алгоритм случайного генерирования секвенции. Построен пример такого алгоритма и дана оценка его эффективности. Метод указан в применении к секвенционной задаче сборочной линии.

APPLICATION OF A MONTE CARLO TYPE METHOD TO THE SEQUENCE OPTIMIZATION IN THE SEQUENCING PROBLEM

S u m m a r y

The heuristic approach is described to the so-called sequencing problem. Basic notion is a selective algorythm of random generation of sequences. An example of such algorythm is constructed and an estimate of its efficiency is given. The method is shown in application to the assembly line sequencing problem.