ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 53 Nr kol. 649

Zbigniew MITEK

UOGÓLNIONA ODWROTNOŚĆ MACIERZY W PROBLEMIE REALIZACJI MINIMALNEJ

Streszczenie. Praca jest próbą zwrócenia uwagi na znaczenie problemu dekompozycji tzw. macierzy Hankla w algorytmie minimalnej realizacji wg Ho-Kalmana.

Procedurę dekompozycji macierzy prowadzi się w sposób identyczny jak w algorytmie wyznaczania uogólnionej odwrotności macierzy. Procedura nie jest jednoznaczna, co tłumaczy możliwość uzyskania w algorytmie minimalnej realizacji wielu realizacji inwariantnych. Zilustrowano to przykładami numerycznymi realizacji minimalnej algorytmem Ho-Kalmana.

1. Opis dynamiczny układu w przestrzeni stanów, realizacja minimalna

Rozważamy wielowymiarowe układy ciągłe, stacjonarne, liniowe. Równania opisujące układ w przestrzeni stanów mają postać:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \tag{1}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

Macierz układu – $\underline{A}$ jest skończenie wymiarowa (ograniczona liczba zmiennych stanu), warunki początkowe:

$$\underline{x}(t)\Big|_{t=t_o} = \underline{0},$$

oraz

$\underline{A}_{[n,n]}$ – macierz układu o wymiarach n x n;

$\underline{B}_{[n,p]}$ – macierz sterowań o wymiarach n x p;

$\underline{C}_{[q,n]}$ – macierz odpowiedzi o wymiarach q x n;

$\underline{x}_{[n,1]}$ – wektor stanu n-elementowy;

$\underline{y}_{[q,1]}$ – wektor odchyleń sygnału wyjściowego od stanu ustalonego;

$\underline{u}_{[p,1]}$ – wektor odchyleń sygnału wejściowego od stanu ustalonego.

Transformacja Laplace'a układu równań (1) po przekształceniu prowadzi do wyrażenia na macierz transmitancji układu:

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}\,\underline{B}. \tag{2}$$

Wyrażenie $(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1}$ można rozwinąć w nieskończony szereg potęgowy [4] o postaci:

$$(s\,\underline{I} - \underline{A})^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{A}^{i-1}\,s^{-i}. \tag{3}$$

Podstawiając (3) do (2) uzyskamy:

$$\underline{G}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{C}\,\underline{A}^{i-1}\,\underline{B}s^{-i} \tag{4}$$

przyjmując

$$\underline{M}_i = \underline{C}\,\underline{A}^{i-1}\,\underline{B} \tag{5}$$

możemy zapisać:

$$\underline{G}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \underline{M}_i\,s^{-i}, \tag{6}$$

gdzie: $\underline{M}_i$ dla $i = 1,2,\ldots,$ to nieskończony ciąg rzeczywistych (o stałych współczynnikach) macierzy o wymiarach $q \times p$. Ciąg ten przyjęło się nazwać ciągiem parametrów Markowa [3]. Transmitancja wyrażona wzorem (6) ma postać nietypową, niemniej bardzo prosto można ją uzyskać z postaci klasycznej [3][5]. Zwykle bardziej interesujące jest przejście w kierunku przeciwnym - to znaczy wyznaczenie opisu w przestrzeni stanów przy znanej transmitancji macierzowej.
Zagadnienie tego typu w teorii regulacji określone jest mianem realizacji układu dynamicznego.

Definicja 1

Realizacja ma za zadanie nieskończonemu ciągowi parametrów Markowa $\underline{M}_i$, dla $i = 1,2,\ldots,$ przyporządkować trzy rzeczywiste macierze $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ o skończonej liczbie kolumn i wierszy i takie, aby:

$$\underline{M}_i = \underline{C}\,\underline{A}^{i-1}\,\underline{B}, \tag{7}$$

gdzie macierze $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{M}_i$ określono we wzorach (1) i (7). Realizacja algebraiczna, która z wszystkich możliwych daje rozwiązanie o minimalnej liczbie zmiennych stanu (minimalnym wymiarze macierzy $\underline{A}$) nazywana jest realizacją minimalną, co zapisuje się $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$.

Opis dynamiki układu za pomocą transmitancji ujmuje tę część układu dynamicznego, która jest w pełni sterowalna i obserwowalna [4].

Opis, który w przestrzeni stanów będzie posiadał analogiczne własności winien mieć minimalny wymiar [4], z tego względu zainteresowano się problemem realizacji minimalnej, tym bardziej że opracowane algorytmy wykorzystywane są do identyfikacji wielowymiarowych układów dynamicznych, do wyznaczenia opisu w przestrzeni stanów z ciągu danych pomiarowych wejść i wyjść wielowymiarowego układu [2],[3],[5].

Algorytm, który zapewnia uzyskanie realizacji minimalnej został podany po raz pierwszy przez Ho i Kalmana [3].

2. Szkic algorytmu minimalnej realizacji Ho-Kalmana

Układ opisany transmitancją macierzową $\underline{G}(s)$ w prosty sposób można sprowadzić do równoważnej postaci określonej wzorem (6) zawierającej nieskończoną sekwencję parametrów Markowa $\underline{M}_i$ dla i = 1,2,... .

Udowadnia się, że parametry Markowa określone zależnością (6) spełniają tzw. kryterium realizowalności [2],[3].

Twierdzenie 1.(kryterium realizowalności)

Ciąg $\underline{M}_i$ dla i = 1,2,... jest realizowalny, tzn. posiada skończenie wymiarową realizację wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{r}\ \bigvee_{\{a_r\}}\ \bigwedge_{j\geq 1} \left[\underline{M}_{r+j} = \sum_{i=1}^{r} a_i\, \underline{M}_{r+j-1}\right] \tag{8}$$

gdzie:

a_i - skalary; $\underline{M}_i$ - ciąg parametrów Markowa;

r - indeks realizowalności układu dynamicznego;

Interpretacja odpowiednich wielkości dla układu jednowymiarowego o transmitancji

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{b_o + b_1 s + \ldots + b_m s^m + s^{m+1}} \tag{9}$$

jest następująca:

r = m; indeks realizowalności ogólnie równy jest stopniowi wielomianu zerującego macierz $\underline{A}$ równań stanu (1), opisujących układ minimalny ($\underline{A}_{min}$).

$a_i = -b_i$ dla i = 0,1,..., r oraz $a_{r+1} = a_{m+1} = 1$; ogólnie a_i można traktować jako ujemne współczynniki wielomianu zerującego macierz $\underline{A}_{min}$.

Z danego nieskończonego ciągu parametrów $\underline{M}_i$ dla i = 1,2,..., tworzy się tzw. uogólnione macierze Hankla (10), (11), w ogólnym przypadku zawierające nieskończoną liczbę wierszy i kolumn.

Zgodnie z kryterium realizowalności w macierzach Hankla jedynie pierwszych r kolumn i r wierszy blokowych jest liniowo niezależnych - dlatego zapisuje się je w postaci:

- macierz Hankla $\underline{H}_r$

$$\underline{H}_r = \left[\begin{array}{cc|c} \underline{M}_1 & \underline{M}_2 & \underline{M}_r \\ \underline{M}_2 & \underline{M}_3 & \underline{M}_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{M}_r & \underline{M}_{r+1} & \underline{M}_{2r-1} \end{array}\right] = \underline{H}_{[qr,pr]} \tag{10}$$

- macierz Hankla $\underline{H}_r^*$ przesunięta o 1 parametr względem $\underline{H}_r$

$$\underline{H}_r^* = \left[\begin{array}{cc|c} \underline{M}_2 & \underline{M}_3 & \underline{M}_{r+1} \\ \underline{M}_3 & \underline{M}_4 & \underline{M}_{r+2} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \underline{M}_{r+1} & \underline{M}_{r+2} & \underline{M}_{2R} \end{array}\right] = \underline{H}^*_{[qr,pr]} \tag{11}$$

Dysponując macierzą $\underline{H}_r$ wyznacza się nieosobliwe macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$ i takie, aby spełniały zależności

$$\underline{P}\,\underline{H}_r\underline{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}_{[n]} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{0} \end{array}\right]_{[qr,pr]}, \tag{12}$$

gdzie odpowiednio:

$\underline{P}$, $\underline{Q}$ - macierze kwadratowe $\underline{P}_{[qr]}$, $\underline{Q}_{[pr]}$;

n - wymiar realizacji określony równaniem [2],[3], [5]:

$$n = \text{rząd}\left\{\underline{H}_r\right\}$$

W pracach [2],[3] udowadnia się, że minimalna realizacja $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ z nieskończonego ciągu $\underline{M}_i$, w przypadku ogólnym $p \neq q$, ma postać określoną zależnościami:

$$\underline{A}_{[n,n]} = \underline{P}_{[n,qr]}\,\underline{H}^{*}_{[qr,pr]}\,\underline{Q}_{[pr,n]}$$

$$\underline{B}_{[n,p]} = \underline{P}_{[n,qr]}\,\underline{H}_{[qr,p]}$$

$$\underline{C}_{[q,n]} = \underline{H}_{[q,pr]}\,\underline{Q}_{[pr,n]}$$

gdzie przykładowo zapis $\underline{P}_{[n,qr]}$ odpowiada uwzględnieniu w macierzy tylko pierwszych n wierszy $(n \leqslant qr)$.

Algorytm minimalnej realizacji jest stosunkowo prosty. Jedyną trudność związaną z koniecznością obliczania odpowiednich macierzy $\underline{P}$ i $\underline{Q}$ usuwa możliwość zastosowania algorytmu Andree, wykorzystywane w wielu pracach [2], [5].

Algorytm Andree w swojej pierwotnej postaci przewidziany był dla macierzy $\underline{H}_r$ kwadratowej, co w wielu przypadkach dyskwalifikowałoby cały algorytm Ho-Kalmana w zastosowaniach praktycznych.
Minimalna realizacja układów dynamicznych o różnej liczbie wejść i wyjść wymaga rozszerzenia pierwotnie wąsko rozumianego algorytmu Andree do algorytmu wyznaczania uogólnionej odwrotności macierzy $\underline{H}_r$.

3. Uogólniona odwrotność macierzy

Niech $\underline{A}$ i $\underline{Z}$ będą dowolnymi macierzami prostokątnymi, o tej samej liczbie wierszy (w szczególności $\underline{Z}$ może być wektorem). Równanie macierzowe

$$\underline{A}\,\underline{H} = \underline{Z} \tag{14}$$

w przypadku, gdy $\underline{A}$ jest macierzą kwadratową nieosobliwą, ma zawsze rozwiązanie:

$$\underline{H} = \underline{A}^{-1}\,\underline{Z},$$

gdzie $\underline{A}^{-1}$ oznacza odwrotność macierzy $\underline{A}$. Rozwiązanie to jest jedyne. W przypadku macierzy $\underline{A}$ prostokątnych (ogólniej osobliwych) nie można mówić o odwrotności $\underline{A}^{-1}$ w zwykłym sensie, a jedynie o pseudoodwrotności $\underline{A}^{+}$. Pojęcie pseudoodwrotności $\underline{A}^{+}$ dla dowolnej macierzy prostokątnej $\underline{A}$ w naturalny sposób uogólnił C.R.Rao [7] żądając, aby dla każdej macierzy $\underline{Z}$, dla której równanie (14) nie jest sprzeczne, macierz $\underline{H} = \underline{A}^{+}\underline{Z}$ była rozwiązaniem (być może nie jedynym). Okazuje się, że tak zdefiniowana odwrotność $\underline{A}^{+}$ istnieje dla każdej macierzy prostokątnej $\underline{A}$. Nazywa się ją odwrotnością uogólnioną, czasem g - odwrotnością dla odróżnienia od MP - odwrotności (odwrotności Moore'a-Penrosego) [6].

Poniżej przedstawiono podstawowe własności związane z uogólnioną odwrotnością macierzy $\underline{A}$.

Twierdzenie 2

Dla każdej macierzy $\underline{A}_{[m,n]}$ istnieją takie nieosobliwe macierze kwadratowe $\underline{P}_{[m]}$ i $\underline{Q}_{[n]}$, że

$$\underline{P}\,\underline{A}\,\underline{Q} = \underline{J} \tag{15}$$

gdzie:

$$\underline{J} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}_{[r]} & \underline{O}_{[r,n-r]} \\ \hline \underline{O}_{[m-r,r]} & \underline{O}_{[m-r,n-r]} \end{array}\right]; \quad r = \text{rząd } |\underline{A}| \tag{16}$$

$\underline{I}_{[r]}$ - macierz jednostkowa r x r.
Dowód twierdzenia w pracy [6].
Macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$ można rozbić na podmacierze:

$$\underline{P}_{[m]} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{[r,m]} \\ \\ \underline{G}_{[m-r,m]} \end{bmatrix}; \quad \underline{Q}_{[n]} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{S}_{[n-r]} & \underline{E}_{[n,n-r]} \end{array}\right] \tag{17}$$

Twierdzenie 3

Macierz $\underline{A}^{+}$ jest odwrotnością uogólnioną macierzy $\underline{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci:

$$\underline{A}^{+} = \underline{S}\,\underline{F} + \underline{E}\,\underline{U}\,\underline{F} + \underline{S}\,\underline{V}\,\underline{G} + \underline{E}\,\underline{W}\,\underline{G} \tag{18}$$

gdzie:

$\underline{U} = \underline{U}_{[n-r,r]}$; $\underline{V} = \underline{V}_{[r,m-r]}$; $\underline{W} = \underline{W}_{[n-r,m-r]}$ są dowolnymi macierzami o podanych wymiarach; r = rząd $|\underline{A}|$; macierze $\underline{F}, \underline{G}, \underline{S}, \underline{E}$ określają zależności (17).
Dowód twierdzenia w pracy [6].
Jeżeli przyjąć, że $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\underline{W}$ są macierzami zerowymi wówczas wzór (18) redukuje się do wygodnej dla obliczeń postaci

$$\underline{A}^{+} = \underline{S}\,\underline{F} = \underline{Q}_{[n,r]}\underline{P}_{[r,m]} \tag{19}$$

Własność 1

Macierz $\underline{A}^+$ jest odwrotnością uogólnioną macierzy $\underline{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\underline{A}\,\underline{A}^+\,\underline{A} = \underline{A} \tag{20}$$

Dowód w pracy [6].
Odwrotność uogólnioną $\underline{A}^+$ macierzy $\underline{A}$ nazywa się wzajemną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underline{A}^+\,\underline{A}\,\underline{A}^+ = \underline{A}^+ \tag{21}$$

czyli, gdy zarazem $\underline{A}$ jest odwrotnością uogólnioną macierzy $\underline{A}^+$.

Własność 2

Dla każdej macierzy $\underline{A}$ kwadratowej i nieosobliwej macierz odwrotną można przedstawić w postaci:

$$\underline{A}^{-1} = \underline{Q}\cdot\underline{P} \tag{22}$$

Dowód w pracy [1].
Równanie (22) wynika z równania (19), bo jeżeli $m = n$ oraz $m =$ rząd $\{\underline{A}\}$ wówczas $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^+$.

4. Algorytm obliczania uogólnionej odwrotności macierzy

Dla kwadratowych macierzy $\underline{P}$ i $\underline{Q}$, które na początku są macierzami jednostkowymi $\underline{I}_{[m]}$ oraz $\underline{I}_{[n]}$, tworzy się macierz pomocniczą Π.

$$\Pi = \left[\begin{array}{c|c} \underline{P} & \underline{A} \\ \hline \underline{O} & \underline{Q} \end{array}\right] \tag{23}$$

ogólnie: $\underline{P} = \underline{P}_{[m]}$; $\underline{Q} = \underline{Q}_{[n]}$; $\underline{A} = \underline{A}_{[m,n]}$

1. O ile element $a_{11} \in \underline{A}$ jest zerowy można zamienić pierwszych m wierszy lub n ostatnich kolumn macierzy pomocniczej Π, aż element diagonalny macierzy $\underline{A}$ (a_{11}) - będzie różny od zera.
2. Jeżeli $a_{11} \neq 1$ wówczas dzieli się pierwszy wiersz macierzy pomocniczej przez a_{11}.

3. Odejmuje się pierwszą kolumnę macierzy $\underline{A}$ kolejno od kolumny drugiej ze współczynnikiem a_{12}, od kolumny trzeciej ze współczynnikiem a_{13} itd. dla kolejnych n kolumn.
Czynność powtarza się dla wierszy: pierwszy wiersz macierzy $\underline{A}$ odejmuje się kolejno od wiersza drugiego ze współczynnikiem a_{21}, od wiersza trzeciego ze współczynnikiem a_{31} itd. dla kolejnych m wierszy, aż przetransponuje się macierz $\underline{A}$ do postaci zawierającej w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie zera poza elementem diagonalnym $a_{11} = 1$. Wszystkie operacje wykonane na macierzy $\underline{A}$ wykonuje się jednocześnie na wierszach i kolumnach macierzy $\underline{P}$, $\underline{Q}$. Po tym etapie wskaźnik dekompozycji macierzy $\underline{A}$ wynosi: k = 1.

4. Macierz $\underline{X}$ pozbawiamy wiersza zawierającego pierwszy wiersz macierzy $\underline{A}$ oraz kolumny zawierającej pierwszą kolumnę macierzy $\underline{A}$. Powtórzenie cyklu ponownie od punktu 1 zwiększy wskaźnik dekompozycji o jeden. Przejście do początku obliczeń na k-tym etapie dekompozycji macierzy $\underline{A}$, która ma postać:

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{I}[k] & \underline{O}[k,n-k] \\ \hline \underline{O}[m-k,k] & \underline{A}_o^{(k)}[m-k,n-k] \end{array}\right], \tag{24}$$

gdzie podmacierz $\underline{A}_o^{(k)}$ można rozpisać:

$$\underline{A}_o^{(k)} \left[\begin{array}{c} a^{(k)}_{k+1,k+1} \;\cdots\; a^{(k)}_{k+1,n} \\ \hline a^{(k)}_{m,k+1} \;\cdots\; a^{(k)}_{m,n} \end{array}\right],$$

następuje po upewnieniu się czy podmacierz $\underline{A}_o^{(k)}$ nie znika tzn. albo k=m, albo k=n, albo $\underline{A}_o^{(k)}$ zawiera wyrazy zerowe. Inaczej kończymy algorytm przechodząc do punktu 5.

5. Jeżeli podmacierz $\underline{A}_o^{(k)}$ znika bądź jest macierzą zerową wówczas

$$\text{rząd}\left\{\underline{A}\right\} = \text{rząd}\left\{\underline{A}^{(k)}\right\} = k \tag{25}$$

k równe jest ilości jedynek na diagonalnej zdekomponowanej macierzy $\underline{A}$. Uzyskane macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$ czynią zadość zależności (16), uogólnioną odwrotność określa równanie (19), spełnione są również równania (20) i (21).

Przedstawione w punktach 2 i 3 czynności można również wykonać po zmianie rolami kolumn i wierszy [6]. W sposób najbardziej dowolny można zorganizo-

wać poszukiwanie elementu, który winien znaleźć się na diagonalnej macierzy $\underline{A}^{(k)}$ na miejscu $a_{kk} = 0$. Można przeszukiwać np. najpierw k-ty wiersz potem k-tą kolumnę; można inaczej - znaczenie ma kolejność przesukiwania elementów macierzy. Ze względów numerycznych można również szukać w całej podmacierzy $\underline{A}_o^{(k)}$ elementu największego co do modułu.
Za każdym razem znaleziony element umieszcza się na miejscu a_{kk} bądź drogą zamiany, bądź drogą dodawania odpowiednich kolumn lub wierszy do siebie.

Każda z metod prowadzi do różnych dekompozycji macierzy $\underline{A}$, a więc różnych $\underline{P}$, $\underline{Q}$. Uogólniona odwrotność macierzy $\underline{A}$ jest więc istotnie niejednoznaczna.

5. Przykład numeryczny

Dana jest transmitancja $\underline{G}(s)$:

$$\underline{G}(s) = \left[\frac{1}{(s+1)^2} \quad \frac{-s+2}{(s+1)^2}\right]$$

Cztery pierwsze parametry Markowa mają postać:

$$\underline{M}_1 = [0 -1]; \quad \underline{M}_2 = [1 \ 4]; \quad \underline{M}_3 = [-2 \ -7]; \quad \underline{M}_4 = [3 \ 10]; \ \ldots$$

Począwszy od parametru M_3 wszystkie kolejne są liniowo zależne od dwóch poprzednich, co możemy zapisać:

$$\bigwedge_{j \geq 1} \left\{\underline{M}_{2+j} = -\underline{M}_{1+j} - 2\underline{M}_j\right\}$$

Zgodnie z kryterium realizowalności dane parametry Markowa posiadają skończenie wymiarową realizację, istotnie - indeks realizowalności r = 2. Macierz Hankla przybierze postać:

$$\underline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

W pierwszym kroku dekompozycji macierzy $\underline{H}_2$ dla znalezienia elementu różnego od zera na miejsce a_{11} szukano na przemian w pierwszej kolumnie i pierwszym wierszu: a_{21}, a_{12}, ... Pierwszym elementem był a_{21}, zamieniono więc wiersz drugi z pierwszym. Po dekompozycji macierzy $\underline{H}_2$ uzyskano następujące macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rząd macierzy Hankla równy wymiarowi realizacji wyniósł 2. Uogólniona odwrotność macierzy $\underline{H}_2$ jest równa:

$$\underline{H}_2^+ = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizacja minimalna ma postać:

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_1 = [0 \quad -1]$$

Przy inaczej prowadzonej dekompozycji macierzy $\underline{H}_2$ w pierwszym kroku szukam na przemian najpierw w wierszu, potem w kolumnie: a_{12}, a_{21}, ... Uzyskano inne macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$.

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a tym samym i wyniki realizacji minimalnej

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_2 = [-1 \quad 0]$$

W niniejszej pracy zamieszczono przykłady jedynie dwu sposobów dekompozycji macierzy Hankla z siedmiu przeliczonych przez autora. Dla praktycznych obliczeń wystarczy zdecydować się na jeden z wielu sposobów dekompozycji. Za każdym razem uzyskuje się identyczne wielomiany charakterystyczne $\Delta(s)$.

W przeliczonym przypadku jest on równy:

$$\Delta(s) = 1 + 2s^2 + s^3$$

Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że realizacja minimalna $\{\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}\}$ określona wzorem (13) nie jest jednoznaczna, bowiem macierze $\underline{P}$, $\underline{Q}$ można obliczyć w różny sposób, różnie prowadząc dekompozycję macierzy Hankla. Uzyskane różnymi drogami realizacje są inwariantne względem liniowego przekształcenia zmiennych stanu co znaczy, że wszystkie realizacje minimalne danego układu wielowymiarowego są izomorficzne, tzn. określone z dokładnością do transformacji podobieństwa:

$$\underline{A}_2 = \underline{T}^{-1}\,\underline{A}_1\,\underline{T}; \qquad \underline{B}_2 = \underline{T}^{-1}\,\underline{B}_1; \qquad \underline{C}_2 = \underline{C}_1\underline{T}$$

Istotnie tak jest bo:

$$\underline{M}_i = \underline{C}_2\,\underline{A}_2^{i-1}\,\underline{B}_2 = (\underline{C}_1\,\underline{T})\underline{T}^{-1}\,\underline{A}_1\,\underline{T}(\underline{T}^{-1}\,\underline{B}_1) = \underline{C}_1\,\underline{A}^{i-1}\,\underline{B}_1$$

LITERATURA

[1] Andree A.: An algorythm for computation of the inverse of a matrix. Universy of Oklahoma. 1956.

[2] Hajdasiński A.K.: Identyfikacja wielowymiarowych układów dynamicznych z wykorzystaniem teorii realizacji. Praca doktorska. Gliwice 1978.

[3] Ho. B.L., Kalman R.E.: Effective construction of linear state-variable models from input/output function. Regulengstechnik, Heft 12, 1966.

[4] Kaczorek T.: Synteza liniowych układów stacjonarnych metodą przestrzeni stanów. PWN, Warszawa 1975.

[5] Mitek Z.: Modele matematyczne układów biologicznych. Praca magisterska. Gliwice 1979.

[6] Warmus M.: Uogólnione odwrotności macierzy. PWN. Warszawa 1972.

[7] Rao C.R.: Anote on a generalized inverse of a matrix with application to problems in matematical statistics. J. Roy. Statist. Soc. 24, 152-158, 1962.

ОБОБЩЁННАЯ ИНВЕРСИЯ МАТРИЦ В ПРОБЛЕМЕ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Р е з ю м е

В работе обращается внимание на значение проблемы декомпозиции так называемой матрицы Ганкла в алгоритме минимальной реализации Го-Кальмана.

Процедуру декомпозиции матрицы ведётся таким же образом, как в алгоритме определения обобщенной инверсии матрицы. Процедура не однозначная, что обясняет возможность получения в алгоритме минимальной реализации много реализаций инвариантных. Это представлено на нумерических примерах минимальной реализации алгоритма Го-Кальмана.

THE GENERALIZED RECIPROCAL OF THE MATRIX DURING THE MINIMAL REALIZATION AFTER HO-KALMAN

S u m m a r y

This paper provides an attempt at showing the great importance of the decomposition of so called Hankel's matrix during the minimal realization in an algorythm after Ho-Kalman.

The decompositional procedure of the matrix is carried out in the same way as with the algorythm in calculating its general reciprocal. This procedure is not plain, which means, that there is a given possibility of obtainig a number of the invariable realization during the minimal realization of an algorythm. This has been illustrated by the numerical examples of a minimal realization by help of Ho-Kalman's algorithm.