ELEKTRYKA z. 40

BERNARD BARON

IDENTYFIKACJA I STEROWANIE UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO Z PUNKTU WIDZENIA KSZTAŁTOWANIA NIEKTÓRYCH CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH MASZYN ASYNCHRONICZNYCH

P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 401 – GLIWICE 1974

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 401

BERNARD BARON

IDENTYFIKACJA I STEROWANIE UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO Z PUNKTU WIDZENIA KSZTAŁTOWANIA NIEKTÓRYCH CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH MASZYN ASYNCHRONICZNYCH

ZESZYT CZTERDZIESTY

PRACA HABILITACYJNA Nr 132

PL ISSN 0072-4688

GLIWICE 1974

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI

Helena Ogrodnik

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł 50+175 Ark. wyd. 4,8 Ark. druk. 5,75 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 13.9.1973 Podpis. do druku 3.12.1973 Druk ukończ. w styczniu 1974
Zam 1156 10. 9. 1973 M-23 Cena zł 6,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP

Wzrost zainteresowania zagadnieniem sterowania, obserwowany w ostatnim dziesięcioleciu, jest wynikiem powstania bardzo szeroko rozwiniętej ogólnej teorii, opartej na metodach wariacyjnych i szybkiej technice obliczeniowej. Daje się to również zaobserwować odnośnie układów elektromechanicznych. W wielu procesach technologicznych zachodzi konieczność stosowania większych maszyn. Ponieważ moc maszyn rośnie szybciej niż jej wymiary geometryczne, powoduje to wzrost stosunku mocy do jednostki objętości, a to znowu związane jest z momentem bezwładności. Wynika z tego, że w maszynach tych możliwe są znacznie większe przyspieszenia układów mechanicznych, które powodują, że w dynamicznych fazach rozruchowych muszą być uwzględnione stany nieustalone wielkości elektrycznych i mechanicznych. Wiąże się to bezpośrednio z koniecznością wprowadzenia w wielu procesach technologicznych sterowań ekstremalnych ze względu na pożądane wskaźniki jakości, wynikające z danego procesu technologicznego.

Widzimy więc, że szczególnym rodzajem zagadnienia projektowania układu elektromechanicznego jest zagadnienie sterowania układu. W wyniku przetłumaczenia na język matematyki celów jakie ma spełnić projektowany układ sterowania, otrzymujemy zagadnienie zwane zagadnieniem sterowania.

Zasadniczymi elementami zagadnienia sterowania są:

Model matematyczny układu, który może być sterowany.
Pożądany sygnał wyjściowy układu.
Zbiór dopuszczalnych sterowań.
Funkcjonał jakości będący miarą efektywności danego sterowania.

Scharakteryzujmy w skrócie powyższe elementy zagadnienia sterowania odnośnie układu maszyny asynchronicznej. Model matematyczny układu elektromechanicznego najwygodniej otrzymamy wykorzystując wariacyjną zasadę stacjonarnego działania. Mimo założenia liniowości elementów rozpatrywanego układu elektromechanicznego (np. liniowość obwodów magnetycznych) odpowiadający mu układ równań otrzymany tą drogą będzie posiadał zasadniczą nieliniowość funkcjonalną wynikającą stąd, że pochodną formy liniowej opisującej związki w obwodach elektrycznych stanowi moment elektromechaniczny występujący w równaniu wiążącym wielkości mechaniczne z elektrycznymi. W dalszej kolejności wprowadzimy takie quasi-współrzędne, które by nie tylko uprościły układ równań, lecz przede wszystkim pozwoliły wyeliminować reakcję więzów krępujących ruch rozpatrywanego układu.

Cel działania układu elektromechanicznego w danym procesie technologicznym jest niejednokrotnie przedstawiony w postaci wymagań co do sygnału wyjściowego. Jeżeli jest projektowany układ nadążny, to pożądanym sygnałem wyjściowym jest sygnał śledzony lub bliski sygnałowi śledzonemu. W pracy tej sygnałem wyjściowym dla maszyny asynchronicznej będzie moment elektromechaniczny, którego charakterystyka dynamiczna będzie kształtowana ze względu na minimum oscylacji.

Sygnałem sterującym maszyną asynchroniczną będą napięcia trójfazowe przyłożone do poszczególnych uzwojeń stojana. Mając na uwadze realizację techniczną przyjmujemy zbiór sterowań dopuszczalnych, który będzie miał elementy ograniczone. Poza tym założymy, że sterowania dopuszczalne będą przedziałami ciągłe, np."wykrojone" z sinusoidalnego napięcia sieci przez odpowiednie układy tyrystorowe.

Wybór postaci matematycznej wskaźnika jakości układów elektromechanicznych jest w dużym stopniu subiektywny. Wybór dokonany przez jednego projektanta może być zupełnie inny od wyboru dokonanego przez drugiego projektanta. Ważną rolę w określeniu wskaźnika jakości odgrywa doświadczenie i intuicja inżyniera.

Podsumowując, należy stwierdzić, że zagadnienie sterowania jest zagadnieniem projektowania układu sterowania, przedstawionym w terminach matematycznych. Rozwiązanie zagadnienia sterowania jest rozwiązaniem wyidealizowanym, otrzymanym na papierze lub na maszynie cyfrowej, służącym inżynierowi jako wskazówka do oceny różnych wariantów projektu rzeczywistego, działającego układu sterowania, jak również do wyboru odpowiedniego rozwiązania suboptymalnego.

2. MODELOWANIE MATEMATYCZNE UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

Modelowaniem nazywa się sposób poznawania realnych obiektów, który polega na tym, że wiedzę uzyskaną w toku badań przeprowadzonych na modelu odnosi się do obiektu modelowanego, czyli – innymi słowy – wiedzę formułowaną w języku modelu przekłada się na język oryginału. Ten sposób stosuje się wówczas, gdy prowadzenie badań w technice staje się niemożliwe z powodu wielkiej złożoności oryginału.

Modele wykorzystywane w toku poznaniu realnych obiektów można podzielić na trzy podstawowe typy:

- modele fizyczne,
- przedmiotowo-matematyczne,
- abstrakcyjno-matematyczne.

Dwa pierwsze typy modeli to przedmioty należące do realnego świata, pod pewnymi cechami analogiczne do oryginału, natomiast modele abstrakcyjno-matematyczne są po prostu określonymi symbolami (z reguły o charakterze logiczno-matematycznym), nie mającymi nic wspólnego z naturą fizyczną obiektów modelowanych i spełniającymi jedynie funkcję oznaczenia.

W przeciwieństwie do dwóch pierwszych modeli, badanie doświadczalne modeli abstrakcyjno-matematycznych zastępuje analiza logiczna, nowe informacje uzyskuje się w rezultacie wyprowadzenia w sposób dedukcyjny zdań, które je zawierają z wyjściowego opisu modelu.

Daje to szczególne efekty odnośnie układów elektromechanicznych, jeżeli za punkt wyjścia przyjmuje się zasady wariacyjne.

Podobieństwo struktur logiczno-matematycznych układów mechanicznych i elektrycznych zaobserwował już Maxwell przekształcając podstawowe równania teorii elektromagnetycznej tak, że przyjęły one postać równań mechaniki Lagrange'owa, a więc postać odmiennego sformułowania aksjomatów Newtonskich. Z faktu, że przekształcenie takie jest możliwe wcale nie wynika, iż prawa teorii zjawisk elektromagnetycznych wyjaśniono w ten sposób przez prawa mechaniki. Co prawda Maxwell uporczywie usiłował wyprowadzić równania nazwane jego imieniem z mechanicznych własności hipotetycznej substancji – etaru, jednakże wysiłki zmierzające do wytłumaczenia własności pola elektromagnetycznego na podstawie mechaniki zakończyły się zupełnym fiaskiem. Powstał nowy byt, nowe pojęcie, dla którego nie było miejsca w opisie mechanistycznym.

Należy jednak zaznaczyć, że formalna identyczność teorii jest bardzo ważna, gdyż dzięki temu możemy stosować aparat matematyczny rozbudowany dla jednej dziedziny. Ponadto formalne analogie między różnymi teoriami oraz wyobrażenia, jakie mogą im towarzyszyć, miewają ogromną wartość heurystyczną w badaniach naukowych, szczególnie gdy ma się na uwadze projektowanie układów elektromechanicznych poprzez sterowanie.

2.1. Elektrodynamika ośrodków wolnoporuszających się w przybliżeniu quasi - stacjonarnym dla układów z obwodami zamkniętymi w ujęciu wariacyjnym

Załóżmy, że w pewnej objętości V zawarte jest pole elektromagnetyczne wywołane przez zamknięte obwody z prądem o gęstości $\mathbf{j} = \varrho_{sw}\mathbf{V}$. Wówczas

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{2.1}$$

i jak wynika z równania ciągłości

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \varrho_{sw}}{\partial t} \tag{2.2}$$

rozmieszczenie ładunków swobodnych o gęstości ϱ_{sw} nie zależy od czasu. Załóżmy, że w chwili początkowej rozważana przestrzeń jest pozbawiona ładunków (tzn. że przewodniki stanowiące obwody zamknięte są elektrycznie obojętne, tj. gęstość całkowita ładunków swobodnych i związanych jest równa zeru $\varrho = \varrho_{zw} + \varrho_{sw} = 0$). Wtedy w układzie z zamkniętymi obwodami nie będzie pola elektrostatycznego ($V = \mathrm{const}$), a zatem pole elektromagnetyczne reprezentuje w tym przypadku potencjał wektorowy $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{2.3}$$

Wprowadzając potencjał wektorowy $\mathbf{A}$, równania elektrodynamiki środowisk wolnoporuszających się w przybliżeniu quasistacjonarnym dla układów z obwodami zamkniętymi można napisać w postaci

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \mathbf{j}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{j} = \gamma\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{V} \times \operatorname{rot}\mathbf{A} + \mathbf{E}_z\right), \tag{2.5}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{2.6}$$

gdzie $\mathbf{E}_z(x_1, x_2, x_3, t)$ jest zewnętrznym polem elektrycznym wymuszonym przez źródło zewnętrzne, γ - przewodność ośrodka.

Gęstość ładunku elektrycznego ϱ i gęstość prądu $\mathbf{j}$ można wyrazić przez wektor ładunku elektrycznego $\mathbf{q}$. Wektor ten określają w każdym punkcie przestrzeni równania

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \tag{2.7}$$

$$\varrho = -\mathrm{div}\,\mathbf{q} \tag{2.8}$$

Zauważmy, że z równania (2.2) wynika, że jeżeli w jakiejkolwiek chwili t spełnione jest równanie (2.8) i równanie (2,7), to równanie (2.8) jest spełnione dla wszystkich t. Można więc uważać, że równanie (2.7) z warunkiem początkowym (2.8) wyznaczają wektor $\mathbf{q}$.

Zanim sformułujemy zagadnienie wariacyjne prowadzące do równań elektrodynamiki (2.4) i (2.5) zauważmy, że takie zagadnienie w dynamice układów dyskretnych, prowadzące do równań Lagrange'a 2 rodzaju, jest treścią zasady najmniejszego działania. Zgodnie z tą zasadą rozpatruje się pewną klasę trajektorii ruchu punktu w przestrzeni konfiguracyjnej z funkcją Lagrange'a L, łączących punkty $q^k(t_0)$ i $q^k(t_1)$. Wtedy okazuje się, że wzdłuż trajektorii ruchu rzeczywistego zachodzi

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + \delta A)\, dt = 0 \,, \tag{2.9}$$

gdzie δ oznacza wariację izochroniczną, tj. niezależną od czasu, δA - pracę wirtualną sił zewnętrznych i rozpraszających i $\delta q^k(t_0) = \delta q^k(t_1) = 0$.

W ośrodkach ciągłych oprócz zmiennej niezależnej t mamy jeszcze zmienne niezależne przestrzenne x_1, x_2, x_3. Dlatego też należy trochę zmodyfikować powyższe sformułowanie zagadnienia wariacyjnego. Zauważmy przede wszystkim, że operacja wariacji jest przemienna nie tylko z operacją różniczkowania względem czasu, lecz również z operacją różniczkowania względem x_1, x_2, x_3. Poza tym wariacje parametrów określające stan równowagi układu ciągłego w objętości V są równe zeru nie tylko na końcach przedziału (t_0, t_1), lecz również na brzegu S objętości V.

Przy sformułowaniu równań pola za pomocą zasady najmniejszego działania powinniśmy przyjmować ruch ładunków wewnątrz przewodników za z góry dany i wariować tylko pole, tzn. potencjał wektorowy $\delta\mathbf{A}$. Ponieważ jednak chcemy otrzymać równanie ruchu ładunków wewnątrz przewodników będziemy wariować również wektor ładunku elektrycznego $\delta\mathbf{q}$, przyjmując na razie ruch mechaniczny przewodników za dany.

Po tych wstępnych uwagach przejdźmy teraz do sformułowania zagadnienia wariacyjnego prowadzącego do równań elektrodynamiki ośrodków wolnoporuszających się w przybliżeniu quasi-stacjonarnym dla układów z obwodami zamkniętymi. Załóżmy, że w pewnej objętości V zawarte jest pole elektromagnetyczne i prądy reprezentowane przez $\mathbf{A}$ i $\mathbf{q}$, które na brzegu S tej objętości mają zadane wartości. Oprócz $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3, t)$ i $\mathbf{q}(x_1,x_2,x_3,t)$ weźmiemy również wielkości $\mathbf{A}'(x_1, x_2, x_3, t)$ i $\mathbf{q}'(x_1, x_2, x_3, t)$ reprezentujące inne pole i prądy, lecz takie, że na brzegu S spełnione są równości $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ i $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$. Wtedy, dla wyjściowego pola i prądów zawartych w objętości V spełniających na brzegu S zadane warunki i dla zadanego zewnętrznego pola elektrycznego $\mathbf{E}_z(x_1, x_2, x_3, t)$ spełnione jest równanie

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L_e + \delta A)\, dt = 0 , \tag{2.10}$$

gdzie niezależne w objętości V wariacje $\delta\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \mathbf{A}$, $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q}' - \mathbf{q}$, znikają na końcach przedziału (t_0, t_1) i na brzegu S objętości V.
W równaniu tym

$$\delta A = \int_V \left(\mathbf{E}_z - \frac{1}{\gamma}\mathbf{j}\right)\delta\mathbf{q}\, dV \tag{2.11}$$

reprezentuje wirtualną pracę sił zewnętrznych i rozpraszających, a

$$L_e = \int_V \left[\mathbf{A}\mathbf{j} - \frac{1}{2\mu}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2\right] dV \tag{2.12}$$

funkcję Lagrange'a.

Aby udowodnić to twierdzenie, wystarczy pokazać, że w równaniu (2.10) po podstawieniu funkcji Lagrange'a (2.12) i wyrażenia (2.11) na pracę wirtualną sił zewnętrznych i rozpraszających, po wyrażeniu wariacji L_e przez wariacje niezależne $\delta\mathbf{A}$ i $\delta\mathbf{q}$, po wykorzystaniu warunków zachodzących na końcach przedziału (t_0, t_1) i na brzegu S objętości V, otrzymamy równania elektrodynamiki (2.4) i (2.5). Obliczymy najpierw wariację funkcji Lagrange'a. Wtedy

$$\delta L_e = \int_V \left[\delta\mathbf{A}\,\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}\,\delta\,\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\mathbf{A}.\mathbf{j})\delta\mathbf{r} - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,\delta\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\right] dV, \tag{2.13}$$

gdzie $\delta\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\delta t = \mathbf{v}\,\delta t;\quad \delta\mathbf{q} = \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}\delta t = \mathbf{j}\,\delta t = \varrho\,\delta\mathbf{r};\quad \mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}.$

Wykorzystując przemienność operacji wariacji i różniczkowania otrzymamy

$$\delta L_e = \int_V \left[\frac{\partial q}{\partial t}\delta A + A\frac{\partial}{\partial t}\delta q + \operatorname{grad}(Aj)\delta r - \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A \operatorname{rot}\delta A\right] dV. \tag{2.14}$$

Uwzględniając następującą tożsamość

$$\operatorname{grad}(a.b) = a \times \operatorname{rot} b + b \times \operatorname{rot} a + \sum_{k=1}^{3}(a.\operatorname{grad} b_k)i_k + \sum_{k=1}^{3}(b.\operatorname{grad} a_k)i_k, \tag{2.15}$$

gdzie i_k – wersory jednostkowe oraz pamiętając, że przy obliczaniu $\operatorname{grad}(A.j)$ wektor j jest stały otrzymamy

$$\operatorname{grad}(Aj) = j \times \operatorname{rot} A + \sum_{k=1}^{3}(j.\operatorname{grad} A_k)i_k. \tag{2.16}$$

Z tożsamości

$$\operatorname{div}(a \times b) = b \operatorname{rot} a - a \operatorname{rot} b \tag{2.17}$$

po podstawieniu za $a = \delta A$, $b = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A$ otrzymamy

$$-\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A \operatorname{rot}\delta A = -\operatorname{div}(\delta A \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A) - \operatorname{rot}(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot} A)\delta A. \tag{2.18}$$

Podstawiając relację (2.16) i (2.18) do wzoru (2.14) oraz uwzględniając, że

$$A\frac{d}{dt}\delta q = \frac{d}{dt}(A\delta q) - \frac{dA}{dt}\delta q, \tag{2.19}$$

gdzie

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\left[(\operatorname{grad} A_k).v\right]i_k \tag{2.20}$$

otrzymamy

$$\delta L_e = \int\limits_V \left[\frac{\partial q}{\partial t}\delta A + \frac{d}{dt}(A\delta q) - \frac{\partial A}{\partial t}\delta q + v \times \mathrm{rot}\, A\,\delta q - \mathrm{div}(\delta A \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)\right.$$

$$\left. - \mathrm{rot}(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)\delta A\right] dV \,. \tag{2.21}$$

Podstawiając teraz wyrażenia δL_e i δA do równania (2.10) zauważmy, że występujący tam wyraz można scałkować po czasie

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\int\limits_V \frac{d}{dt}(A\,\delta q)dV\right]dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} d\left[\int\limits_V A\,\delta q\, dV\right] = \int\limits_V A\,\delta q\, dV\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0, \tag{2.22}$$

gdyż na końcach przedziału (t_0, t_1) wariacja δq jest równa zeru. Oprócz tego można pokazać, że znika całka z dywergencji wyrażenia zawierającego wariację δA. Istotnie stosując twierdzenie Gaussa do całki

$$\int\limits_V \mathrm{div}(\delta A \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)dV$$

otrzymamy

$$\int\limits_V \mathrm{div}(\delta A \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)dV = \int\limits_S (\delta A \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)\, n ds = 0,$$

gdyż wariacja δA znika na brzegu objętości V.

Grupując pozostałe wyrazy zawierające współczynniki δA i δq, otrzymamy następującą postać zasady wariacyjnej (2.10).

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\int\limits_V\left[(j - \mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\, A)\,\delta A + (-\frac{\partial A}{\partial t} + v \times \mathrm{rot}\, A + E_z - \frac{1}{\gamma}j)\,\delta q\right]dV\right\}dt = 0.$$

Stąd na mocy niezależności wariacji δA i δq otrzymamy równanie (2.4) i (2.5), co kończy dowód podanego wyżej twierdzenia.

Doprowadźmy funkcję Lagrange'a (2.12) do innej postaci. Na mocy tożsamości (2.17) mamy

$$\int_V \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 dV = \int_V \mathrm{div}(\mathbf{A} \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) dV + \int_V \mathbf{A}\,\mathrm{rot}(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) dV =$$

$$= \int_S (\mathbf{A} \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{A})\,\mathbf{n}\,ds + \int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\,dV$$

Zauważmy, że jeżeli obszar całkowania zawiera całe pole, wtedy znika przedostatnia całka występująca w tej zależności, gdyż na brzegu obszaru pole równa się zeru. Wobec tego

$$L_e = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\,dV\,. \tag{2.23}$$

Wynika z tego, że funkcja Lagrange'a a rozpatrywanego układu jest równa energii magnetycznej układu W_m.

2.2. Praca sił ponderomotorycznych przy przesunięciach przewodników objętościowych

Rozpatrzmy przypadek poruszających się przewodników z prądem kosztem zewnętrznych sił elektromotorycznych lub w wyniku ubytku energii pola elektromagnetycznego. Wówczas wykonana będzie praca mechaniczna na przesunięcie ciał materialnych. Praca mechaniczna δA (praca sił ponderomotorycznych) wykonana w czasie δt wynosi

$$\delta A = \int_V \left[(\mathbf{E}_z\cdot\mathbf{j} - \frac{1}{\gamma}\mathbf{j}^2)\,\delta t - \delta W_m\right] dV, \tag{2.24}$$

gdzie pierwszy wyraz po prawej stronie reprezentuje pracę źródeł zewnętrznych, drugi wyraz – straty cieplne, a wielkość δW_m – przyrost energii magnetycznej. Zauważmy, że we wzorze (2.24) nie uwzględniono energii elektrycznej układu, gdyż w quasi-stacjonarnym przybliżeniu z zamkniętymi obwodami jest ona mała w porównaniu z energią magnetyczną.

Podstawmy teraz do wzoru (2.24) wyrażenie (2.5), tj.

$$\mathbf{j} = \gamma(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \mathbf{E}_z)\,.$$

Otrzymamy wówczas

$$\delta A = \int_V \left[j \frac{\partial A}{\partial t} \delta t - j(v \times \mathrm{rot}\, A)\delta t - \delta W_m \right] dV. \tag{2.25}$$

Ponieważ

$$v \delta t = \frac{\partial r}{\partial t} \delta t = \delta r ,$$

a przyrost potencjału wektorowego A w czasie δt wyraża się wzorem

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial t} \delta t$$

otrzymamy

$$\delta A = \int_V \left[j \delta A - j(\delta r \times \mathrm{rot}\, A) - \delta W_m \right] dV . \tag{2.26}$$

Wykorzystując między innymi tożsamość (2.17) przekształcimy teraz wyrażenie

$$\int_V j(\delta r \times \mathrm{rot}\, A)\, dV = \int_V (j \times \delta r)\mathrm{rot}\, A\, dV = \int_V \Big[\mathrm{div}\, A \times (j \times \delta r) +$$

$$+ A\, \mathrm{rot}(j \times \delta r) \Big] dV,$$

gdzie

$$\int_V \mathrm{div}\, A \times (j \times \delta r) dV = \int_S \left[A \times (j \times \delta r) \right] n ds = 0,$$

gdyż na podstawie założenia na brzegu obszaru całkowania wszystkie pola i prądy są równe zeru. Wobec tego

$$\int_V j(\delta r \times \mathrm{rot}\, A) dV = \int_V A\, \mathrm{rot}(j \times \delta r) dV \tag{2.27}$$

i wzór (2.26) można zapisać w postaci

$$\delta A = \delta \int_V (\mathbf{A}\mathbf{j} - W_m) dV - \int_V \mathbf{A}\left[\mathrm{rot}(\mathbf{j} \times \delta \mathbf{r}) + \delta \mathbf{j}\right] dV \,. \qquad (2.28)$$

Wyrażenie

$$\int_V (\mathbf{A}\mathbf{j} - W_m) dV = \int_V \left[\mathbf{A}\mathbf{j} - \frac{1}{2\mu} (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})^2\right] dV$$

jest identyczne z wyrażeniem (2.12) i jak pokazaliśmy w poprzednim paragrafie reprezentuje funkcję Lagrange'a

$$L_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV$$

rozważanego układu.

Z wyrażenia (2.28) wynika, że jeżeli podczas przemieszczenia $\delta \mathbf{r}$ gęstość prądu zmienia się według wzoru

$$\delta \mathbf{j} = \mathrm{rot}(\delta \mathbf{r} \times \mathbf{j}) \,, \qquad (2.29)$$

to funkcja Lagrange'a L_e będzie funkcją tworzącą dla sił ponderomotorycznych. Zbadamy teraz co oznacza ten warunek (2.29).

Wobec tego wybierzmy na poruszającym się przewodniku zamknięty obwód C, poruszający się razem z przewodnikiem i wyznaczmy warunek, przy którym prąd J przepływający przez powierzchnię S rozpostartą na obwodzie C ma stałą wartość. Zauważmy, że

$$J = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{s} \qquad (2.30)$$

i podczas przemieszczenia $\delta \mathbf{r}$ przyrost gęstości prądu w różnych punktach na powierzchni S wynosi $\delta \mathbf{j}$. Poza tym każdy element $d\mathbf{l}$ obwodu C zakreśli pole $\delta \mathbf{s} = \delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$. Wobec tego prąd będzie miał stałą wartość, jeżeli $\delta J = 0$ lub na mocy (2.30)

$$\delta J = \int_S \delta \mathbf{j}\, d\mathbf{s} + \int_C \mathbf{j}(\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l}) = 0 \,. \qquad (2.31)$$

Drugą całkę na podstawie twierdzenia Stokesa można przekształcić następująco:

$$\int_{C} \mathbf{j}(\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{l}) = \int_{C} (\mathbf{j} \times \delta \mathbf{r})d\mathbf{l} = \int_{S} \operatorname{rot}(\mathbf{j} \times \delta \mathbf{r})d\mathbf{S} = -\int_{S} \operatorname{rot}(\delta \mathbf{r} \times \mathbf{j})d\mathbf{s}.$$

Wobec tego na mocy dowolności powierzchni S, otrzymamy (2.29). Pokazaliśmy zatem, że warunek (2.29) oznacza różniczkowanie przy stałych prądach. W tym przypadku $\delta A = \delta L_e$, gdzie po lewej stronie jest wyrażenie na pracę elementarną, a po prawej przyrost funkcji Lagrange'a. Jeżeli założymy że rozpatrywany układ przewodników z prądem stałym posiada "m" mechanicznych stopni swobody to wtedy

$$\delta L_e = X_k \delta \varkappa^k , \quad (k = 1,2,\ldots,m) \tag{2.32}$$

gdzie $\delta \varkappa^k$ – wariacja mechanicznej współrzędnej uogólnionej.

Wynika stąd, że L_e jest funkcją tworzącą dla sił ponderomotorycznych.

2.3. Model dyskretny procesów elektromagnetycznych w przybliżeniu quasistacjonarnym

Weźmy pod uwagę układ n obwodów zamkniętych z prądem o danym rozkładzie gęstości prądu, posiadających n-mechanicznych stopni swobody o współrzędnych uogólnionych $\varkappa^1, \varkappa^2, \ldots, \varkappa^n$. Nie uwzględniamy więc na razie więzów mechanicznych nałożonych na układ. Załóżmy, że w każdym przewodniku objętościowym jest określony rozkład gęstości prądu

$$\mathbf{j}_k(x_1,x_2,x_3,\varkappa^1,\varkappa^2,\ldots,\varkappa^n,t) = \mathbf{s}_k^k(x_1,x_2,x_3,\varkappa^1,\varkappa^2,\ldots,\varkappa^n)\dot{q}^{|k|} , \tag{2.33}$$

gdzie $\dot{q}^k(t)$ – prąd całkowity w k-tym przewodniku.

Ponieważ $\operatorname{div}\mathbf{j}_k = 0$, więc $\operatorname{div}\mathbf{s}_k = 0$. Wektor $\mathbf{s}_k$ jest więc wektorem solenoidalnym dla danego rozkładu objętościowego prądu.

Obliczmy teraz strumień magnetyczny ϕ_{kl} pochodzący od przewodnika C_k a przenikający C_l. Strumień ten jest proporcjonalny do prądu $\dot{q}^k$ w przewodniku C_k.

Kładziemy

$$\phi_{kl} = M_{kl}\, \dot{q}^{|k|} \tag{2.34}$$

Zanim określimy M_{kl} wprowadzimy następującą definicję

$$\phi_{kl} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\dot{q}^{|l|}} \sum_{r} \phi^{r}_{kl}\, d\dot{q}_r^{|l|}, \tag{2.35}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich elementarnych rurkach prądu;

dq_r – prąd płynący przez r-tą rurkę w l-tym przewodniku;

ϕ^r_{kl} – strumień magnetyczny skojarzony z r-tą rurką w l-tym przewodniku wytworzony przez k-ty przewodnik.

Mamy

$$\phi^r_{kl} = \int_{s^r_l} B_k dS = \int_{s^r_l} \operatorname{rot} A_k ds = \int_{o^r_l} A_k dl^r_l, \qquad (2.36)$$

gdzie o^r_l jest konturem r-tej rurki prądu w l-tym przewodniku,

s^r_l – powierzchnia rozpostarta na tym konturze,

B_k – wektor indukcji magnetycznej wywołany przez k-ty przewodnik.

Podstawiając wzór (2.36) do definicji (2.35) otrzymamy

$$\phi_{kl} = \frac{1}{\dot{q}^{|l|}} \sum_r \int_{C^r_l} A_k \, dl^r_l \, d\dot{q}^{|l|}_r .$$

Niech dS^r_l będzie przekrojem elementarnej r-tej rurki w l-tym przewodniku (zmiennym zresztą wzdłuż rurki).
Wówczas

$$d\dot{q}^{|l|}_r \, dl^{|r|}_l = j_l dS^r_{|l|} \, dl^{|r|}_{|l|} = j_l dV_{|l|} .$$

A więc

$$\phi_{kl} = \frac{1}{\dot{q}^{|l|}} \int_{V_l} A_k \, j_l dV. \qquad (2.37)$$

Ze względu na liniowość równania (2.4) otrzymamy

$$A_k(x_1,x_2,x_3,x^1,x^2,\ldots,x^n,t) = a_k(x_1,x_2,x_3,x^1,x^2,\ldots,x^n)\dot{q}^{|k|}(t). \qquad (2.38)$$

Współczynnik indukcyjności wzajemnej przyjmuje więc postać

$$M_{kl}(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \int_{V_l} a_k(x_1,x_2,x_3,x^1,\ldots,x^n) s_l(x_1,x_2,x_3,x^1,\ldots,x^n) dV. \qquad (2.39)$$

Po tych wstępnych rozważaniach przystąpimy do modelowania dyskretnego. W związku z tym w obszarze V zawierającym przewodniki objętościowe wybierzmy w klasie funkcji dopuszczalnych rozkładu prądów pełny układ solenoidalnych funkcji wektorowych

$$s_k(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2,\dots,\mathcal{X}^n)$$

Wtedy wektor gęstości prądu

$$j(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2,\dots,\mathcal{X}^n,t)$$

można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu

$$j(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2,\dots,\mathcal{X}^n,t) = \dot{q}^k(t)\, s_k(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\dots,\mathcal{X}^n)\,, \qquad (2.40)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach k = 1,2,...

Przyjmując zatem współczynnik $\dot{q}^k$ tego rozwinięcia jako prędkości uogólnione można traktować przewodniki z prądem jako dyskretny układ dynamiczny z przeliczalną liczbą współrzędnych q^k i prędkości $\dot{q}^k$ wyznaczających stan naszego układu.

W tym przypadku potencjał wektorowy **A** w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru o współrzędnych (x_1,x_2,x_3) zgodnie z równaniem (2.4) jest funkcją uogólnionych prędkości $\dot{q}^k(k = 1,2,\dots)$ oraz uogólnionych współrzędnych mechanicznych $\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2,\dots,\mathcal{X}^n$, tj.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\mathcal{X}^2,\dots,\mathcal{X}^n,\dot{q}^1,\dot{q}^2,\dots)\,.$$

Poza tym ze względu na liniowość równania (2.4) mamy

$$\mathbf{A}(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\dots,\mathcal{X}^n,\dot{q}^1,\dot{q}^2,\dots) = \dot{q}^k\, \mathbf{A}_k(x_1,x_2,x_3,\mathcal{X}^1,\dots,\mathcal{X}^n), \qquad (2.41)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach k = 1,2,...

Podstawmy teraz wyrażenia (2.40) i (2.41) do funkcji Lagrange'a w postaci (2.23). Otrzymamy

$$L_e = \frac{1}{2}\int_V a_k s_l \dot{q}^k \dot{q}^l dv = \left[\frac{1}{2}\int_V a_k s_l dv\right]\dot{q}^k\dot{q}^l. \qquad (2.42)$$

Na mocy związku (2.39) równanie (2.42) można przepisać w postaci

$$L_e = \frac{1}{2} M_{kl}(x^1,\ldots,x^n)\dot{q}^k\dot{q}^l , \tag{2.43}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach k,l = 1,2,...

Zauważmy teraz, że funkcję Lagrange'a (2.43) można uważać za energię kinetyczną układu $L_e = T_e$, gdyż $\dot{q}^k$ są prędkościami uogólnionymi.

Podstawiając w wyrażeniu (2.11) na pracę wirtualną i rozpraszającą wzór (2.40) oraz

$$\delta \mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}\,\delta t = \mathbf{j}\,\delta t = \mathbf{s}_k\dot{q}^k\,\delta t = \mathbf{s}_k\,\delta q^k \tag{2.44}$$

otrzymamy

$$\delta A = (e_k - R_{kl}\,\dot{q}^l)\,\delta q^k , \tag{2.45}$$

gdzie

$$e_k = \int_V E_z\, s_k dv \tag{2.46}$$

$$R_{kl} = \int_V \frac{1}{\gamma}\, s_k\, s_l\, dv. \tag{2.47}$$

Wielkości (2.46) i (2.47) według analogii z przypadkiem przewodników liniowych można nazywać odpowiednio uogólnionymi siłami elektromotorycznymi oraz opornościami własnymi i wzajemnymi.

Wprowadzimy teraz równania rozpatrywanego układu z zasady wariacyjnej w postaci

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L_e + \delta A)dt = 0 \tag{2.48}$$

wykorzystując w tym celu dyskretne przedstawienie funkcji Lagrange'a L_e i pracy wirtualnej δA. Przy obliczaniu wariacji funkcji Lagrange'a δL_e będziemy wariować tylko współrzędne uogólnione q^k, gdyż zakładamy, że ruch mechaniczny przewodników jest zadany w postaci mechanicznych współrzędnych uogólnionych $x^1(t)$, $x^2(t)$, ..., $x^n(t)$.

Otrzymamy wtedy

$$\delta L_e = \frac{1}{2}(M_{kl}\,\delta\dot{q}^k\,\dot{q}^l + M_{kl}\,\dot{q}^k\,\delta\dot{q}^l) = M_{kl}\dot{q}^l\,\delta\dot{q}^k .$$

Podstawiająo to wyrażenie i wyrażenie (2.45) do równania (2.48) otrzymamy

$$\int_{t_o}^{t_1}\left[M_{kl}\,\dot{q}^l\,\delta\dot{q}^k + (e_k - R_{kl}\,\dot{q}^l)\,\delta q^k\right]dt = 0 . \tag{2.49}$$

Wykorzystajmy teraz przekształcenie

$$\int_{t_o}^{t_1} M_{kl}\,\dot{q}^l\,\delta\dot{q}^k dt = \int_{t_o}^{t_1} d(M_{kl}\,\dot{q}^l\,\delta q^k) - \int_{t_o}^{t_1}\frac{d}{dt}(M_{kl}\,\dot{q}^l)\,\delta q^k .$$

Pamiętająo, że wariaoje δq^k znikają na końoach przedziału całkowania, mamy

$$\int_{t_o}^{t_1}\left[-\frac{d}{dt}(M_{kl}\,\dot{q}^l) - R_{kl}\,\dot{q}^l + e_k\right]\delta q^k\,dt = 0 . \tag{2.50}$$

Stąd ze względu na niezależność δq^k, otrzymamy

$$\frac{d}{dt}(M_{kl}\,\dot{q}^l) + R_{kl}\,\dot{q}^l = e_k \quad (k,l = 1,2,\ldots) \tag{2.51}$$

Zauważmy, że równania (2.51) mają identyozną postać jak zwykłe równania Kirohhoffa dla liniowyoh obwodów elektryoznyoh i wobeo tego można je uważać za uogólnienie równań Kirohhoffa na przypadek przewodników objętośoiowyoh, wyznaozająoyoh ruoh rozważanego układu oiągłego zmodelowanego przy pomooy układu dyskretnego. Zauważmy w końou, że równania (2.51) są zwykłymi równaniami Langrange'a 2 rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_e}{\partial\dot{q}^k}\right) = e_k - R_{kl}\,\dot{q}^l \quad (k,l = 1,2,\ldots) . \tag{2.52}$$

Należy jednak pamiętać, że współozynniki $M_{kl}(x^1,\ldots,x^n)$ są zależne również od ozasu poprzez uogólnione współrzędne meohaniozne.

2.4. Zasada działania stacjonarnego układu mechanicznego [22]

Do najbardziej ogólnych całkowych zasad wariacyjnych zalicza się zasadę działania stacjonarnego, która stwierdza, że ruch rzeczywisty spełnia równanie

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)dt = 0 , \tag{2.53}$$

gdzie

δT - oznacza wariację energii kinetycznej

δA - wariację pracy sił zewnętrznych działających na układ.

Z formalnego punktu widzenia, zasada stacjonarnego działania napisana w postaci (2.53) sprowadza się do odpowiedniego zagadnienia rachunku wariacyjnego. Jednakże zagadnienia te mające powierzchowne podobieństwo różnią się w sposób zasadniczy. W mechanice bowiem symbol δ oznacza wariancję wirtualną, tj. nie oznacza dowolnych nieskończenie małych przesunięć, lecz oznacza przesunięcia zgodne z nałożonymi na układ więzami. Stąd wynika, że tylko dla układów holonomicznych o liczbie stopni swobody równej liczbie współrzędnych uogólnionych wariacje wirtualne są dowolne i wobec tego zasada działania stacjonarnego (2.53) sprowadza się w zupełności do odpowiedniego zagadnienia rachunku wariacyjnego. Narazie zajmiemy się tylko układami o "n" stopniach swobody i o współrzędnych uogólnionych x^1, $x^2,\dots,x^n$.

Energia kinetyczna układu mechanicznego ma postać

$$T_m = \frac{1}{2}\sum_i m_r \dot{r}_i^2 . \tag{2.54}$$

Zachodzi

$$\delta T_m = \sum_i m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i . \tag{2.55}$$

Ponieważ wektor wodzący poszczególnych punktów materialnych jest funkcją współrzędnych uogólnionych

$$r_i = r_i(x^1,x^2,\dots,x^n) , \tag{2.56}$$

wobec tego wariacje wirtualne δr_i wektorów wodzących można wyrazić przez wariacje wirtualne δx^k współrzędnych uogólnionych. Otrzymamy wtedy

$$\delta r_i = \frac{\delta r_i}{\delta x^k}\,\delta x^k , \tag{2.57}$$

gdzie sumowanie odbywa się po $k = 1,2,\ldots,n$

Dla układów holonomicznych zachodzi

$$\delta \dot{r}_i = \frac{d}{dt}\,\delta r_i . \tag{2.58}$$

Po podstawieniu wzoru (2.57) do (2.58) otrzymamy

$$\delta \dot{r}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x^k}\right)\delta x^k + \frac{\partial r_i}{\partial x^k}\,\frac{d}{dt}(\delta x^k) . \tag{2.59}$$

Wykorzystując związki

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial x^k} ; \qquad \frac{\partial r_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k} ,$$

równanie (2.59) można przepisać w postaci

$$\delta \dot{r}_i = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial x^k}\,\delta x^k + \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\,\frac{d}{dt}(\delta x^k) .$$

Wariacja pracy sił zewnętrznych i rozpraszających działających na układ wynosi

$$\delta A = X_k\,\delta x^k , \tag{2.60}$$

Równanie (2.53) można teraz przepisać w postaci

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_i m_i\,\dot{r}_i\,\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial x^k}\,\delta x^k - \frac{d}{dt}\Big(\sum_i m_i\,\dot{r}_i\,\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\Big)\delta x^k + X_k\,\delta x^k\right]dt = 0 . \tag{2.61}$$

Wykorzystajmy teraz przekształcenie

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_i m_i\dot{r}_i\,\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\,\frac{d}{dt}(\delta x^k)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} d\left[\sum_i m_i\dot{r}_i\,\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\,\delta x^k\right] - \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i\dot{r}_i\,\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\right]\partial x^k\,dt$$

Pamiętając, że wariacje δx^k znikają na końcach przedziału całkowania, mamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\delta \dot{x}^k - \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{x}^k}\right)\delta x^k + X_k \delta x^k\right]dt = 0 \qquad (2.62)$$

Uwzględniając oznaczenie (2.54) na energię kinetyczną rozpatrywanego układu otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}^k}\right) + \frac{\partial T_m}{\partial x^k} + X_k\right]\delta x^k dt = 0. \qquad (2.63)$$

Stąd ze względu na zależność δx^k, otrzymamy ostatecznie równania Lagrange'a 2 rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_m}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial T_m}{\partial x^k} = X_k , \qquad (k = 1,2,\ldots,n). \qquad (2.64)$$

2.5. Równania układów elektromechanicznych

W poprzednich paragrafach pokazaliśmy, że w przybliżeniu quasi-stacjonarnym równania "elektryczne" ruchu układu z zamkniętymi obwodami, składającego się z ruchomych i elektrycznie niesprzężonych przewodników objętościowych można zapisać w postaci równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Wykorzystując model dyskretny, funkcję Lagrange'a L_e, która w rozważanym przypadku jest równa energii kinetycznej T_e (magnetycznej) układu, można zapisać w postaci

$$T_e = L_e = \frac{1}{2} M_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l , \qquad (2.65)$$

gdzie uogólnione współczynniki M_{kl} samoindukcji i indukcji wzajemnej zależą od współrzędnych mechanicznych x^k, które określają wzajemne położenie przewodników i są na ogół uwikłanymi funkcjami czasu.

Oprócz tego pokazano, że $L_e = T_e$ jest funkcją tworzącą dla sił mechanicznych pochodzenia magnetycznego. Z rozważań tych wynika, że elektryczne i mechaniczne równania ruchu można połączać i napisać je w jednakowej postaci. W tym celu wystarczy dodać T_e i T_m

$$T = T_e + T_m , \qquad (2.66)$$

gdzie

T_e – jest energią magnetyczną (kinetyczna) układu elektrycznego
T_m – energia kinetyczna układu mechanicznego.

Praca wirtualna sił zewnętrznych i rozpraszających składa się również z pracy sił elektrycznych i mechanicznych

$$\delta A = (e_k - R_{kl}\dot{q}^l)\delta q^k + X_r \delta \varkappa^r . \tag{2.67}$$

Na mocy zasady stacjonarnego działania otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} = F_k , \tag{2.68}$$

gdzie funkcja T jest określona wzorem (2.66), a siły uogólnione F_k wzorem (2.67), przy czym dla pierwszych n współrzędnych uogólnionych mamy $\varkappa^k = q^k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, pozostałe współrzędne uogólnione to współrzędne elektryczne q^l $(l = n+1,\ldots)$

Zauważmy na koniec, że równania (2.67) ruchu układu elektromechanicznego uzyskano przy założeniu, że w każdym poruszającym się przewodniku prądy są zamknięte ($\mathrm{div}\, j = 0$), tj. przewodniki nie dotykają się wzajemnie i ponadto, że zmienne q^k są parametrami niezależnymi. W dalszej części pracy osłabimy nieco te założenia.

2.6. Zasada działania stacjonarnego układów nieholonomicznych

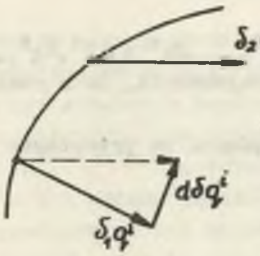
Z formalnego punktu widzenia, zasada stacjonarnego działania napisana w postaci (2.48) sprowadza się do odpowiedniego zagadnienia rachunku wariacyjnego. Jednakże zagadnienia te mające powierzchniowe podobieństwo różnią się w sposób zasadniczy. W dynamice bowiem symbol δ oznacza wariację wirtualną, tj. nie oznacza dowolnych nieskończenie małych przesunięć, lecz oznacza przesunięcia zgodnie z nałożonymi na układ więzami. Wynika stąd, że tylko dla układów holonomicznych o liczbie stopni swobody równej liczbie współrzędnych uogólnionych wariacje wirtualne są dowolne i wobec tego zasada działania stacjonarnego (2.48) sprowadza się w zupełności do odpowiedniego zagadnienia rachunku wariacyjnego. Zasadnicza różnica między nimi występuje dla układów nieholonomicznych, gdyż wtedy wariacje współrzędnych uogólnionych spełniają dodatkowe związki

$$\delta q^{m+l} = A^{m+l}{}_s \,\delta q^s \qquad (l = 1,2,\ldots,n-m; \quad s = 1,2,\ldots,m) \tag{2.69}$$

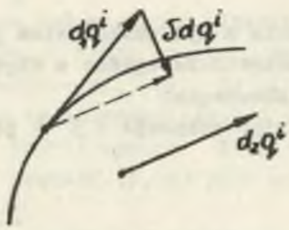
Dla układu nieholonomicznego krzywe bliskie uzyskane w wyniku utworzenia wariacji krzywej ruchu rzeczywistego nie będą, ogólnie rzecz biorąc, krzywymi kinematycznie możliwymi. Związane to jest z regułami przemienności operacji d i δ dla wszystkich współrzędnych uogólnionych $q^1,q^2,\ldots,q^n$.

W dynamice układów operacja d oznacza różniczkowanie względem czasu. W związku z tym jest ona określona tylko w punktach leżących na takiej krzywej $q^1 = q^1(t)$, po której odbywa się ruch. Odpowiadające tej operacji pole wektorowe ma postać $(\dot{q}^1 dt, \ldots, \dot{q}^n dt)$. Wariacja wirtualna δ oznacza w dynamice układów dowolną z nieskończenie wielu operacji, których wektory reprezentują wszystkie możliwe przesunięcia wirtualne układu. W związku z tym operacja δ jest określona w każdym punkcie przestrzeni konfiguracyjnej układu.

Z powyższych rozważań wynika, że z dwóch operacji δd i $d\delta$ tylko ta druga jest określona w każdym punkcie leżącym na dowolnej (rzeczywistej lub kinematycznie możliwej) trajektorii ruchu. Wynika to również z rozważań geometrycznych pokazanych na rys. 2.1.



Rys. 2a



Rys. 2b

Istotnie w pierwszym przypadku określona jest operacja $d\delta\, q^1$, gdyż określone są operacje d, δ_1 i δ_2. Natomiast w drugim przypadku pokazanym na rys. 2 operacja d_2 jest nieokreślona, gdyż odpowiadający jej wektor leży poza trajektorią ruchu. Wobec tego nie określona jest również operacja dq^1. Należy zatem tak zdefiniować operację d, aby określona była operacja δd. Należy przy tym podkreślić bardzo istotny fakt, że operacje d i δ poza trajektorię $q^1 = q^1(t)$ mogą być zdefiniowane dowolnie, a na trajektorii muszą pokrywać się odpowiednio z różniczkowaniem względem czasu i wariacją wirtualną.

Podamy teraz jedną, z wielu możliwych, określeń operacji d i δ poza trajektorią ruchu i zachowującą zwykły sens tych operacji na trajektoriach.

Niech $q^1 = q^1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ oznacza taki krzywoliniowy układ współrzędnych w otoczeniu rozważanego ruchu $q^1 = q^1(t)$, w którym $q^1(u_1, 0, \ldots, 0) = q^1(u_1)$. Przypuśćmy, że równanie więzów kinematycznych można napisać w postaci

$$\dot{q}^j = A^j_s\, \dot{q}^s \quad (j = m+1, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.70}$$

Wtedy w otoczeniu rozważanego ruchu $q^i = q^i(t)$ operacje d i δ można określić następująco:

$$
dq^k = \begin{cases} \dfrac{\partial q^k}{\partial u_1} du_1 & (k = 1,2,\dots,m) \qquad (2.71a) \\[2ex] A^k_s\, dq^s & (k = m+1,\dots,n) \qquad (2.71b) \end{cases}
$$

$$
\delta q^k = \begin{cases} \dfrac{\partial q^k}{\partial u_l} \delta u_l & (k = 1,2,\dots,m) \qquad (2.71c) \\[2ex] A^k_s\, \delta q^s & (k = m+1,\dots,n). \qquad (2.71d) \end{cases}
$$

Zgodnie z tym określeniem przesunięcia $dq^1, dq^2, \dots, dq^n$ i $\delta q^1, \delta q^2, \dots, \delta q^n$ są oczywiście zgodne z więzami nie tylko na trajektorii, lecz również i w jej otoczeniu.
Poza tym operacja d i δ pierwszych m współrzędnych są przemienne

$$
d\,\delta q^j - \delta\, dq^j = 0\,, \tag{2.72}
$$

a formy dwuliniowe pozostałych n-m współrzędnych na mocy (2.70) mają postać

$$
d\delta q^j - \delta d q^j = \left(\partial_r A^j_s - \partial_s A^j_r + A^{|m|+l}_r \partial_{|m|+l} A^j_s - A^{|m|+l}_s \partial_{|m|+l} A^j_r\right) dq^r\, \delta q^s \tag{2.73}
$$

$$
(l = 1,2,\dots,n-m; \quad j = m+1,\dots,n; \quad r,s = 1,2,\dots,m).
$$

gdzie $\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial q^r}$.

Jeżeli formy (2.73) są równe zeru, to z twierdzenia Frobeniusa [22] wynika całkowalność równań więzów kinematycznych.

Wprowadzimy teraz zasadę działania stacjonarnego wychodząc z równań d'Alemberta-Lagrange'a

$$
\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^k} + \frac{\partial T}{\partial q^k} + X_k\right)\delta q^k = 0. \tag{2.74}
$$

Po przekształceniach z równania (2.74) otrzymamy

$$
-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^k}\delta q^k\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot q^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k - \delta \dot q^k\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot q^k}\delta \dot q^k + \frac{\partial T}{\partial q^k}\delta q^k + X_k\,\delta q^k = 0\,,
$$

Całkując zatem to równanie w granicach od położenia początkowego do położenia końcowego układu, mamy

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right)\Bigg|_{t_o}^{t_1} = \int_{t_o}^{t_1}\left[\delta T + \delta A + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k - \delta \dot{q}^k\right)\right]dt.$$

Zgodnie z zasadą działania stacjonarnego przyrównamy teraz do zera wariacje na końcach przedziału całkowania. Wtedy otrzymamy

$$\int_{t_o}^{t_1}\left[\delta A + \delta T + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}\delta q^k - \delta \dot{q}^k\right)\right]dt = 0. \tag{2.75}$$

Wyrażenie to możemy uważać za najbardziej ogólne pod względem matematycznym sformułowanie zasady działania stacjonarnego. W takim ujęciu zasada ta może być stosowana zarówno do układów holonomicznych, jak i do układów nieholonomicznych. Dla układów holonomicznych z reguł przemienności otrzymamy $\frac{d}{dt}\delta q^k - \delta \dot{q}^k = 0$ i wobec tego z wyrażenia (2.75) wynika (2.48). W związku z tym zasada działania stacjonarnego w postaci (2.48) jest szczególnym przypadkiem tej zasady w postaci (2.75).

Dla układów nieholonomicznych postać zasady działania stacjonarnego, którą można otrzymać z wyrażenia (2.75), zależy od interpretacji reguł przemienności i jak pokazaliśmy zależy ostatecznie od wprowadzonego w otoczeniu krzywej ruchu rzeczywistego lokalnego układu współrzędnych.

2.7. Własności geometryczne przestrzeni konfiguracyjnej układu elektromechanicznego

Zajmijmy się układem dynamicznym, którego konfiguracja jest określona przez N współrzędnych uogólnionych $q^k (k = 1,...,N)$, z których pewna część jest pochodzenia elektrycznego, a pozostałe mechanicznego. Wprowadźmy pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej V_N, tzn. takiej przestrzeni, której każdemu punktowi będzie odpowiadała określona konfiguracja układu dynamicznego, przy czym odpowiedniość ta będzie wzajemnie jednoznaczna. Ponieważ q^k ustalają jakąś konfigurację układu, więc ustalają one pewien punkt w V_N, a tym samym określają one pewien układ współrzędnych w V_N.

Struktura topologiczna przestrzeni konfiguracyjnej odgrywa istotną rolę w dynamice jakościowej. Wprowadźmy więc w przestrzeni V_N metrykę pozwalającą określić topologię indukowaną przez nią. Weźmy w tym celu energię kinetyczną układu

$$T = \frac{1}{2} a_{kl}\,\dot{q}^k \dot{q}^l \quad (k,l = 1,2,...,N), \tag{2.76}$$

która jest sumą energii układu elektrycznego i mechanicznego.

$$T = T_e + T_m.$$

Współczynniki a_{kl} są tu tylko funkcjami współrzędnych uogólnionych, nie zależą natomiast od prędkości $\dot{q}^k$. Energia kinetyczna ma zawsze tę samą wartość niezależnie od tego, jakie współrzędne uogólnione zostały wybrane.

Jest więc ona niezmiennikiem względem transformacji współrzędnych uogólnionych, a ponieważ $\dot{q}^k$ jest dowolnym wektorem kontrawariantnym, więc współczynniki a_{kl} są składowymi tensora kowariantnego [27].

Dwie sąsiednie konfiguracje lub punkt w przestrzeni V_N pozwalają określić metryczną formę kwadratową

$$ds^2 = a_{kl}dq^k dq^l = 2T\, dt^2. \tag{2.77}$$

Przestrzeń konfiguracyjna V_N jest więc przestrzenią Riemannowską o formie metrycznej (2.77). Należy jednak pamiętać, że badanie ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej metodą przestrzeni Riemanna jest tylko wtedy dopuszczalne, kiedy współczynniki a_{kl} występujące w formie kwadratowej (2.76) są tylko funkcją współrzędnych uogólnionych q^k i nie zależą od prędkości $\dot{q}^k$, bo tylko wtedy można je uważać za składowe tensora kowariantnego, zwanego tensorem metrycznym lub fundamentalnym tensorem przestrzeni.

Przystąpimy teraz do badania ruchu układu elektromechanicznego. Niech w przestrzeni konfiguracyjnej V_N rozpatrywanego układu dynamicznego będzie zadana pewna trajektoria ruchu kinematycznie możliwego o równaniach

$$q^k = q^k(t) \quad (k = 1,2,\ldots,N). \tag{2.78}$$

Definiujemy uogólniony kontrawariantny wektor prędkości jako

$$\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt} \tag{2.79}$$

Przyspieszenia nie można zdefiniować jako zwyczajnej pochodnej czasowej prędkości, gdyż wtedy nie otrzymalibyśmy na ogół wektora. Związane to jest z tym, że przy obliczeniu przyspieszenia należy przenieść równolegle wektor $\dot{q}^k(t+h)$ do punktu na trajektorii ruchu, któremu odpowiada parametr t. Operacja ta wymaga wyposażenia przestrzeni V_N w pewien obiekt geometryczny, zwany obiektem równoległego przeniesienia Γ^k_{ij} tak, że tzw. pochodna absolutna pola wektorowego $\dot{q}^k$ zdefiniowana

$$\frac{D\dot{q}^k}{dt} = \frac{d\dot{q}^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\,\dot{q}^i\dot{q}^j \tag{2.80}$$

będzie już wektorem kontrawariantnym [13].
Posłużmy się teraz różniczkowaniem absolutnym i uogólniony kontrawariantny wektor przyspieszenia zdefiniujemy jako

$$f^k = \frac{D\dot{q}^k}{dt} . \tag{2.81}$$

Jego składowe kowariantne są równe

$$f_k = a_{kl}\,\frac{D\dot{q}^l}{dt} . \tag{2.82}$$

Ze względu na to, że w sprzestrzeni Riemanna współrzędne obiektu równoległego przeniesienia Γ^k_{ij} są wyznaczalne przez fundamentalny tensor metryczny a_{kl} otrzymamy [13]

$$a_{kl}\;\Gamma^l_{ls} = [ls,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^s} + \frac{\partial a_{ks}}{\partial q^l} - \frac{\partial a_{ls}}{\partial q^k}\right) , \tag{2.83}$$

gdzie $[ls,k]$ są to tzw. symbole Christoffela I rodzaju.

Ze wzorów (2.76), (2.80),(2.82) i (2.83) wynika, że przyspieszenie można zapisać w postaci

$$f_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} . \tag{2.84}$$

Napiszmy teraz równania ruchu układu. W tym celu musimy znać wszystkie siły działające na układ, a w szczególności wszystkie siły reakcji więzów krępujących swobodę rozważanego układu. Wobec tego równanie ruchu układu można napisać w postaci

$$f_k = X_k + Y_k , \tag{2.85}$$

gdzie

X_k – uogólniona siła zewnętrzna i rozpraszająca działające na układ,

Y_k – uogólniona siła reakcji więzów krępujących swobodę układu.

Jeżeli interesuje nas tylko ruch układu, wtedy siły reakcji Y_k są tylko wielkościami pomocniczymi, które w miarę możliwości staramy się eliminować. Wiemy bowiem o nich tylko tyle, że muszą one być tak dobrane, aby wynikający z równań (2.85) ruch układu był zgodny z więzami (2.70).

Punkt przestrzeni konfiguracyjnej V_N, reprezentujący w danej chwili czasu położenie układu, nie może przesunąć się w dowolnym kierunku, gdyż wyznaczające jego przesunięcie różniczki współrzędnych uogólnionych spełniać muszą równania (2.71). Ogół przesunięć zgodnych z tymi równaniami utworzy pewną wymiarową m hiperpłaszczyznę. Stąd też każdy punkt przestrzeni V_N leżącej na krzywej reprezentującej ruch kinematycznie możliwy, a w szczególności i ruch rzeczywisty, będzie punktem wspólnym tej krzywej i odpowiadającej mu hiperpłaszczyzny. Zanim przystąpimy do eliminacji więzów podamy jeszcze pojęcie przesunięć wirtualnych. Przypomnijmy najpierw, że wariacjami wirtualnymi współrzędnych uogólnionych nazywa się takie wariacje tych współrzędnych δq^k, które spełniają równania (2.71c) wynikające z równania więzów (2.70). W związku z tym, wirtualne przesunięcia możemy zdefiniować jako takie przesunięcia układu, które odpowiadają wirtualnym wariacjom jego współrzędnych uogólnionych.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do więzów idealnych. Mówimy, że więzy są idealne, jeżeli praca sił reakcji tych więzów na dowolnych przesunięciach wirtualnych układu jest równa zeru, tj.

$$\delta A = Y_k\, \delta q^k = 0 . \tag{2.86}$$

Jeżeli wymnożymy równania (2.85) przez δq^k, a następnie zsumujemy po k, to dla więzów idealnych na mocy (2.86) otrzymamy tzw. równania d'Alemberta-Lagrange'a

$$(f_k - X_k)\, \delta q^k = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,N) . \tag{2.87}$$

Po podstawieniu wzoru (2.84) do (2.87) otrzymamy następującą postać równania d'Alemberta-Lagrange'a

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - X_k\right] \delta q^k = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,N) . \tag{2.88}$$

2.8. Równanie ruchu w quasi-współrzędnych

Quasi-współrzędne wykorzystywano w mechanice już dawniej jako pewne kinematyczne charakterystyki ruchu układu. Jednak dopiero niedawno współrzędne uogólnione i parametry kinematyczne ruchu zastąpiono jednym ogólnym pojęciem quasi-współrzędnych. Równania ruchu w quasi-współrzędnych, podane w przeglądowej pracy [14a] Hamela, były pod względem budowy podobne do równań Lagrange'a i obowiązywały zarówno układy holonomiczne, jak i nieholonomiczne.

W dalszej kolejności wykorzystamy ideę quasi-współrzędnych dla układów elektromechanicznych. Pomimo, że quasi-współrzędne ze względu na swój charakter nie występują jawnie w funkcji Lagrange'a i w równaniach więzów tym niemniej, operacja różniczkowania względem quasi-współrzędnych jest określona w zupełności. Istotnie, niech q^k $(k = 1,2,\dots,N)$ oznaczają współrzędne uogólnione układu a $q^{k'}$ $(k' = 1',2',\dots,N')$ – quasi-współrzędne. Niech ponadto pochodne quasi-współrzędnych i prędkości uogólnione $\dot{q}^k$ spełniają liniowe zależności

$$\dot{q}^{k'} = A^{k'}_{k}\dot{q}^k \; ; \quad \dot{q}^k = A^{k}_{k'}\dot{q}^{k'} , \tag{2.89}$$

gdzie $A^{k}_{k'}$, $A^{k'}_{k}$ zależą tylko od współrzędnych uogólnionych i czasu.

Zachodzi

$$A^{k'}_{l}A^{k}_{k'} = \delta^{k}_{l} \; ; \quad A^{k'}_{l}A^{l}_{l'} = \delta^{k'}_{l'} , \tag{2.89a}$$

gdzie δ^{k}_{l}, $\delta^{k'}_{l'}$ są symbolami Kroneckera.

Z drugiego równania (2.89) wynika

$$\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^{k'}} = \frac{\partial q^k}{\partial q^{k'}} = A^{k}_{k'} . \tag{2.90}$$

Zauważmy, że z równania (2.89) wynikają następujące zależności

$$\delta q^k = A^{k}_{k'}\,\delta q^{k'} , \tag{2.91}$$

które można wykorzystać do wyeliminowania z równań d'Alemberta-Lagrange'a (2.88) wariacji współrzędnych uogólnionych. W rezultacie mamy

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} - X_k\right] A^{k}_{k'}\,\delta q^{k'} = 0 . \tag{2.92}$$

Symbolem T^* będziemy oznaczać funkcję, w której prędkości uogólnione $\dot{q}^k$ zastąpiono przy pomocy związków (2.89) pochodnymi quasi-współrzędnych $\dot{q}^{k'}$. Funkcje te spełniają następujące zależności

$$\begin{aligned} &T(q^1,q^2,\dots,q^N,A^1_k,\dot{q}^{k'},\dots,A^N_k,\dot{q}^{k'}) = T^*(q^1,\dots,q^N,\dot{q}^{1'},\dots,\dot{q}^{N'}) ,\\ &T^*(q^1,\dots,q^N,A^{1'}_k\dot{q}^k,\dots,A^{N'}_k\dot{q}^k) = T(q^1,\dots,q^N,\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^N) . \end{aligned} \tag{2.93}$$

Wprowadźmy jeszcze jeden uproszczony symbol na różniczkowanie cząstkowe, który jest specjalnie dostosowany do stosowanej w tej pracy metody wskaźnikowej, a mianowicie:

$$\partial_l = \frac{\partial}{\partial q^l} . \qquad (2.94)$$

Różniczkując wzór (2.89a) względem czasu oraz względem l-tej współrzędnej q^l otrzymamy

$$A^k_{k'} \frac{\partial}{\partial t} A^{k'}_s + A^{k'}_s \frac{\partial}{\partial t} A^k_{k'} = 0 \qquad (2.95)$$

$$A^k_{k'} \partial_l A^{k'}_s + A^{k'}_s \partial_l A^k_{k'} = 0 . \qquad (2.96)$$

Wykorzystamy teraz wzory (2.89), (2.93), (2.95) i (2.96) do szeregu następujących przekształceń:

$$\begin{aligned} A^k_{k'} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^k}\right) &= \frac{d}{dt} \left(A^k_{k'} \frac{\partial T}{\partial \dot q^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot q^k} \partial_l \left(A^k_{k'}\right) \dot q^l - \frac{\partial T}{\partial \dot q^k} \frac{\partial}{\partial t} A^k_{k'} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{k'}}\right) + \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{s'}} A^k_{k'} A^l_{l'} \partial_l \left(A^{s'}_k\right) \dot q^{l'} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{s'}} A^k_{k'} \frac{\partial}{\partial t} A^{s'}_k , \end{aligned} \qquad (2.97)$$

$$A^k_{k'} \frac{\partial T}{\partial q^k} = A^k_{k'} \frac{\partial T^*}{\partial q^k} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{s'}} \frac{\partial \dot q^{s'}}{\partial q^k} A^k_{k'} = \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + \frac{T}{q^s} A^k_{k'} A^l_{l'} \partial_k \left(A^{s'}_l\right) \dot q^l . \qquad (2.98)$$

Uwzględniając zależności (2.97) i (2.98) w równaniu (2.92), otrzymamy następującą postać równania d'Alemberta-Lagrange'a w quasi-współrzędnych

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + C^{s'}_{k'l'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{s'}} \dot q^{l'} + B^{s'}_{k'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{s'}} - X_{k'}\right) \delta q^{k'} = 0 , \qquad (2.99)$$

gdzie

$$C^{s'}_{k'\,l'} = A^k_{k'} A^l_{l'} \left(\partial_l A^{s'}_k - \partial_k A^{s'}_l\right) \qquad (2.100)$$

$$B^{s'}_{k'} = A^k_{k'} \frac{\partial}{\partial t} A^{s'}_k \qquad (2.101)$$

$$X_{k'} = A^k_{k'} X_k . \qquad (2.102)$$

Wyrażenia $C^{s'}_{k'\,l'}$ oraz $B^{s'}_{k'}$ zależą tylko od wzajemnego stosunku współrzędnych uogólnionych i pochodnych quasi-współrzędnych, a nie zależą od struktury i ruchu układu. Należy również zauważyć, że równania d'Alemberta-Lagrange'a w quasi-współrzędnych (2.99) opisują układy, które nie posiadają żadnych więzów, jak i takie układy, których ruch jest krępowany pewnymi więzami. W pierwszym przypadku na mocy niezależności wariacji $\delta q^{k'}$ quasi-współrzędnych otrzymamy N równań ze związku (2.99)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + C^{s'}_{k'\,l'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}}\dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} = X_{k'} \qquad (2.103)$$

$$(s', l', k' = 1', 2', \ldots, N').$$

Jeżeli więzy układu mają postać

$$A^{M+k'}_{k}\,\dot{q}^{k} = 0\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, N\,;\quad k' = 1', 2', \ldots, N-M) \qquad (2.104)$$

wtedy wygodnie jest w wielu przypadkach tak wprowadzić quasi-współrzędne aby na mocy (2.104) np. N-M ostatnich quasi-współrzędnych było równych zeru. W tym celu wystarczy w szczególności założyć, że współrzędne uogólnione i N-M ostatnich quasi-współrzędnych spełniają zależności

$$\dot{q}^{M+k'} = A^{M+k'}_{k}\,\dot{q}^{k}\,, \qquad (2.105)$$

$$(k' = 1', 2', \ldots, N-M\,;\quad k = 1, 2, \ldots, N)\,.$$

a M pierwszych quasi-współrzędnych spełnia liniowy układ równań

$$\dot{q}^{k'} = A^{k'}_{k}\,\dot{q}^{k}\,, \quad (k' = 1', 2', \ldots, M'\,;\quad k = 1, 2, \ldots, N)\,, \qquad (2.106)$$

którego macierz jest nieosobliwa.

Wariacje $\delta q^{k'}$ i δq^{k} na mocy (2.105) spełniają związki

$$\delta q^{M+k'} = A^{M+k'}_{k}\,\delta q^{k}\,. \qquad (2.107)$$

Zauważmy, że na mocy równań więzów (2.104) wariacje quasi-współrzędnych są równe zeru

$$\delta q^{M+k'} = 0 \quad (k' = 1', 2', \ldots, N'-M')\,. \qquad (2.108)$$

Wynika z tego, że (N-M) ostatnich wyrazów w równaniu d'Alemberta-Lagrange'a jest równa zeru. Z pozostałej sumy otrzymamy M równań

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + C^{s'}_{k'l'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}}\dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} = X_{k'}, \qquad (2.109)$$

$$(k',l' = 1',2',\ldots,M' ; \quad s' = 1',2',\ldots,N'),$$

gdyż M pierwszych wariacji jest niezależnych.

Równania (2.109) niezawierające już nieznanych sił reakcji więzów łącznie z (N-M) równaniami więzów (2.104) i M równaniami (2.106) stanowią N+M równań ruchu w quasi-współrzędnych, z którego przy zadanych wartościach początkowych można wyznaczyć ruch układu.

2.9. Równania d'Alemberta-Lagrange'a-Maxwella maszyny bezkomutatorowej we współrzędnych uogólnionych

Wyprowadźmy równanie ruchu bezkomutatorowej maszyny, której energia kinetyczna T jest formą kwadratową prądów wirnika i stojana oraz położenia kątowego wirnika. Załóżmy, że stojan i wirnik ma 3-fazowe uzwojenie. Niech $\dot{q}^k$ $(k = 1,2,\ldots,6)$ oznaczają prądy fazowe stojana i wirnika odpowiadające siłom elektromotorycznym e_k $(k = 1,2,3'$ R_1 R_2 - oporności uzwojeń stojana i wirnika, M_{kl} - współczynniki indukcyjności własnej i wzajemnej uzwojeń stojana i wirnika. Zakładamy również, że stojan i wirnik nie mają jawnych biegunów i szczelina powietrzna między wirnikiem i stojanem jest równomierna a od kąta obrotu q^7 wirnika zależą jedynie współczynniki indukcyjności wzajemnej między uzwojeniami stojana i wirnika. Za współrzędne uogólnione rozpatrywanego układu przyjmiemy ładunki $q^1, q^2, \ldots, q^6$, których pochodna jest równa prądom poszczególnych uzwojeń oraz współrzędna kątowa q^7. Przy tak wprowadzonych współrzędnych uogólnionych energia kinetyczna ma postać

$$T = \frac{1}{2} a_{kl}\, \dot{q}^k \dot{q}^l, \qquad (2.110)$$

gdzie macierz kwadratowej formy ma postać

$$[a_{kl}] = \begin{bmatrix}
L_{rs}+M_s & -\frac{1}{2}M_s & -\frac{1}{2}M_s & M_{sw}\cos pq^7 & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & 0 \\
-\frac{1}{2}M_s & L_{rs}+M_s & -\frac{1}{2}M_s & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & M_{sw}\cos pq^7 & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & 0 \\
-\frac{1}{2}M_s & -\frac{1}{2}M_s & L_{rs}+M_s & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & M_{sw}\cos pq^7 & 0 \\
M_{sw}\cos pq^7 & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & L_{rw}+M_w & -\frac{1}{2}M_w & -\frac{1}{2}M_w & 0 \\
M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & M_{sw}\cos pq^7 & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & -\frac{1}{2}M_w & L_{rw}+M_w & -\frac{1}{2}M_w & 0 \\
L_{sw}\cos(pq^7+\frac{4\pi}{3}) & M_{sw}\cos(pq^7+\frac{2\pi}{3}) & M_{sw}\cos pq^7 & -\frac{1}{2}M_w & -\frac{1}{2}M_w & L_{rw}+M_w & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J
\end{bmatrix} \qquad (2.111)$$

L_{rs} – współczynnik indukcyjności rozproszenia uzwojeń stojana;

L_{rw} – współczynnik indukcyjności rozproszenia uzwojeń wirnika;

$M_s = k_s(Z_s)^2\Lambda_m$ – współczynnik indukcyjności uzwojeń stojana związany z głównym obwodem magnetycznym o przewodności Λ_m;

Z_s – liczba zwojów uzwojeń stojana;

$M_w = k_w z_w^2 \Lambda_m$ – współczynnik indukcyjności uzwojeń wirnika związany z głównym obwodem magnetycznym o przewodności Λ_m;

Z_w – liczba zwojów uzwojeń wirnika;

k_s, k_w – współczynniki uzwojeń stojana i wirnika;

p – liczba par biegunów uzwojeń silnika;

q^7 – kąt między osiami pierwszego uzwojenia stojana a czwartego uzwojenia wirnika;

J – moment bezwładności wirnika,

$m_{sw} = kz_s z_w \Lambda_m$ – współczynnik indukcyjności wzajemnej uzwojeń stojana i wirnika w przypadku gdy osie uzwojeń pokrywają się.

Siły uogólnione wyznaczymy z wyrażenia na pracę wirtualną

$$\delta A = X_k\,\delta q^k = (e_1 - R_1\dot{q}^1)\,\delta q^1 + (e_2 - R_1\dot{q}^2)\,\delta q^2 + (e_3 - R_1\dot{q}^3)\,\delta q^3 + \tag{2.112}$$
$$+ (\mathcal{M} - h\dot{q}^7)\,\delta q^7 - R_2\dot{q}^4\,\delta q^4 - R_2\dot{q}^5\,\delta q^5 - R_2\dot{q}^6\,\delta q^6 ,$$

gdzie

e_1, e_2, e_3 – siły elektromotoryczne przyłożone do uzwojeń stojana;

$e_7 = \mathcal{M}$ – moment zewnętrznych sił mechanicznych;

R_1, R_2 – oporność uzwojeń stojana i wirnika;

h – współczynnik tarcia wiskotycznego.

Jeżeli uzwojenia stojana i wirnika są połączone w gwiazdę, to z równania d'Alemberta–Lagrange'a

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - X_k\right)\delta q^k = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots,N)$$

nie wynikają bezpośrednio równania ruchu układu, gdyż wariacje współrzędnych uogólnionych δq^k spełniają następujące równania:

$$\delta q^1 + \delta q^2 + \delta q^3 = 0 , \tag{2.113}$$
$$\delta q^4 + \delta q^5 + \delta q^6 = 0 .$$

wynikające z równań więzów napisanych na mocy I prawa Kirchhoffa

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 + \dot{q}^2 + \dot{q}^3 &= 0\,, \\ \dot{q}^4 + \dot{q}^5 + \dot{q}^6 &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Reakcję więzów krępujących ruch rozpatrywanego układu wyeliminujemy wprowadzając specjalne quasi-współrzędne $q^{1'}, q^{2'}, \ldots, q^{7'}$. Niech pochodne quasi-współrzędnych $\dot{q}^{k'}$ i prędkości uogólnione $\dot{q}^{k}$ spełniają liniowe zależności

$$\dot{q}^{k} = A^{k}_{k'}\,\dot{q}^{k'}\;; \quad \dot{q}^{k'} = A^{k'}_{k}\,\dot{q}^{k}\;; \quad (k = 1,2,\ldots,7\;;\quad k' = 1',2',\ldots,7')\,, \tag{2.115}$$

gdzie macierz układu równań (2.115) ma postać

$$\left[A^{k}_{k'}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_1, & \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\vartheta_1 + \frac{4\pi}{3}), & \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\vartheta_1 + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\vartheta_1, & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\vartheta_1 + \frac{4\pi}{3}), & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\vartheta_1 + \frac{2\pi}{3}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_2, & \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\vartheta_2 + \frac{4\pi}{3}), & \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\vartheta_2 + \frac{2\pi}{3}), & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\vartheta_2, & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\vartheta_2 + \frac{4\pi}{3}), & -\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\vartheta_2 + \frac{2\pi}{3}), & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

$\vartheta_1 = \omega_0 t$, $\quad\omega_0$ – pulsacja napięcia zasilającego stojan,

$\vartheta_2 = \vartheta_1 - pq^7$

Ponieważ energia kinetyczna układu jest niezmienniczą funkcją współrzędnych, otrzymamy

$$T = \frac{1}{2}\,a_{kl}\,\dot{q}^{k}\dot{q}^{l} = \frac{1}{2}\,a_{kl}\,A^{k}_{k'}A^{l}_{l'}\,\dot{q}^{k'}\dot{q}^{l'} = \frac{1}{2}\,a_{k'l'}\,\dot{q}^{k'}\dot{q}^{l'} = T^{*}\,, \tag{2.117}$$

gdzie

$$a_{k'l'} = a_{kl}\,A^{k}_{k'}A^{l}_{l'}\,. \tag{2.118}$$

Zgodnie z prawem transformacji (2.118) współczynniki $a_{k'l'}$ można zapisać w quasi-współrzędnych w postaci macierzy

$$[a_{k'l'}] = \begin{bmatrix} L_{rs} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{rs} + \frac{3}{2}M_s & 0 & 0 & \frac{3}{2}M_{sw} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{rs} + \frac{3}{2}M_s & 0 & 0 & \frac{3}{2}M_{sw} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{rw} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{sw} & 0 & 0 & L_{rw} + \frac{3}{2}M_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}M_{sw} & 0 & 0 & L_{rw} + \frac{3}{2}M_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \qquad (2.119)$$

Energia układu w quasi-współrzędnych wynosi więc

$$T^* = \frac{1}{2}L_{rs}(\dot{q}^{1'})^2 + \frac{1}{2}(L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)(\dot{q}^{2'})^2 + \frac{3}{2}M_{sw}\,\dot{q}^{2'}\dot{q}^{5'} + \frac{1}{2}(L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)(\dot{q}^{3'})^2 +$$

$$(2.120)$$

$$+ \frac{3}{2}M_{sw}\,\dot{q}^{3'}\dot{q}^{6'} + \frac{1}{2}L_{rw}(\dot{q}^{4'})^2 + \frac{1}{2}(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w)(\dot{q}^{5'})^2 + \frac{1}{2}(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w)(\dot{q}^{6'})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}J(\dot{q}^{7'})^2 .$$

Napiszemy teraz równanie d'Alemberta-Lagrange'a w quasi-współrzędnych w postaci (2.99)

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + C^{s'}_{k'l'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}}\dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} - X_{k'}\right)\delta q^{k'} = 0 .$$

Współczynniki $C^{s'}_{k'l'}$ oraz $B^{s'}_{k'}$ występujące w tym równaniu wyznaczymy ze wzoru (2.100) i (2.101). Zauważmy w tym celu, że współczynniki $A^{k}_{k'}$ stanowią elementy macierzy transponowanej do macierzy $\left[A^{k'}_{k}\right]$, gdyż macierz $\left[A^{k'}_{k}\right]$ jest macierzą ortogonalną. Wykorzystując to przy obliczeniu $C^{s'}_{k'\,l'}$ i $B^{s'}_{k'}$ otrzymamy

$$C^{6'}_{5'\,7'} = C^{5'}_{7'\,6'} = p \;; \qquad C^{5'}_{6'\,7'} = C^{6'}_{7'\,5'} = -p$$

$$B^{2'}_{3'} = B^{5'}_{6'} = \omega_0 \;; \qquad B^{3'}_{2'} = B^{6'}_{5'} = -\omega_0 \tag{2.120}$$

pozostałe natomiast współczynniki $C^{s'}_{k'\,l'}$ i $B^{s'}_{k'}$ są równe zeru.

Obliczmy teraz siły zewnętrzne i rozpraszające działające na układ w quasi-współrzędnych.

Mamy

$$X_{k'} = (e_k - R_{kl}\,\dot{q}^l)\,A^k_{k'}, \tag{2.121}$$

gdzie

$$R_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad k \neq l, \\ R_1 & \quad k = l = 1,2,3, \\ R_2 & \quad k = l = 4,5,6, \\ h & \quad k = l = 7. \end{cases}$$

e_1, e_2, e_3 – zewnętrzne napięcia przyłożone do faz stojana $e_4 = e_5 = e_6 = 0$

Po przekształceniu (2.121) otrzymamy

$$X_{1'} = e_{1'} - R_1\dot{q}^{1'} \;; \quad X_{2'} = e_{2'} - R_1\dot{q}^{2'} \;; \quad X_{3'} = e_{3'} - R_1\dot{q}^{3'} \tag{2.122}$$

$$X_{4'} = -R_2\dot{q}^{4'} \;; \quad X_{5'} = -R_2\dot{q}^{5'} \;; \quad X_{6'} = -R_2\dot{q}^{6'} \;; \quad X_{7'} = -\mathcal{M} - h\dot{q}^{7'}$$

$$e_{k'} = e_k\,A^k_{k'} \quad (k' = 1', 2', 3')\,.$$

Zauważmy teraz, że na mocy (2.115) zachodzi

$$\delta q^{k'} = A^{k'}_k\,\delta q^k\,. \tag{2.123}$$

Z relacji (2.123) wynika, że

$$\delta q^{1'} = A_k^{1'} \delta q^k = \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta q^1 + \delta q^2 + \delta q^3) ,$$

$$\delta q^{4'} = A_k^{4'} \delta q^k = \frac{1}{\sqrt{3}} (\delta q^4 + \delta q^5 + \delta q^6) . \tag{2.124}$$

Podstawiając równania (2.113) do (2.124) otrzymamy

$$\delta q^{1'} = 0 \; ; \quad \delta q^{4'} = 0 . \tag{2.125}$$

Wynika z tego, że pierwszy i czwarty wyraz w równaniu (2.99) jest równy zeru. Z pozostałej sumy na mocy niezależności wariacji $\delta q^{2'}$, $\delta q^{3'}$, $\delta q^{5'}$, $\delta q^{6'}$, $\delta q^{7'}$ otrzymamy 5 równań

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{2'}} + B_{2'}^{3'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{3'}} - X_{2'} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{3'}} + B_{2'}^{3'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{2'}} - X_{3'} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} + C_{5'\,7'}^{6'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} \dot{q}^{7'} + B_{5'}^{6'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{6'}} - X_{5'} = 0 , \tag{2.126}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{6'}} + C_{6'\,7'}^{5'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} \dot{q}^{7'} + B_{6'}^{5'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} - X_{6'} = 0 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{7'}} + C_{7'\,6'}^{5'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} \dot{q}^{6'} + C_{7'5'}^{6'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{6'}} \dot{q}^{5'} - X_{7'} = 0 ,$$

gdzie

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{2'}} = (L_{rs} + \frac{3}{2} M_s)\dot{q}^{2'} + \frac{3}{2} M_{sw} \dot{q}^{5'} ,$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{3'}} = (L_{rs} + \frac{3}{2} M_s)\dot{q}^{3'} + \frac{3}{2} M_{sw} \dot{q}^{6'} ,$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{5'}} = (L_{rw} + \frac{3}{2} M_w)\dot{q}^{5'} + \frac{3}{2} M_{sw} \dot{q}^{2'} , \tag{2.127}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{6'}} = (L_{rw} + \frac{3}{2} M_w)\dot{q}^{6'} + \frac{3}{2} M_{sw} \dot{q}^{3'} ,$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot q^{7'}} = J\dot q^{7'},$$
$$\frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} = 0 \quad \text{dla} \quad k' = 1', 2', \ldots, 7'. \tag{2.127}$$

Podstawiając związki (2.120), (2.122) i (2.127) do układu równań (2.126) otrzymamy

$$(L_{rs} + \tfrac{3}{2}M_s)\frac{d\dot q^{2'}}{dt} + \tfrac{3}{2}M_{sw}\frac{d\dot q^{5'}}{dt} - \omega_o(L_{rs} + \tfrac{3}{2}M_s)\dot q^{3'} - \omega_o\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{6'} + R_1\dot q^{2'} = e_{2'},$$

$$(L_{rs} + \tfrac{3}{2}M_s)\frac{d\dot q^{3'}}{dt} + \tfrac{3}{2}M_{sw}\frac{d\dot q^{6'}}{dt} + \omega_o(L_{rs} + \tfrac{3}{2}M_s)\dot q^{2'} + \omega_o\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{5'} + R_1\dot q^{3'} = e_{3'},$$

$$(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\frac{d\dot q^{5'}}{dt} + \tfrac{3}{2}M_{sw}\frac{d\dot q^{2'}}{dt} + p(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\dot q^{6'}\dot q^{7'} + p\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{3'}\dot q^{7'} -$$

$$- \omega_o(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\dot q^{6'} - \omega_o\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{3'} + R_2\dot q^{5'} = 0, \tag{2.128}$$

$$(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\frac{d\dot q^{6'}}{dt} + \tfrac{3}{2}M_{sw}\frac{d\dot q^{3'}}{dt} - p(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\dot q^{5'}\dot q^{7'} - p\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{2'}\dot q^{7'} +$$

$$+ \omega_o(L_{rw} + \tfrac{3}{2}M_w)\dot q^{5'} + \omega_o\tfrac{3}{2}M_{sw}\dot q^{2'} + R_2\dot q^{6'} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(J\dot q^{7'}) + p\tfrac{3}{2}M_{sw}(\dot q^{2'}\dot q^{6'} - \dot q^{3'}\dot q^{5'}) + h\dot q^{7'} + \mathcal{M} = 0.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$x_1 = \dot q^{2'}, \quad x_2 = \dot q^{3'}, \quad x_3 = \dot q^{5'}, \quad x_4 = \dot q^{6'}, \quad x_5 = p\dot q^{7'}$$
$$v_1 = e_{2'}, \quad v_2 = e_{3'} \tag{2.129}$$

Rozwiązując układ równań (2.128) ze względu na pochodne $\frac{d\dot q^{k'}}{dt}$ oraz stosując oznaczenia (2.129) otrzymamy

$$\frac{dx_1}{dt} = -a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4x_5 + a_5x_2x_5 + c_1v_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_2x_1 - a_1x_2 + a_3x_4 - a_4x_3x_5 - a_5x_1x_5 + c_1v_2 \tag{2.130}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_6x_1 - a_7x_3 + a_2x_4 - a_8x_4x_5 - a_9x_2x_5 - c_2v_1$$

$$\frac{dx_4}{dt} = a_6x_2 - a_2x_3 - a_7x_4 + a_8x_3x_5 + a_9x_1x_5 - c_2v_2$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -a_{12}x_5 + a_{10}(x_2x_3 - x_1x_4) - \mathcal{M}a_{11} , \qquad (2.130)$$

gdzie

$$c = (L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w) - (\frac{3}{2}M_{sw})^2$$

$$a_1 = \frac{R_1(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w)}{c}, \quad a_2 = \omega_o ,$$

$$a_3 = \frac{R_2 \frac{3}{2}M_{sw}}{c}, \quad a_4 = \frac{(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w)\frac{3}{2}M_{sw}}{c} \qquad (2.131)$$

$$a_5 = \frac{(\frac{3}{2}M_{sw})^2}{c}, \qquad a_6 = \frac{R_1\frac{3}{2}M_{sw}}{c}$$

$$a_7 = \frac{R_2(L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)}{c}, \quad a_8 = \frac{(L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)(L_{rw} + \frac{3}{2}M_w)}{c}$$

$$a_9 = \frac{(L_{rs} + \frac{3}{2}M_s)\frac{3}{2}M_{sw}}{c}, \quad a_{10} = \frac{p^2\frac{3}{2}M_{sw}}{J}$$

$$a_{11} = \frac{p}{J}; \qquad a_{12} = \frac{h}{J}$$

$$c_1 = \frac{L_{rw} + \frac{3}{2}M_w}{c}, \qquad c_2 = \frac{\frac{3}{2}M_{sw}}{c} .$$

Obliczenia przeprowadzimy dla silnika typu SZUDa 116ac o danych znamionowych

$P_N = 38$ [kW] , $I_N = 56,5$ [A] , $n_N = 980$ [obr/min] , $\cos\varphi = 0,86$

$\frac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_N} = 2,5$, $I_{NW} = 86$ [A] , $U_{NW} = 288$ [V] , $\eta = 0,91$.

przy momencie bezwładności $J = 3,52$ [Nms^2]

Wyrazimy teraz wszystkie wielkości występujące w układzie równań (2.130) w jednostkach względnych. Za jednostki względne przyjmujemy

$t_{odn} = \frac{1}{\omega_0}$ – czas odniesienia,

$U_{odn} = U_{N\ max}$ – amplituda napięcia znamionowego stojana,

$J_{odn} = J_{N\ max}$ – amplituda prądu znamionowego stojana,

$R_{odn} = \frac{U_{N\ max}}{J_{N\ max}}$ – oporność odniesienia,

$L_{odn} = \frac{U_{N\ max}}{\omega_0\ J_{N\ max}}$ – indukcyjność odniesienia,

$\omega_{odn} = \omega_0$ – prędkość kątowa odniesienia dla wirnika,

$\mathcal{M}_{odn} = \frac{P_N}{\omega_{N\ mech}}$ – moment odniesienia,

$\omega_{N\ mech} = \frac{\pi}{30}\, n_N$ – znamionowa prędkość kątowa wirnika.

Współczynniki (2.131) w jednostkach względnych przyjmują następujące wartości

$a_1 = 0{,}140$ $a_5 = 6{,}670$ $a_9 = 10{,}770$ $b_1 = 5{,}500$

$a_2 = 1$ $a_6 = 0{,}196$ $a_{10} = 0{,}00234$ $b_2 = 7{,}720$

$a_3 = 0{,}116$ $a_7 = 0{,}187$ $a_{11} = 0{,}00317$

$a_4 = 4{,}760$ $a_8 = 7{,}670$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \\ f_4(\mathbf{x}) \\ f_5(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_1 \\ -C_2 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \qquad (2.132)$$

przy czym

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= -a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4x_5 + a_5x_2x_5 \\ f_2(x) &= -a_2x_1 - a_1x_2 + a_3x_4 - a_4x_3x_5 - a_5x_1x_5 \\ f_3(x) &= a_6x_1 - a_7x_3 + a_2x_4 - a_8x_4x_5 - a_9x_2x_5 \\ f_4(x) &= a_6x_1 - a_2x_3 - a_7x_4 + a_8x_3x_5 + a_9x_1x_5 \\ f_5(x) &= -a_{12}x_5 + a_{10}(x_2x_3 - x_1x_4) - \mathcal{m}a_{11} \end{aligned}$$

Układ dynamiczny (2.130) przyjmie teraz następującą postać wektorową

$$\frac{dx}{dt} = f[x] + Cv \,. \tag{2.133}$$

3. STEROWANIE UKŁADÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

Zagadnienia sterowania optymalnego zostało postawione w latach pięćdziesiątych obecnego stulecia.

Początkowo zagadnienie to próbowano rozwiązać wykorzystując metody klasycznego rachunku wariacyjnego. W 1956 roku L. Pontragin wraz ze swymi współpracownikami sformułował tzw. zasadę maksimum [24] określając warunki konieczne do ekstremum funkcjonału, zależnego od współrzędnych stanu obiektu i sygnałów sterujących obiekt, powiązanych między sobą przez równania różniczkowe tego obiektu. Niezależnie od zasady maksimum R. Bellman [4] sformułował tzw. zasadę optymalności, którą można również stosować do otrzymania równań opisujących sterowania optymalne obiektu. Rozwinęła się też metoda funkcjonałów Lagrange'a bazująca na oparciu pojęciowym topologii i analizy funkcjonalnej [14]. Z najnowszych prac w tej dziedzinie należy wymienić przede wszystkim publikację Dubowieckiego i Miliutina [8], w której autorzy uzyskali bardzo ogólne warunki optymalności zwane przez nich równaniem Eulera. Z warunków tych można z kolei otrzymać znane już rezultaty teorii optymalizacji, jak np. zasadę maksimum Pontriagina oraz metody typu funkcjonałów Lagrange'a. W tej części pracy ze względu na postać matematyczną rozpatrywanego obiektu będziemy bazowali na zasadzie maksimum Pontriagina. Wykorzystując pewne warunki konieczne na ekstremum funkcjonału będziemy poszukiwali sterowań suboptymalnych, kształtujących charakterystyki dynamiczne maszyny asynchronicznej.

3.1. Zbiór sterowań dopuszczalnych

Załóżmy, że mamy dany układ dynamiczny o równaniu (2.133) przy czym (T_1,T_2) jest jego przedziałem określoności. Niech U jest zbiorem funkcji przedziałami ciągłych. Elementy u(t) zbioru U będziemy nazywali sterowaniami.

Załóżmy, że dla każdego t z przedziału określoności (T_1,T_2) układu jest zadany podzbiór U_t przestrzeni R_m (przyjmowany zwykle jako domknięty, ograniczony i wypukły lub jako cała przestrzeń). Oznaczmy przez Ω zbiór zbiorów U_t, to znaczy

$$\Omega = \left\{U_t \;;\; t \in (T_1,T_2)\right\} . \tag{3.1}$$

Możemy wówczas sformułować definicję:

Definicja. U_t jest nazywane zbiorem ograniczonym w chwili t, a Ω jest nazwane zbiorem ograniczającym. Jeśli U jest zbiorem wszystkich funkcji ograniczonych przedziałami ciągłych $u(t)$ określonych w (T_1,T_2) takich, że

$$u(t) \in U_t \quad \text{dla} \quad t \in (T_1,T_2)\ , \tag{3.2}$$

to mówimy, że U jest zbiorem sterowań spełniających ograniczenia Ω lub że U jest zbiorem sterowań dopuszczalnych. Odpowiednio, każdy element $u \in U$ jest nazywany sterowaniem dopuszczalnym.

Przystąpimy teraz do określenia sterowań dopuszczalnych silnika asynchronicznego. Punktem wyjścia dla konstrukcji sterowań dopuszczalnych będzie cosinusoidalne napięcie trójfazowe o pulsacji ω_o

$$\begin{aligned} e_1 &= U_m \cos \omega_o t \\ e_2 &= U_m \cos(\omega_o t + \tfrac{4\pi}{3}) \\ e_3 &= U_m \cos(\omega_o t + \tfrac{2\pi}{3}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Abstrahując narazie od realizacji technicznej, załóżmy że sygnałem sterującym rozpatrywany układ dynamiczny będą trzy niezależne funkcje $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ ograniczone (tzn. $u_i(t) \leqslant 1$, $i = 1,2,3$), przedziałami ciągłe, modulujące odpowiednio cosinusoidalne napięcia trójfazowe (3.3). Zgodnie z prowadzonymi oznaczeniami można napisać

$$U_t = \left\{ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} : |u_i(t)| \leqslant 1, \quad i = 1,2,3 \quad \text{dla} \quad t \in (T_1,T_2) \right\}. \tag{3.4}$$

Widzimy więc, że zbiór ograniczający jest kostką 3-wymiarową w R_3. Zgodnie z naszymi założeniami, napięcia trójfazowe przyłożone odpowiednio do poszczególnych uzwojeń stojana w jednostkach względnych przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1(t) \cos t \\ e_2 &= u_2(t) \cos(t + \tfrac{4\pi}{3}) \\ e_3 &= u_3(t) \cos(t + \tfrac{2\pi}{3})\ . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zwróćmy teraz uwagę na wyrażenie $C\mathbf{v}$ występujące w równaniu (2.133). Zachodzi

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2^k, e_k \\ \\ A_3^k, e_k \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Podstawiająo współczynniki (2.116) oraz zależnośoi (3.5) do (3.6) otrzymamy

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[u_1(1+\cos 2t) + u_2(1+\cos(2t + \frac{2\pi}{3}) + u_3(1+\cos(2t + \frac{4\pi}{3}))\right] \\ \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[u_1\sin 2t + u_2\sin(2t + \frac{2\pi}{3}) + u_3\sin(2t + \frac{4\pi}{3})\right] \end{bmatrix}$$

Wyrażenie $C\mathbf{v}$ przyjmuje teraz postać

$$C\mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_1\left[1+\cos 2t\right], & b_1\left[1+\cos(2t + \frac{2\pi}{3})\right], & b_1\left[1+\cos(2t + \frac{4\pi}{3})\right] \\ \\ -b_1\sin 2t, & -b_1\sin(2t + \frac{2\pi}{3}), & -b_1\sin(2t + \frac{4\pi}{3}) \\ \\ -b_2\left[1+\cos 2t\right], & -b_2\left[1+\cos(2t + \frac{2\pi}{3})\right], & -b_2\left[1+\cos(2t + \frac{4\pi}{3})\right] \\ \\ b_2\sin 2t & b_2\sin(2t + \frac{2\pi}{3}), & b_2\sin(2t + \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \\ \\ u_3 \end{bmatrix} = B_1\mathbf{u} \tag{3.7}$$

gdzie

$$b_1 = \frac{1}{2}c_1\sqrt{\frac{2}{3}} = 2{,}240$$

$$b_2 = \frac{1}{2}c_2\sqrt{\frac{2}{3}} = 3{,}150 \quad , \quad B_1 = \left[b_{kl}\right].$$

Podstawiająo wyrażenie (3.7) do równania (2.133) otrzymamy

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t)\right] + B_1(t)\,\mathbf{u}(t)\,. \tag{3.8}$$

W rozpatrywanym przypadku sygnały sterujące u_1, u_2, u_3 były niezależne. Gdyby natomiast założyć, że sygnały modulujące cosinusoidalne napięcie poszczególnych faz są identyczne, tzn.

$$u_1 = u_2 = u_3 = u\,,$$

to $B_1\mathbf{u}$ przyjmie następującą postać

$$B_1\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3b_1 \\ 0 \\ -3b_2 \\ 0 \end{bmatrix} u = \mathbf{b}u \,. \tag{3.9}$$

Równanie (3.8) przyjmie teraz postać

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t)\right] + \mathbf{b}u(t) \,. \tag{3.10}$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden wariant sterowania silnika asynchronicznego gdy sygnałem sterującym będą trzy niezależne, ograniczone i przedziałami ciągłe przebiegi napięcia $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$.
Zachodzi więc

$$e_1 = u_1(t) \,, \quad e_2 = u_2(t) \,, \quad e_3 = u_3(t) \,, \tag{3.11}$$

gdzie $\left|u_k(t)\right| \leqslant U_m$ dla $k = 1,2,3$.

Jeżeli więc przebiegi napięcia $u_k(t)$ wyrazimy w jednostkach względnych (wtedy $\left|u_k(t)\right| \leqslant 1$), to zbiór ograniczający jest również kostką 3-wymiarową w R_3.

Podstawmy teraz wyrażenia (3.11) do (3.6). Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} u_1 \cos t + u_2 \cos(t + \frac{4\pi}{3}) + u_3 \cos(t + \frac{2\pi}{3}) \\ -u_1 \sin t - u_2 \sin(t + \frac{4\pi}{3}) - u_3 \sin(t + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} .$$

Wyrażenie $C\mathbf{v}$ będzie miało następującą postać:

$$C\mathbf{v} = \begin{bmatrix} d_1 \cos t, & d_1 \cos(t + \frac{4\pi}{3}), & d_1 \cos(t + \frac{2\pi}{3}) \\ -d_1 \sin t, & -d_1 \sin(t + \frac{4\pi}{3}), & -d_1 \sin(t + \frac{2\pi}{3}) \\ -d_2 \cos t, & -d_2 \cos(t + \frac{4\pi}{3}), & -d_2 \cos(t + \frac{2\pi}{3}) \\ d_2 \sin t, & d_2 \sin(t + \frac{4\pi}{3}), & d_2 \sin(t + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = B_2\mathbf{u} \tag{3.12}$$

gdzie

$$d_1 = c_1\sqrt{\frac{2}{3}} = 4{,}480, \quad d_2 = c_2\sqrt{\frac{2}{3}} = 6{,}300.$$

Równanie (2.133) można teraz zapisać następująco

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t)\right] + B_2(t)\mathbf{u}(t)\ . \tag{3.13}$$

W dalszej części pracy będziemy zajmowali się sterowaniem układu dynamicznego w postaci (3.8), (3.10) lub (3.13) w zależności od tego, jaki zbiór sterowań dopuszczalnych będziemy mieli na uwadze.

3.2. Funkcjonał jakości sterowania

Wybór postaci matematycznej wskaźnika jakości dla układów elektromechanicznych jest w dużym stopniu sprawą subiektywną. Ważną rolę w określeniu odpowiedniego funkcjonału dla danego zagadnienia odgrywa doświadczenie i intuicja inżyniera. Ponadto funkcjonał będzie zależał od wymaganego działania układu. W tej pracy skupimy się tylko na kształtowaniu charakterystyki dynamicznej momentu elektromechanicznego w maszynie asynchronicznej. Moment elektromechaniczny jest funkcją stanu układu dynamicznego w postaci równań (3.8) i wyraża się następująco:

$$m_{em} = a_{12}(x_2x_3 - x_1x_4)\ . \tag{3.14}$$

Załóżmy teraz, że sterowanie układu (3.8) wynosi $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wówczas

$$B_1\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3b_1 \\ 0 \\ -3b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}\ . \tag{3.15}$$

Podstawiając wyrażenie (3.15) do równania (3.8) otrzymamy

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t)\right] + \mathbf{b}\ . \tag{3.16}$$

Rozwiązując układ równań (3.16) przy zerowych warunkach początkowych na maszynie cyfrowej otrzymamy przebieg momentu jak na rys. 3.1, 3.2. Widzimy więc, że w początkowym okresie moment wykazuje bardzo znaczne oscylacje. To niepożądane zjawisko oscylacji momentu będziemy starali się zminimalizować. Narzućmy pewne przebiegi momentów elektromechanicznych, które będziemy realizować poprzez dobór właściwych sterowań spośród sterowań dopuszczalnych. Naturalnym żądaniem jest, ażeby charakterystyka momentu elektromechanicznego funkcją prędkości kątowej wirnika była możliwie maksymalna dla małych prędkości, niezależnie od włączonych oporów do uzwojeń wirnika. Tradycyjnie rzecz biorąc problem rozwiązuje się przez włączenie oporu w obwód wirnika, jednak postępowanie takie nie eliminuje oscylacji momentu elektromechanicznego (por. rys. 3.1, 3.2). Będziemy więc poszukiwali takich sterowań, które minimalizują następujący funkcjonał jakości

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L\left[x(t)\right]dt , \tag{3.17}$$

gdzie

$$L\left[x(t)\right] = \left[\mathcal{M}_z - a_{12}(x_2(t)x_3(t) - x_1(t)x_4(t))\right]^2 , \tag{3.18}$$

przy czym t_1 nie jest ustalone.

Minimalizacja funkcjonału (3.17) nie zapewnia jeszcze całkowitego ukształtowania charakterystyki dynamicznej momentu elektromechanicznego. Należy bowiem doprowadzić układ do stanu ustalonego. Mając to na uwadze, weźmy charakterystykę statyczną momentu elektromechanicznego. Otrzymamy ją rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} f_1[x] + 3b_1 &= 0 \\ f_2[x] &= 0 \\ f_3[x] - 3b_2 &= 0 \\ f_4[x] &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ze względu na $x_1(x_5)$, $x_2(x_5)$, $x_3(x_5)$, $x_4(x_5)$ i podstawiając tak otrzymane rozwiązanie do równania (3.14).

Daje to

$$\underset{(st)}{\mathcal{M}}_{em}(x_5) = \frac{d(1 - x_5)}{c_2x_5^2 - c_1x_5 + c_0} , \tag{3.20}$$

gdzie

$$d = 1{,}132; \quad c_2 = 1{,}0017; \quad c_1 = 2{,}013; \quad c_0 = 1{,}057;$$

dla

$$R_2 = 0{,}079[\Omega];$$

$$d = 2{,}680; \quad c_2 = 1{,}0017; \quad c_1 = 2{,}031; \quad c_0 = 1{,}327;$$

dla

$$R_2 = 0{,}179[\Omega], \quad \text{tj.} \quad R_{2\,dod} = 0{,}1[\Omega].$$

Widzimy z rys. 3.1, 3.2, że moment elektromechaniczny statyczny osiąga zero dla prędkości $x_5 = 1$, co odpowiada prędkości synchronicznej wirnika. Będziemy więc minimalizować odstępstwo momentu elektromechanicznego od charakterystyki statycznej momentu. Matematycznie rzecz biorąc należy poszukiwać takich sterowań dopuszczalnych, które zminimalizują następujący funkcjonał jakości

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t)]dt, \tag{3.21}$$

gdzie

$$L[x(t)] = \left[\frac{d(1 - x_5(t))}{c_2x_5^2(t) - c_1x_5(t) + c_0} - a_{12}(x_2(t)x_3(t) - x_1(t)x_4(t))\right]^2.$$

Przyjęte funkcjonały jakości są ściśle związane z kształtowaniem charakterystyki dynamicznej momentu elektromechanicznego i abstrahują od działania układów mechanicznych sprzężonych z maszyną asynchroniczną. Założyliśmy bowiem, że moment mechaniczny na wale maszyny jest równy zeru. Niemniej jednak wyniki uzyskane dla tak określonych funkcjonałów jakości będą cenne dla projektantów konkretnych układów elektromechanicznych.

3.3. Podstawienie zadania sterowania

Zakładamy, że w $R_5x(T_1,T_2)$ jest zadany pewien zbiór $S = S_1x(T_1,T_2)$ (3.20), który będziemy nazywali zbiorem docelowym. Elementy zbioru docelowego są parami $(\mathbf{x},t)$, składającymi się ze stanu $\mathbf{x}(t)$ i punktu t przedziału określoności. Przyjmujemy, że

$$S_1 = \left\{ \mathbf{x}: x_5 = \omega;\ 0 < \omega < 1;\ +\infty\ x_k > -\infty;\ \text{dla}\ k = 1,2,3,4 \right\} \tag{3.21}$$

Zauważmy, że zbiór docelowy S_1 ma tę własność, że w każdym punkcie można jednoznacznie określić jego normalną, stanowi bowiem hiperpłaszczyznę czterowymiarową. Zbiór docelowy (3.20) będziemy brali pod uwagę, gdy nie będziemy nakładali żadnych ograniczeń na współrzędne stanu układu.

Przystąpimy teraz do formalnego sformułowania zagadnienia sterowania, którego celem, potocznie mówiąc, będzie minimalizacja oscylacji momentu elektromechanicznego w początkowym okresie rozruchu maszyny asynchronicznej.

Zagadnienie 1

Jest dany układ dynamiczny o równaniach (3.8) stanie początkowym $\mathbf{x}(t_0) = 0$, chwili początkowej $t_0 = 0$, zbiorze docelowym (3.20) $S = S_1 x(T_1,T_2)$ i zbiorze sterowań dopuszczalnych U spełniających ograniczenia (3.4). Należy znaleźć sterowanie $\mathbf{u} \in U$ przeprowadzające $(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ w S tak, żeby $(\mathbf{x}(t_1, \mathbf{u}_{(t_0,t_1]}; \mathbf{x}(t_0)), t_1) \in S$ i minimalizujące funkcjonał jakości (3.17)

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t)]dt ,$$

gdzie t_1 jest pierwszą chwilą czasową następującą po t_0, w której trajektoria $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[t; \mathbf{u}_{(t_0,t_1]}; \mathbf{x}(t_0)]$ osiąga S.

Dowolne sterowania $\mathbf{u}^*$, będące rozwiązaniem zagadnienia sterowania, jest nazywane sterowaniem optymalnym. Zauważmy, że sterowania optymalne nie muszą istnieć. Wiemy jednak, że sterowanie $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 1$ pozwala osiągnąć zbiór docelowy S. Mając to na uwadze będziemy poszukiwali sterowań suboptymalnych wykorzystując w tym celu warunki konieczne dla zagadnienia 1. Znalezienie sterowań suboptymalnych byłoby cenne z inżynierskiego punktu widzenia, pozwoliłoby bowiem odpowiadać na pytanie jakie są możliwości kształtowania charakterystyki momentu elektromechanicznego w początkowej fazie rozruchowej.

Załóżmy teraz, że zbiór docelowy S ma postać

$$S = \left\{ \mathbf{x}_1 \right\} x\ (T_1,T_2)\ , \tag{3.22}$$

przy czym $\mathbf{x}_1$ jest jednym punktem dla którego zachodzi

$$f[\mathbf{x}_1] + \mathbf{b} = 0. \tag{3.23}$$

Widzimy więc, że punkt $\mathbf{x}_1$ jest punktem równowagi układu (3.8) możliwym do utrzymania przez sterowanie $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dla zbioru docelowego (3.22) sformułujemy następujące

Zagadnienie 2

Jest dany układ dynamiczny o równaniach (3.8) stanie początkowym $\mathbf{x}(t_0) = 0$, chwili początkowej $t_0 = 0$, zbiorze docelowym (3.22) $\{\mathbf{x}_1\} x(T_1 T_2)$ i zbiorze sterowań dopuszczalnych U spełniających ograniczenia (3.4). Należy znaleźć sterowanie $\mathbf{u} \in U$ przeprowadzające $(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ w $\{\mathbf{x}_1\} x(T_1, T_2)$ minimalizujące funkcjonał jakości (3.21)

$$J(\mathbf{u}) = J(\mathring{\mathbf{x}}(t_0), t_0, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d(1-x_5(t))}{c_2 x_5^2(t) - C_1 x_5(t) + C_0} - \right.$$

$$\left. - a_{12}(x_2(t)x_3(t) - x_1(t)x_4(t)) \right]^2 dt,$$

przy czym $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$.

Zagadnienie 2 sterowania będziemy nazywali zagadnieniem z ustalonym punktem końcowym i swobodnym czasem. Jeżeli punkt $\mathbf{x}_1$ jest punktem równowagi układu dynamicznego (3.8), tzn. spełnia równania (3.23), to mówimy, że mamy do czynienia z zagadnieniem stabilizacji.

Sterowanie będące rozwiązaniem zagadnienia 2 pozwoli nie tylko zminimalizować oscylacje momentu elektromechanicznego maszyny asynchronicznej lecz również osiągnąć stabilny punkt pracy wynikający z zasady działania całego układu elektromechanicznego.

Przystąpimy teraz do sformułowania warunków koniecznych dla zagadnienia 1 i 2.

3.4. Zastosowanie zasady minimum Pontriagina

W tym punkcie sformułujemy zasadę minimum Pontriagina dla dwóch zadań. Przed napisaniem twierdzeń wprowadzimy pewną dodatkową terminologię i zapis.

Niech $H(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u})$ oznacza funkcję rzeczywistą 5-wymiarowych wektorów $\mathbf{x},\mathbf{p}$ oraz 3-wymiarowego wektora $\mathbf{u}$ daną wzorem

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u}) = L(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \mathbf{p}, B\mathbf{u} \rangle, \tag{3.24}$$

przy czym $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{Bu}$ jest funkcją, która określa nasz układ, czyli prawą stroną równania stanu, a $L(\mathbf{x})$ jest funkcją podcałkową wskaźnika jakości. Mówimy, że $H(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u})$ jest hamiltonianem (funkcją Hamiltona) naszego zadania, a p jest wektorem (stanem) sprzężonym.

Zauważmy, że funkcje $H(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u})$ i $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u})$ są ciągłe w $R_5 x R_5 x \Omega x (T_1,T_2)$ Co więcej $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u})$ jest dobrze określone i dane wzorem

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{B}\mathbf{u}. \tag{3.25}$$

Niech $\mathbf{x}(t_0)$ będzie stanem początkowym, a t_0 chwilą początkową. Jeżeli $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ jest pewnym dopuszczalnym sterowaniem i jeżeli przez $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ oznaczymy trajektorię układu wychodzącą z $\mathbf{x}(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = 0$ odpowiadającą $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, to dla każdej funkcji $\mathbf{p}(t)$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left[\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathbf{p}(t),\tilde{\mathbf{u}}(t),t\right] = \mathbf{f}\left[\tilde{\mathbf{x}}(t)\right] + B(t)\tilde{\mathbf{u}}(t). \tag{3.26}$$

W dodatku, jeżeli π jest dowolnym 5-wymiarowym wektorem, to liniowe równanie różniczkowe

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\left[\tilde{\mathbf{x}}(t),\mathbf{p}(t),\tilde{\mathbf{u}}(t)\right] = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\left[\tilde{\mathbf{x}}(t)\right] - \left\{\frac{\partial \mathbf{f}\left[\tilde{\mathbf{x}}(t)\right]}{\partial \mathbf{x}}\right\}^T \mathbf{p}(t) \tag{3.27}$$

ma jedyne rozwiązanie $\mathbf{p}(t,\pi)$ spełniające warunek początkowy $\mathbf{p}(t_0,\pi) = \pi$. Układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t),\mathbf{u}(t),t\right] = \mathbf{f}\left[\mathbf{x}(t)\right] + B(t)\mathbf{u}(t) \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t),\mathbf{u}(t),t\right] = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{x}(t)\right] - \left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\left[\mathbf{x}(t)\right]\right\}^T \mathbf{p}(t) \end{aligned} \tag{3.28}$$

nazywamy układem kanonicznym (lub Hamiltona) rozpatrywanego zadania. Jeżeli $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ jest sterowaniem dopuszczalnym, a $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ jest odpowiadającą mu trajektorią, to mówimy, że każde rozwiązanie $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ układu (3.27) odpowiada $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ i $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Innymi słowy, $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ odpowiada $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, jeżeli $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ i $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ są rozwiązaniami układu kanonicznego. Obowiązuje przy tym:

TWIERDZENIE 1. Zasada minimum dla układu zależnego od czasu i z ustalonym punktem końcowym, dla zadania 2.

Niech $\mathbf{u}^*(t)$ będzie dopuszczalnym sterowaniem przeprowadzającym układ z punktu $(\mathbf{x}(t_0),t_0)$ w zbiór $S = \{\mathbf{x}_1\} x (T_1,T_2)$. Niech $\mathbf{x}^*(t)$ będzie trajektorią równania (3.10) odpowiadającą $\mathbf{u}^*(t)$, wychodzącą z $(\mathbf{x}(t_0),t_0)$ i przecinającą S w chwili t_1 (innymi słowy $\mathbf{x}^*(t_1) = \mathbf{x}_1$). Aby $\mathbf{u}^*(t)$ było optymalne dla funkcjonału jakości (3.21) konieczne jest istnienie funkcji $p^*(t)$ takiej, że

1° $p^*(t)$ odpowiada $u^*(t)$, $x^*(t)$ tak, że $p^*(t)$, $x^*(t)$ są rozwiązaniami układu kanonicznego:

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right] \tag{3.29}$$

$$\frac{dp^*(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right] \tag{3.30}$$

spełniającymi warunki krańcowe:

$$x(t_0) = 0 \ , \quad x^*(t_1) = x_1 \tag{3.31}$$

2° $H\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right]$ jako funkcja u w Ω ma absolutne minimum w punkcie $u = u^*(t)$ dla $t \in \left[t_0, t_1\right]$

$$\min_{u \in \Omega} H\left[x^*(t), p^*(t), u, t\right] = H\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right] \tag{3.32}$$

lub co równoważne

$$H\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right] \leqslant H\left[x^*(t), p^*(t), u, t\right] \tag{3.33}$$

dla wszystkich $u \in \Omega$;

3° Funkcja $H\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right]$ spełnia zależność

$$H\left[x^*(t), p^*(t), u^*(t), t\right] = -\int_t^{t_1} \frac{\partial H}{\partial t}\left[x^*(\tau), p^*(\tau), u^*(\tau), \tau\right] d\tau \tag{3.34}$$

$$H\left[x^*(t_1), p^*(t_1), u^*(t_1), t_1\right] = 0 \ , \tag{3.35}$$

przy czym t_1 jest nieokreśloną chwilą końcową.

TWIERDZENIE 2. Zasada minimum dla układu zależnego od czasu z nieustalonym punktem końcowym dla zadania 1.

Niech $u^*(t)$ będzie sterowaniem dopuszczalnym przeprowadzającym $(x(t_0), t_0)$ w zbiór docelowy (3.20)

$$S = \left\{x : x_5 = \omega;\ 0 < \omega < 1;\ -\infty < x_k < +\infty \ ;\ \text{dla } k = 1,2,3,4\right\} x (T_1, T_2) \tag{3.36}$$

Niech $x^*(t)$ będzie trajektorią odpowiadającą $u^*(t)$ według równania (3.10), wychodzącą $(x(t_0),t_0)$ i przecinającą S w t_1. Aby $u^*(t)$ było optymalne dla funkcjonału jakości (3.17) konieczne jest istnienie funkcji $p^*(t)$ takiej, że są spełnione następujące warunki:

1^0 Jak w TWIERDZENIU 1 równania (3.29) i (3.30) z wyjątkiem warunków krańcowych, które przyjmują postać

$$x^*(t_0) = 0 \ , \quad (x^*(t_1),t_1) \in S \tag{3.36}$$

2^0 Jak w TWIERDZENIU 1 równania (3.32) i (3.33).

3^0 Jak w TWIERDZENIU 1 równania (3.34) i (3.35) przy czym t_1 jest pierwszą chwilą, w której trajektoria $x^*(t)$ przecina zbiór docelowy S.

4^0 Wektor $p^*(t_1)$ jest transwersalny do zbioru S_1

$$S_1 = \left\{x : x_5 = \omega;\ 0<\omega<1;\ -\infty < x_k < +\infty;\ \text{dla } k = 1,2,3,4\right\}, \tag{3.37}$$

przy czym warunek transwersalności w punkcie $x^*(t_1)$ można wyrazić zależnością

$$\langle p^*(t_1),\ x-x^*(t_1)\rangle = 0 \quad \text{dla} \quad x \in S_1 \ , \tag{3.38}$$

gdyż S_1 jest hiperpłaszczyzną 4-wymiarową.

Zauważmy przede wszystkim, że jedyną różnicą między twierdzeniami 1 i 2 jest dodatkowy warunek 4^0 twierdzenia 2, w którym jest mowa o transwersalności (to jest prostopadłości stanu sprzężonego do zbioru docelowego). Twierdzenia 1 i 2 zacytowano z prac [2] [6] jednak w postaci przydatnej do dalszych rozważań.
Nasuwa się pytanie: jak można wykorzystać powyższe twierdzenia do wyprowadzenia sterowań optymalnych dla zagadnień 1 i 2?
Mając to na uwadze weźmy pod uwagę następnie pkt 2^0 tych twierdzeń, tj.

$$H\left[x^*(t),p^*(t),\ u^*(t)t\right] \leqslant H\left[x^*(t),p^*(t),u,t\right]$$

dla $u(t) \in \Omega$ dla $t \in \left[t_0,\ t_1\right]$.
Zgodnie z definicją hamiltonianu otrzymamy

$$\begin{aligned} &L\left[x^*(t)\right] + \sum_{k=1}^{5} f_k\left[x^*(t)\right]p_k^*(t) + \sum_{l=1}^{3} u_l^*(t)\left[\sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k^*(t)\right] \leqslant \\ &\leqslant L\left[x^*(t)\right] + \sum_{k=1}^{5} f_k\left[x^*(t)\right]p_k^*(t) + \sum_{l=1}^{3} u_l(t)\left[\sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k^*(t)\right]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ponieważ w nierówności (3.39) dwa pierwsze człony po obu stronach są takie same, więc po redukcji otrzymamy

$$\sum_{l=1}^{3} u_l^*(t)\left[\sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k^*(t)\right] \leqslant \sum_{l=1}^{3} u_l(t)\left[\sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k^*(t)\right] \qquad (3.40)$$

dla $u(t) \in \Omega$ i $t \in [t_o, t_1]$.

Zdefiniujemy funkcje $q_l^*(t)$ za pomocą równań

$$q_l^*(t) = \sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k^*(t) \qquad (3.41)$$

lub w postaci wektorowej

$$q^*(t) = B_1^T(t)p^*(t). \qquad (3.42)$$

Nierówność (3.40) można teraz przepisać w postaci

$$\sum_{l=1}^{3} u_l^*(t)q_l^*(t) \leqslant \sum_{l=1}^{3} u_l(t)q_l^*(t) \qquad (3.43)$$

dla wszystkich $|u_l(t)| \leqslant 1$, $l = 1,2,3$ i każdego $t \in [t_o, t_1]$.

Nierówność (3.43) oznacza, że funkcja

$$\Phi\left[u(t)\right] = \sum_{l=1}^{3} u_l(t)p_l^*(t) \qquad (3.44)$$

osiąga minimum globalne dla

$$u_l(t) = u_l(t) .$$

Zachodzi

$$\min_{u(t)\in\Omega} \Phi\left[u(t)\right] = \min_{u(t)\in\Omega} \sum_{l=1}^{3} u_l(t)q_l^*(t) = \sum_{l=1}^{3}\left[\min_{|u_l(t)|\leqslant 1} u_l(t)q_l^*(t)\right], \qquad (3.45)$$

gdyż $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ są ograniczone niezależnie i można zamienić miejscami operację "min" i "$\sum$".

Zauważmy, że

$$\min_{|u_l(t)| \leq 1} u_l(t) q_l^*(t) = -\left|q_l^*(t)\right|. \tag{3.46}$$

Sterowanie $u_k^*(t)$ minimalizuje funkcję $u_k(t)q_k^*(t)$. Z równania (3.46) wynika zatem, że $u_k^*(t)$ musi być następującą funkcją

$$u_k^*(t) = \begin{cases} +1 & \text{jeżeli} \quad q_k^*(t) < 0 \\ -1 & \text{jeżeli} \quad q_k^*(t) > 0 \\ \text{nieokreślone jeżeli } q_k^*(t) = 0 . \end{cases} \tag{3.47}$$

Wykorzystując funkcję signum zapiszemy zależność (3.47) w postaci

$$u_k^*(t) = -\operatorname{sign}\left\{q_k^*(t)\right\} = -\operatorname{sign}\left[\sum_{l=1}^{3} b_{kl}(t) p_l^*(t)\right] \tag{3.48}$$

dla $k = 1,2,3$ oraz $t \in \left[t_0, t_1\right]$.

Podstawiając współczynniki $b_{kl}(t)$ zgodnie z (3.7) do wzoru (3.48) otrzymamy

$$u_1^*(t) = -\operatorname{sign}\Big\{p_1^*(t)b_1(1+\cos 2t) - p_2^*(t)b_1\sin 2t - p_3^*(t)b_2(1+\cos 2t) + p_4^*(t)b_2\sin 2t\Big\}$$

$$u_2^*(t) = -\operatorname{sign}\Big\{p_1^*(t)b_1\left[1+\cos(2t+\tfrac{2\pi}{3})\right] - p_2^*(t)b_1\sin(2t+\tfrac{2\pi}{3}) - p_3^*(t)b_2\left[1+\cos(2t+\tfrac{2\pi}{3})\right] + p_4^*(t)b_2\sin(2t+\tfrac{2\pi}{3})\Big\}$$

$$u_3^*(t) = -\operatorname{sign}\Big\{p_1^*(t)b_1\left[1+\cos(2t+\tfrac{4\pi}{3})\right] - p_2^*(t)b_1\sin(2t+\tfrac{4\pi}{3}) - p_3^*(t)b_2\left[1+\cos(2t+\tfrac{4\pi}{3})\right] + p_4^*(t)b_2\sin(2t+\tfrac{4\pi}{3})\Big\}$$

dla $t \in \left[t_0, t_1\right]$

Równania (3.49) uzależniają składowe sterowania optymalnego $\mathbf{u}^*(t)$ od stanu sprzężonego $\mathbf{p}^*(t)$. Zauważmy, że jeżeli $\mathbf{p}^*(t)$ spełnia równanie (3.48), to równanie to jest również spełnione przez każdy wektor $c\mathbf{p}^*(t)$, pod warunkiem, że $c > 0$, ponieważ $\operatorname{sign}\{c\} = +1$.

Przypuśćmy, że w przedziale czasu $[t_0, t_1]$ istnieje przeliczalny zbiór chwil czasowych

$$t_{l_j} \in [t_0, t_1] \; ; \quad l = 1,2,3 \; ; \quad j = 1,2,3,\ldots$$

takich, że

$$q_l^*(t) = \sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t) p_k^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad t = t_{l_j} \\ \neq 0 & \text{gdy} \quad t \neq t_{l_j} \end{cases} \tag{3.50}$$

dla $l = 1,2,3$.
W takim przypadku będziemy mówili, że mamy do czynienia z regularnym zagadnieniem sterowania. Ograniczymy w dalszym ciągu nasze rozważania do zagadnień regularnych.

Wykorzystując zasadę minimum powiązaliśmy sterowanie optymalne $\mathbf{u}^*(t)$ z odpowiednim stanem sprzężonym $\mathbf{p}^*(t)$. W dalszym ciągu aktualne jest pytanie jak można wykorzystać wszystkie warunki konieczne istnienia minimum do wyznaczenia sterowań optymalnych dla zadania 1 i 2.

Zbadajmy zachowanie się hamiltonianu, gdy $\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t$ otrzymujemy stałe, natomiast $\mathbf{u}(t)$ zmienia się w całym zbiorze ograniczeń Ω. W szczególności chcemy znaleźć $\mathbf{u}(t)$, które absolutnie minimalizuje hamiltonian. W tym celu zdefiniujemy następujące sterowanie H-minimalne.

Dopuszczalne sterowanie $\mathbf{u}^0(t)$ nazywa się sterowaniem H-minimalnym, jeżeli spełnia warunek

$$H\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^0(t), t\right] \leqslant H\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}(t), t\right] \tag{3.51}$$

dla $\mathbf{u}(t) \in \Omega$, wszystkich $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ i wszystkich $t \in [t_0, t_1]$. Wykonując postępowanie jak poprzednio dla sterowań optymalnych okaże się, że H-minimalne sterowanie dla funkcji Hamiltona z równania (3.24) jest dane równaniem

$$u_l^0(t) = -\operatorname{sign}\left[\sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t) p_k(t)\right]. \tag{3.52}$$

Jeżeli podstawimy sterowanie H-minimalne $\mathbf{u}^0(t)$ do równania (3.24), to otrzymamy

$$H\left[\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), \mathbf{u}^0(t), t\right] = L\left[\mathbf{x}(t)\right] + \sum_{k=1}^{5} f_k\left[\mathbf{x}(t)\right] p_k(t) - \sum_{l=1}^{3} \left| \sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t) p_k(t) \right| \tag{3.53}$$

Zażądajmy, aby wektory $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{p}(t)$ spełniały równania różniczkowe

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k\left[\mathbf{x}(t)\right] - \sum_{l=1}^{3} b_{kl}(t)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{r=1}^{5} b_{rl}(t)p_r(t)\right] \qquad (3.54)$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\sum_{l=1}^{5}\left\{\frac{\partial f_l\left[\mathbf{x}(t)\right]}{\partial x_k(t)}\right\} p_l(t) - \frac{\partial L\left[\mathbf{x}(t)\right]}{\partial x_k(t)} \qquad (3.55)$$

dla $k = 1,2,\ldots,5.$

Przypuśćmy, że modelujemy równania (3.54) i (3.55) na maszynie cyfrowej. W znanej chwili początkowej t_0 wykorzystujemy znane wartości początkowe zmiennych stanu $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, $x_3(t_0),\ldots,x_5(t_0)$, jako warunki początkowe dla układu (3.54) oraz pewne przypuszczalne wartości początkowe zmiennych sprzężonych $p_1(t_0),p_2(t_0),\ldots,p_5(t_0)$

Niech $q_l(t)$, $l = 1,2,3$, będą funkcjami zdefiniowanymi równaniem

$$q_l(t) = \sum_{k=1}^{5} b_{kl}(t)p_k(t). \qquad (3.56)$$

Załóżmy, że

$$q_l(t_0) \neq 0 \quad \text{dla} \quad l = 1,2,3$$

Z równań (3.52) i (3.56) wynika, że liczby

$$u_l^0(t) = -\,\mathrm{sign}\left\{q_l(t_0)\right\}$$

są równe +1, albo −1. Tak więc rozwiązania równań (3.54) i (3.55) są dobrze określone co najmniej dla t bliskiego t_0. Oznaczmy rozwiązania równań (3.54) i (3.55) przez

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}\left[t,t_0,\mathbf{x}(t_0),\mathbf{p}(t_0)\right]$$
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}\left[t,t_0,\mathbf{x}(t_0),\mathbf{p}(t_0)\right] \qquad (3.57)$$

dla podkreślenia ich zależności od znanego stanu początkowego $\mathbf{x}(t_0)$ i przypuszczalnego początkowego stanu sprzężonego $\mathbf{p}(t_0)$.

Przeprowadzimy następujący "eksperyment" na maszynie cyfrowej: rozwiązujemy równania (3.54) i (3.55), tj. otrzymujemy $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{p}(t)$ oraz w każdej chwili czasu obliczamy

$$q_1(t)\ ,\quad \frac{dq_1}{dt}\ ,\ldots,\quad H\left[\mathbf{x}(t),\mathbf{p}(t),\mathbf{u}^0(t),t\right] .$$

Podając konkretną przypuszczalną wartość $\mathbf{p}(t_0)$ kolejno dla każdego t w pewnym przedziale $[t_0,t_1]$ odpowiadamy na następujące pytania:

1^0 Jeżeli $q_1(t) = 0$, to czy $\frac{dq_1}{dt} \neq 0$? Jeżeli nie, to czy $\frac{d^2q_1(t)}{dt} \neq 0$ itd
Jeżeli odpowiedź na pytanie 1^0 brzmi tak, to przechodzimy do pytania 2^0. Jeżeli odpowiedź jest nie, to zmieniamy wartość $p(t_0)$ i powtarzamy pytanie 1^0.

2^0 Jeżeli odpowiedź na pytanie 1 jest tak, to czy istnieje taki czas t_1 że $(\mathbf{x}(t_1),t_1) \in S$ i

$$H\left[\mathbf{x}(t_1),\mathbf{p}(t_1),\mathbf{u}^0(t_1),t_1\right) = 0 .$$

Jeżeli odpowiedź na pytanie 2^0 brzmi nie, zmieniamy $\mathbf{p}(t_0)$ i rozpoczynamy eksperyment od początku. Jeżeli odpowiedź na pytanie 2^0jest tak to przechodzimy do pytania 3^0.

3^0 Jeżeli odpowiedź na pytanie 2^0 jest tak, to czy

$$<\mathbf{p}(t_1),\mathbf{x}-\mathbf{x}(t_1)>= 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in S_1$$

Jeżeli odpowiedź na pytanie 3^0 brzmi nie, zmieniamy $\mathbf{p}(t_0)$ i rozpoczynamy od początku. Jeżeli odpowiedź na pytanie 3^0 jest tak, to zapamiętujemy tę wartość $\mathbf{p}(t_0)$ i rozpoczynamy cały eksperyment od początku. Postępowanie takie przeprowadzamy dopóty, dopóki nie znajdujemy wszystkich wektorów $\mathbf{p}(t_0)$, przy których odpowiedzi na pytanie 1^0 do 3^0 są tak. Mówiąc niezbyt ściśle, zdefiniujemy zbiór $\tilde{P}_0$ początkowych stanów sprzężonych $\mathbf{p}(t_0)$ odpowiadający danemu stanowi początkowemu $\mathbf{x}(t_0)$ o takiej wartości, że dla wszystkich elementów tego zbioru odpowiedzi na pytania 1^0 do 3^0 są pozytywne.

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że każde rozwiązanie $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{p}}(t)$, $t \in [t_0,t_1]$ odpowiadające elementowi zbioru $\tilde{P}_0$ spełnia wszystkie warunki konieczne twierdzenia 2, dla zadania 1. Podobne rozważania można przeprowadzić dla zadania 2 pomijając tylko w wyżej przeprowadzonym eksperymencie pytanie 3^0.

Oznaczmy przez $\underset{(1)}{\tilde{\mathbf{u}}^0}(t)$ sterowanie odpowiadające elementom $\tilde{P}_0$ na mocy równania (3.52), Ponieważ zasada minimum jest warunkiem lokalnym, nie można rozróżnić sterowań lokalnie i globalnie optymalnych. Z tego powodu zbiór sterowań, które spełniają wszystkie warunki konieczne, zawiera sterowania zarówno lokalnie jak i globalnie optymalne. Jedyną drogą do stwierdzenia, które spośród sterowań $\tilde{u}^{o}_{(i)}(t)$ są globalnie optymalne jest porównanie funkcjonałów

$$J\left[x(t_0),t_0,\tilde{u}^{o}_{(i)}(t)\right] = \int_{t_0}^{t_1} L\left[x(t)\right] dt .$$

Wykorzystanie wyżej przedstawionego algorytmu obliczeniowego wymaga dla rozpatrywanego obiektu wielkiej pamięci i szybkości działania komputera. Trzeba by było drogą prób dobierać wartości początkowe dla wektora $p(t)$, które dałyby rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia.

3.5. <u>Sterowanie suboptymalne dla zagadnienia 1: Wnioski</u>

W poprzednim punkcie podaliśmy warunki konieczne dla sterowania optymalnego zagadnienia 1 i 2 oraz zaproponowaliśmy systematyczną metodę wyznaczania sterowań, które mogą być optymalne.

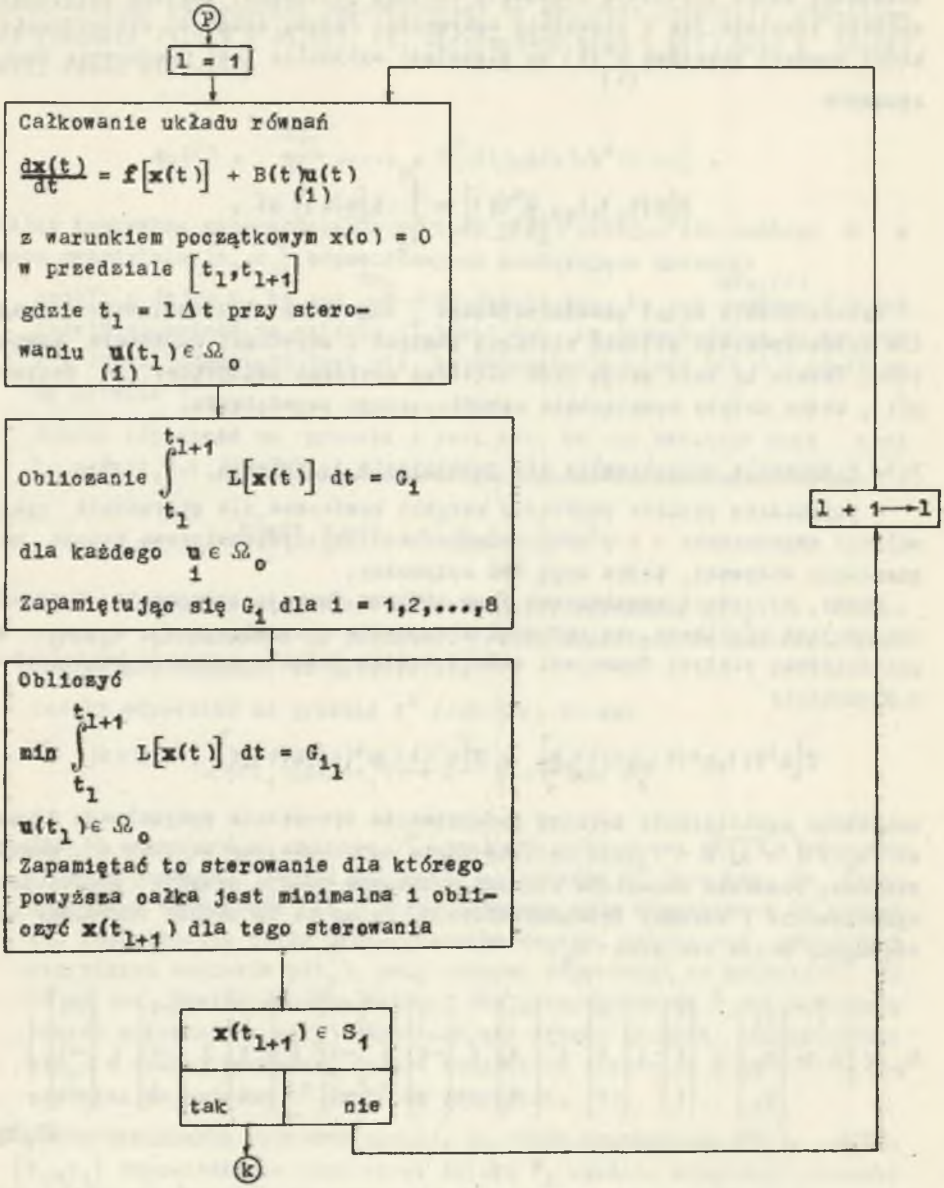
Wiemy, że jeżeli hamiltonian jest liniową funkcją sterowania i zagadnienie jest regularne, to składowe sterowania optymalnego u_1, u_2, u_3 są przedziałami stałymi funkcjami czasu, bowiem jeden z warunków koniecznych a mianowicie

$$H\left[x^*(t),p^*(t),u^*(t),t\right] \leqslant H\left[x^*(t),p^*(t),u(t),t\right] , \quad u \in \Omega$$

umożliwia ograniczenie zakresu poszukiwania sterowania optymalnego do klasy $|u_k(t)| = 1$, $k = 1,2,3$. Jest to chyba najcenniejszy wniosek z zasady minimum, ponieważ pozostałe warunki konieczne podają jedynie odpowiednie ograniczenia i warunki transwersalności. Mając to na uwadze określamy następujący zbiór sterowań Ω_0.

$$\Omega_p = \left\{ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.58}$$

Przystąpimy teraz do konstrukcji pewnej struktury obliczeń sterowań suboptymalnych na maszynie cyfrowej. Ustalmy przede wszystkim pewien minimal-



Uproszczona sieć działań wyznaczania sterowań suboptymalnych ny czas przełączania Δt dla składowych sterowania $u_k(t)$ $(k = 1,2,3)$ układu dynamicznego (3.8) lub (3.13)

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left[x(t)\right] + B(t)u(t)$$

o warunku początkowym $x(o) = 0$.
Weźmy pod uwagę ciąg chwil czasowych $(t_o, t_1, \ldots, t_k)$ gdzie $t_l = l\Delta t$ $(l = 0,1,2,\ldots,k)$
Będziemy poszukiwali takich sterowań $u(t_l) \in \Omega_o$, dla których całka

$$\int_{t_l}^{t_{l+1}} L\left[x(t)\right] dt$$

będzie minimalna. Obliczenia będziemy przeprowadzali do takiej chwili t_k, że $x(t_k) \in S_1$. Uproszczona sieć działań tego obliczenia przedstawiona jest na niżej podanym schemacie. Obliczenia przeprowadzono dla kilku wariantów.

Wariant 1

Przyjęto, że

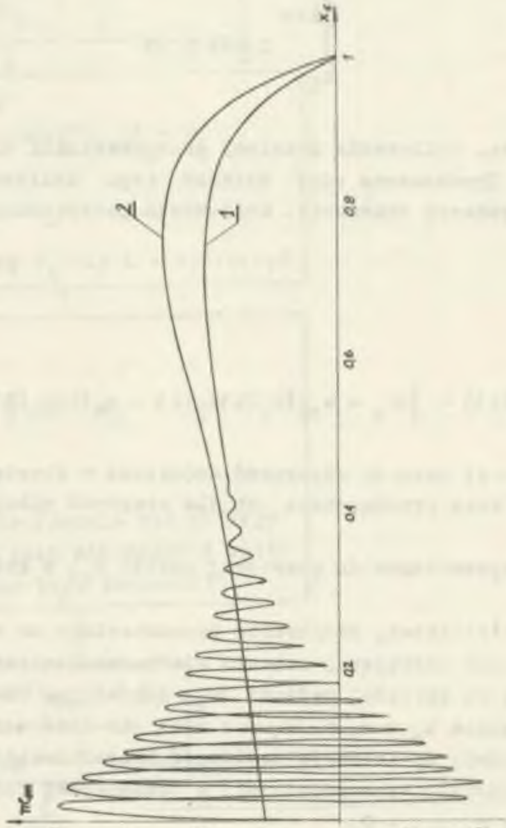
$$L\left[x(t)\right] = \left[\mathcal{M}_z - a_{12}(x_2(t)x_3(t) - x_1(t)x_4(t))\right]^2 ,$$

przy czym $\mathcal{M}_z = 2$; oraz że odporność dodatkowa w obwodzie wirnika $R_{2dod} = 0$. Minimalny czas przełączania Δt dla sterowań suboptymalnych założono $\Delta t = 32\,\mu s$.
Obliczenia przeprowadzono do pierwszej chwili t_k, w której $x_5(t_k) = \omega = 0{,}04$.

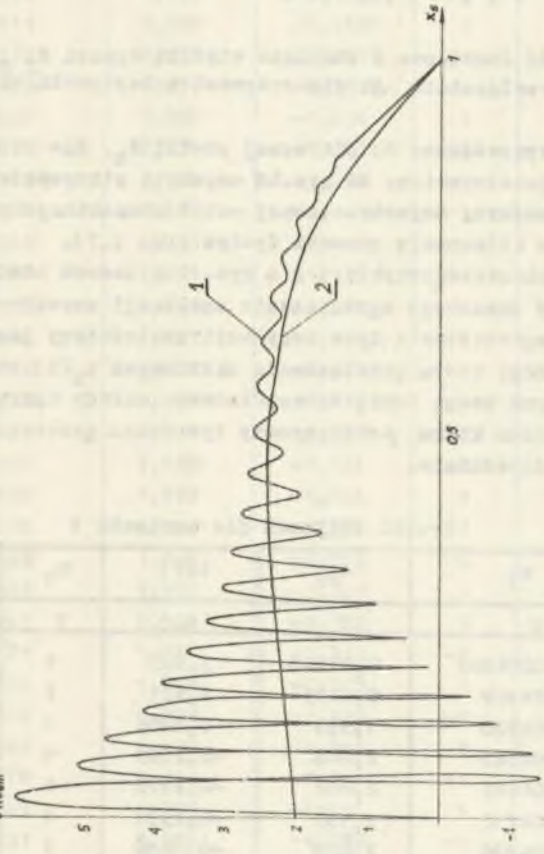
Jak wynika z obliczeń, sterowanie przedstawione na rys. 3.4 zapewnia wystarczająco małe odstępstwo momentu elektromechanicznego $\mathcal{M}_{em}$ maszyny asynchronicznej od wartości zadanej $\mathcal{M}_z$. Porównując charakterystyki momentu dla sterowania $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ oraz dla sterowania suboptymalnego z rys. 3.3 widzimy, że istnieje możliwość kształtowania momentu elektromechanicznego maszyny asynchronicznej w początkowej fazie rozruchowej nawet wówczas gdy $R_{2\,dod} = 0$.

Wariant 2

W przeciwieństwie do wariantu 1 przyjęto $R_{2\,dod} = 0{,}1\left[\Omega\right]$. Przy sterowaniu $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ dodatkowy opór w obwodzie wirnika powoduje wzrost amplitud oraz zmalenie częstotliwości oscylacji momentu elektromechanicznego (por. rys. 3.1 i 3.2). Sterowanie suboptymalne przedstawione na rys. 3.6 również z wystarczającą dokładnością utrzymuje moment elektromechaniczny



Rys. 3.1. Charakterystyki momentów elektromechanicznych maszyny asynchronicznej:
1 – dynamiczna, przy sterowaniu $u_1 = u_2 = u_3 = 1$; 2 – statyczna tj. dla $\frac{dx}{dt} = 0$ oraz $R_{2\,dod} = 0$



Rys. 3.2. Charakterystyki momentów elektromechanicznych maszyny asynchronicznej:

1 – dynamiczna, przy sterowaniu $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ oraz $R_{2\,dod} = 0{,}1$ 2-statyczna tj. dla $\frac{dx}{dt} = 0$ oraz $R_{2\,dod} = 0{,}1\Omega$

wokół wartości zadanej $\mathcal{M}_z$. Porównująo charakterystyki 1 i 2 z rys. 3.5 dochodzimy do wniosku, że niezależnie od tego czy włączyliśmy opór w obwód wirnika czy też zwarliśmy go istnieje możliwość kształtowania momentu elektromechanicznego maszyny asynchronicznej w początkowej fazie rozruchowej.

Wariant 3

Przyjęto, że

$$L[x(t)] = \left[\frac{d(1-x_5(t))}{c_2x_5^2(t)-c_1x_5(t)+c_0} - a_{12}(x_2(t)x_3(t)-x_1(t)x_4(t))\right]^2$$

oraz że oporność dodatkowa w obwodzie wirnika wynosi $R_{2\,dod} = 0,1[\Omega]$. Minimalny czas przełączania Δt dla sterowań suboptymalnych założono $\Delta t = 160\ \mu S$.

Obliczenia przeprowadzono do pierwszej chwili t_k, dla której $x_5(t_k) = 0,3$.

Sterowanie przedstawione na rys.3.8 zapewnia utrzymanie momentu elektromechanicznego maszyny asynchronicznej wokół charakterystyki statycznej z dokładnością do kilkunastu procent (patrz rys. 3.7).

Porównanie charakterystyk 1 i 2 z rys. 3.7 nasuwa nam wniosek, że istnieje możliwość znacznego ograniczenia oscylacji momentu elektromechanicznego. Stopień ograniczenia tych oscylacji uzależniony jest przede wszystkim od minimalnego czasu przełączania składowych $u_k(t)$ sterowania dla $k = 1,2,3$. Biorąc pod uwagę fakt, że współczesne układy tyrystorowe mają czas przełączania około kilku μs otrzymamy tym samym granicę możliwości technicznej w tej dziedzinie.

Wyniki obliczeń dla wariantu 1

t	x_5	$\mathcal{M}_{em}$	i(t)	u_1	u_2	u_3
1	2	3	4	5	6	7
1.00	0,00004802	0,07248	3,929	1	1	1
2.00	0,001169	0,8055	3,121	1	1	1
2.77	0,004520	1,991	–0,1856	1	–1	–1
2.78	0,004583	2,008	–0,2359	1	1	1
2.79	0,004647	2,000	–0,2176	–1	1	1
2.80	0,004710	1,995	–0,2339	1	–1	–1
2.82	0,004836	2,008	–0,3010	1	1	1
2.83	0,004899	2,000	–0,2745	–1	1	–1
2.84	0,004963	1,996	–0,2908	1	–1	–1
2.86	0,005089	2,010	–0,3585	1	1	1
2.87	0,005152	2,000	–0,3302	–1	1	–1
2.88	0,005216	1,997	–0,3465	1	–1	–1
2.91	0,005405	2,009	–0,4310	1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
2.92	0,005468	1,999	-0,4005	-1	1	-1
2.93	0,005531	1,996	-0,4169	1	-1	-1
2.97	0,005784	2,009	-0,5179	1	1	1
2.98	0,005847	1,997	-0,4849	-1	1	-1
2.99	0,005910	1,996	-0,5012	1	-1	-1
3.00	0,005973	1,995	-0,5174	1	-1	-1
3.03	0,006100	1,994	-0,5642	1	-1	1
3.12	0,006731	2,001	-0,8661	1	-1	-1
3.17	0,007048	1,992	-0,9054	-1	1	1
3.18	0,007111	1,996	-0,9401	1	-1	1
3.20	0,007237	2,002	-0,9899	1	-1	-1
3.23	0,007427	1,991	-0,9978	-1	1	1
3.24	0,007490	1,996	-1,034	1	-1	1
3.26	0,007617	2,004	-1,085	1	-1	-1
3.28	0,007743	1,990	-1,077	-1	1	1
3.29	0,007806	1,996	-1,115	1	-1	1
3.30	0,007869	2,001	-1,129	1	-1	-1
3.33	0,008059	1,991	-1,135	-1	1	1
3.34	0,008123	1,998	-1,174	1	-1	1
3.35	0,008186	2,003	-1,188	1	-1	-1
3.37	0,008312	1,989	-1,179	-1	1	1
3.38	0,008375	1,997	-1,219	1	-1	1
3.39	0,008439	2,002	-1,232	1	-1	-1
3.41	0,008565	1,988	-1,224	-1	1	1
3.42	0,008628	1,997	-1,264	1	-1	1
3.43	0,008692	2,003	-1,277	1	-1	-1
3.45	0,008818	1,989	-1,268	-1	1	1
3.46	0,008881	1,999	-1,309	1	-1	1
3.47	0,008945	2,006	-1,322	1	-1	-1
3.49	0,009071	1,992	-1,313	-1	1	1
3.50	0,009135	1,998	-1,325	1	-1	-1
3.53	0,009325	1,991	-1,329	-1	1	1
3.54	0,009388	1,998	-1,341	1	-1	-1
3.57	0,009578	1,991	-1,344	-1	1	1
3.58	0,009641	1,999	-1,356	1	-1	-1
3.61	0,009831	1,992	-1,359	-1	1	1
3.62	0,009894	2,000	-1,370	1	-1	-1
3.64	0,01002	1,985	-1,361	-1	1	1
3.65	0,01008	2,000	-1,404	1	1	1
3.66	0,01015	2,008	-1,415	1	-1	-1
3.67	0,01021	1,986	-1,395	-1	-1	1
3.68	0,01027	2,000	-1,438	1	1	1
3.69	0,01034	2,007	-1,447	1	1	-1

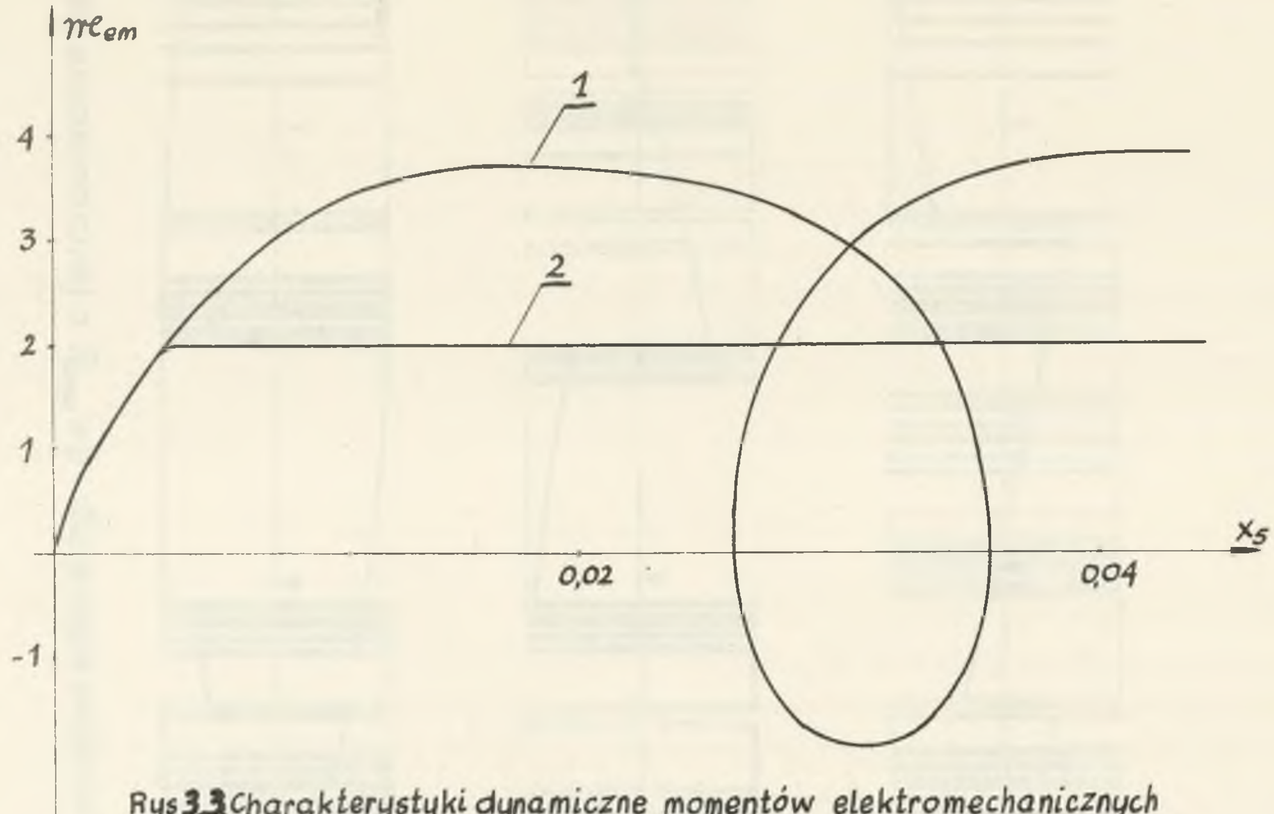
1	2	3	4	5	6	7
3.70	0,01040	1,986	−1,429	−1	−1	1
3.71	0,01046	1,999	−1,470	1	1	1
3.72	0,01053	2,006	−1,478	1	1	−1
3.74	0,01065	1,992	−1,469	−1	−1	1
3.75	0,01072	2,000	−1,479	1	−1	−1
3.76	0,01078	2,006	−1,485	1	1	−1
3.78	0,01091	1,992	−1,476	−1	−1	1
3.79	0,01097	2,000	−1,485	1	−1	−1
3.80	0,01103	2,004	−1,489	1	1	−1
3.82	0,01116	1,990	−1,480	−1	−1	1
3.83	0,01122	1,999	−1,489	1	−1	−1
3.84	0,01129	2,001	−1,491	1	1	−1
3.89	0,01160	1,993	−1,486	−1	−1	1
3.90	0,01167	2,002	−1,494	1	−1	−1
3.91	0,01173	2,002	−1,494	1	1	−1
3.97	0,01211	2,005	−1,514	1	1	1
3.98	0,01217	2,002	−1,510	1	1	−1
4.00	0,01230	1,996	−1,500	1	1	−1
4.01	0,01236	2,003	−1,531	1	1	1
4.02	0,01242	1,999	−1,524	1	1	−1
4.04	0,01255	2,001	−1,547	1	1	1
4.05	0,01261	1,996	−1,539	1	1	−1
4.06	0,01268	2,002	−1,567	1	1	1
4.07	0,01274	1,996	−1,558	1	1	−1
4.08	0,01280	2,002	−1,586	1	1	1
4.09	0,01287	1,995	−1,576	1	1	−1
4.10	0,01293	2,000	−1,602	1	1	1
4.12	0,01306	1,998	−1,629	−1	−1	1
4.13	0,01312	2,002	−1,653	1	1	1
4.14	0,01318	1,996	−1,655	−1	−1	1
4.15	0,01325	1,999	−1,679	1	1	1
4.17	0,01337	1,997	−1,705	−1	−1	1
4.18	0,01344	2,000	−1,727	1	1	1
4.20	0,01356	1,999	−1,753	−1	−1	1
4.21	0,01363	2,000	−1,773	1	1	1
4.23	0,01375	1,999	−1,799	−1	−1	1
4.24	0,01382	2,000	−1,818	1	1	1
4.26	0,01394	1,999	−1,843	−1	−1	1
4.27	0,01401	1,999	−1,861	1	1	1
4.29	0,01413	1,999	−1,885	−1	−1	1
4.33	0,01438	1,999	−1,925	1	1	1
4.34	0,01445	2,001	−1,935	−1	−1	1
4.35	0,01451	1,998	−1,948	1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
4.36	0,01457	2,001	-1,959	-1	-1	1
4.37	0,01464	1,998	-1,971	1	1	1
4.38	0,01470	2,001	-1,982	-1	-1	1
4.39	0,01476	1,998	-1,993	1	1	1
4.40	0,01483	2,002	-2,006	-1	-1	1
4.41	0,01489	1,997	-2,016	1	1	1
4.42	0,01495	2,002	-2,014	1	-1	-1
4.43	0,01502	1,997	-2,023	1	1	1
4.44	0,01508	2,002	-2,021	1	-1	-1
4.45	0,01514	1,996	-2,028	1	1	1
4.46	0,01521	2,000	-2,026	1	-1	-1
4.48	0,01533	1,998	-2,030	1	1	1
4.49	0,01540	2,002	-2,027	1	-1	-1
4.50	0,01546	1,995	-2,008	-1	-1	-1
4.51	0,01552	1,998	-2,005	1	-1	-1
4.53	0,01565	1,996	-1,984	-1	-1	-1
4.54	0,01571	1,999	-1,981	1	-1	-1
4.56	0,01584	1,997	-1,961	-1	-1	-1
4.57	0,01590	2,000	-1,957	1	-1	-1
4.59	0,01603	1,998	-1,939	-1	-1	-1
4.60	0,01609	2,000	-1,935	1	-1	-1
4.62	0,01622	1,999	-1,918	-1	-1	-1
4.63	0,01628	2,000	-1,913	1	-1	-1
4.65	0,01641	2,000	-1,897	-1	-1	-1
4.66	0,01647	2,001	-1,891	1	-1	-1
4.67	0,01653	1,999	-1,882	-1	-1	-1
4.68	0,01660	2,000	-1,876	1	-1	-1
4.70	0,01672	2,000	-1,863	-1	-1	-1
4.71	0,01679	2,000	-1,856	1	-1	-1
4.73	0,01691	2,000	-1,844	-1	-1	-1
4.74	0,01698	2,000	-1,837	1	-1	-1
4.76	0,01710	2,001	-1,826	-1	-1	-1
4.77	0,01717	2,000	-1,819	1	-1	-1
4.79	0,01729	2,001	-1,809	-1	-1	-1
4.80	0,01736	1,999	-1,801	+1	-1	-1
4.82	0,01748	2,001	-1,792	-1	-1	-1
4.83	0,01755	1,999	-1,784	1	-1	-1
4.84	0,01761	2,003	-1,784	-1	-1	-1
4.85	0,01767	2,001	-1,775	+1	-1	-1
4.87	0,01780	2,003	-1,769	-1	-1	-1
4.88	0,01786	2,000	-1,759	1	-1	-1
4.90	0,01799	2,003	-1,754	-1	-1	-1
4.91	0,01805	1,999	-1,744	1	-1	-1

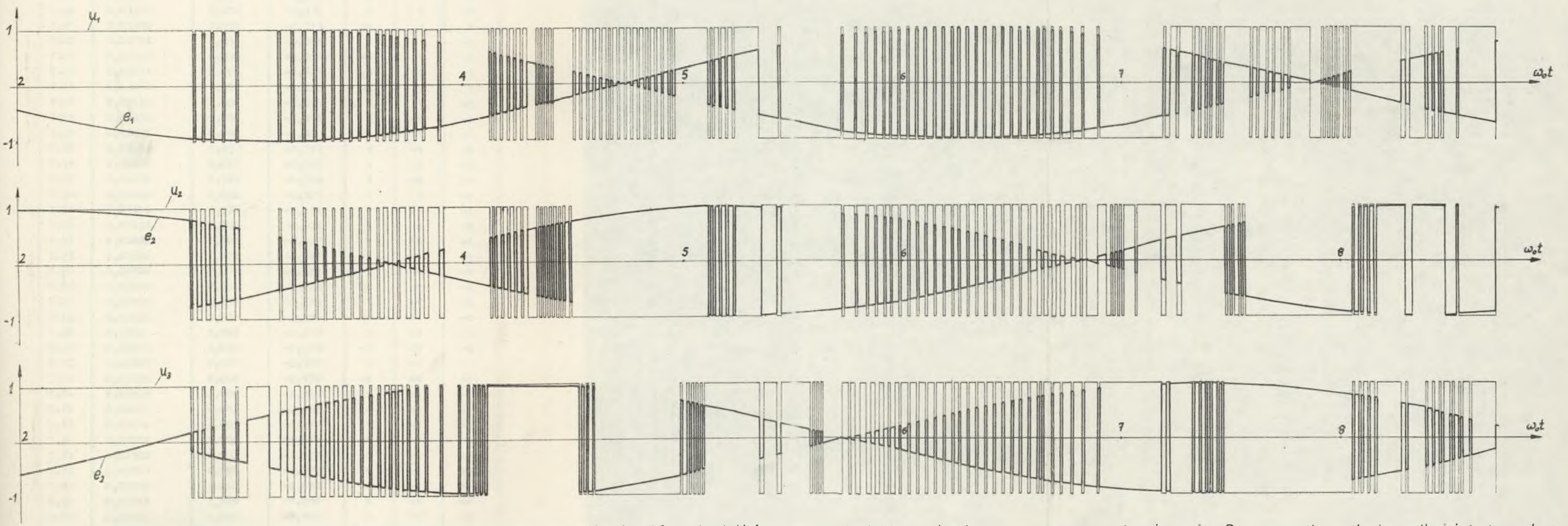
1	2	3	4	5	6	7
4.93	0,01818	2,002	−1,739	−1	−1	−1
4.94	0,01824	1,998	−1,729	1	−1	−1
4.95	0,01831	2,006	−1,736	−1	−1	−1
4.96	0,01837	2,001	−1,725	1	−1	−1
4.98	0,01850	2,005	−1,729	1	−1	1
4.99	0,01856	1,999	−1,718	1	−1	−1
5.00	0,01862	1,993	−1,707	1	−1	−1
5.01	0,01868	2,001	−1,720	1	−1	1
5.02	0,01875	1,995	−1,708	1	−1	−1
5.03	0,01881	2,003	−1,721	1	−1	1
5.04	0,01887	1,996	−1,709	1	−1	−1
5.05	0,01894	2,003	−1,721	1	−1	1
5.06	0,01900	1,996	−1,708	1	−1	−1
5.07	0,01906	2,002	−1,719	1	−1	1
5.08	0,01913	1,995	−1,707	1	−1	−1
5.09	0,01919	2,000	−1,717	1	−1	1
5.11	0,01932	1,999	−1,727	−1	1	1
5.12	0,01838	2,004	−1,736	1	−1	1
5.13	0,01944	1,996	−1,738	−1	1	1
5.14	0,01951	2,001	−1,745	1	−1	1
5.16	0,01963	1,998	−1,754	−1	1	1
5.17	0,01970	2,001	−1,760	1	−1	1
5.19	0,01982	1,998	−1,768	−1	1	1
5.20	0,01989	2,001	−1,773	1	−1	1
5.22	0,02001	1,997	−1,780	−1	1	1
5.23	0,02008	1,998	−1,783	1	−1	1
5.34	0,02077	2,012	−1,814	−1	−1	−1
5.35	0,02083	1,999	−1,804	−1	1	−1
5.36	0,02090	1,996	−1,809	−1	1	1
5.42	0,02128	2,013	−1,865	−1	−1	−1
5.43	0,02134	1,998	−1,846	1	−1	−1
5.44	0,02140	1,997	−1,997	−1	1	1
5.57	0,02222	1,999	−1,932	−1	1	−1
5.58	0,02229	2,000	−1,939	−1	1	1
5.59	0,02235	1,998	−1,940	−1	1	−1
5.60	0,02241	2,000	−1,948	−1	1	1
5.61	0,02248	1,998	−1,950	−1	1	−1
5.62	0,02254	2,001	−1,958	−1	1	1
5.63	0,02260	2,000	−1,961	−1	1	−1
5.72	0,02317	1,989	−1,981	1	−1	1
5.73	0,02324	1,993	−1,990	−1	1	1
5.75	0,02336	2,003	−2,007	−1	1	−1
5.76	0,02342	2,007	−2,016	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
5.78	0,02355	1,991	−2,002	1	−1	−1
5.79	0,02361	1,997	−2,012	−1	1	−1
5.80	0,02368	2,003	−2,021	−1	1	1
5.83	0,02387	1,992	−2,016	1	−1	−1
5.84	0,02393	2,000	−2,029	−1	1	−1
5.85	0,02399	2,006	−2,038	−1	1	1
5.87	0,02412	1,990	−2,024	1	−1	−1
5.88	0,02418	2,000	−2,038	−1	1	−1
5.89	0,02425	2,007	−2,048	−1	1	1
5.91	0,02437	1,990	−2,034	1	−1	−1
5.92	0,02444	2,002	−2,050	−1	1	−1
5.93	0,02450	2,009	−2,060	−1	1	1
5.94	0,02456	1,985	−2,035	1	−1	−1
5.95	0,02463	1,999	−2,052	−1	1	−1
5.96	0,02469	2,006	−2,062	−1	1	1
5.98	0,02482	1,990	−2,048	1	−1	−1
5.99	0,02488	1,997	−2,058	−1	1	1
6.00	0,02494	2,005	−2,069	−1	1	1
6.02	0,02507	1,988	−2,054	1	−1	−1
6.03	0,02513	1,996	−2,065	−1	1	1
6,06	0,02532	1,988	−2,060	1	−1	−1
6.07	0,02539	1,996	−2,071	−1	1	1
6.10	0,02558	1,988	−2,067	1	−1	−1
6.11	0,02564	1,997	−2,078	−1	1	1
6.14	0,02583	1,988	−2,074	1	−1	−1
6.15	0,02589	1,997	−2,085	−1	1	1
6.18	0,02608	1,989	−2,081	1	−1	−1
6.19	0,02615	1,998	−2,091	−1	1	1
6.22	0,02634	1,990	−1,087	1	−1	−1
6.23	0,02640	1,999	−2,098	−1	1	1
6.25	0,02653	1,983	−2,083	1	−1	−1
6.26	0,02659	1,992	−2,094	−1	1	1
6.29	0,02678	1,984	−2,090	1	−1	−1
6.30	0,02684	1,993	−2,101	−1	1	1
6.33	0,02703	1,986	−2,097	1	−1	−1
6.34	0,02709	1,995	−2,108	−1	1	1
6.37	0,02728	1,987	−2,103	1	−1	−1
6.38	0,02735	1,996	−2,114	−1	1	1
6.41	0,02754	1,988	−2,110	1	−1	−1
6.42	0,02760	1,997	−2,120	−1	1	1
6.45	0,02779	1,989	−2,116	1	−1	−1
6.46	0,02785	1,998	−2,126	−1	1	1
6.49	0,02804	1,990	−2,121	1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
6.50	0,02811	1,998	−2,132	−1	1	1
6.53	0,02830	1,990	−2,126	1	−1	−1
6.54	0,02836	1,998	−2,136	−1	1	1
6.57	0,02855	1,989	−2,131	1	−1	−1
6.58	0,02861	1,997	−2,141	−1	1	1
6.61	0,02880	1,988	−2,135	1	−1	−1
6.62	0,02887	2,001	−2,152	−1	−1	1
6.63	0,02893	2,161	−2,161	−1	1	1
6.64	0,02899	1,984	−2,136	1	−1	−1
6.65	0,02906	1,997	−2,151	−1	−1	1
6.66	0,02912	2,004	−2,161	−1	1	−1
6.69	0,02931	1,997	−2,158	−1	−1	1
6.70	0,02937	2,004	−2,167	−1	1	1
6.72	0,02950	1,987	−2,152	1	−1	−1
6.73	0,02956	1,996	−2,163	−1	−1	1
6.74	0,02962	2,002	−2,172	−1	1	1
6.77	0,02982	1,991	−2,165	1	−1	−1
6.78	0,02988	1,997	−2,174	−1	−1	1
6.79	0,02994	2,003	−2,182	−1	1	1
6.81	0,03007	2,013	−2,198	−1	−1	1
6.82	0,03013	1,991	−2,175	1	1	−1
6.83	0,03019	1,996	−2,182	−1	1	1
6.84	0,03026	2,000	−2,189	−1	−1	1
6.89	0,03057	1,990	−2,190	1	1	−1
6.90	0,03064	1,994	−2,196	−1	1	1
6.93	0,03083	2,001	−2,212	−1	−1	1
6.95	0,03095	2,002	−2,220	−1	1	1
6.96	0,03102	2,000	−2,220	−1	−1	1
6.97	0,03108	2,002	−2,226	−1	1	1
6.98	0,03114	1,999	−2,226	−1	−1	1
6.99	0,03121	2,001	−2,232	−1	1	1
7.00	0,03127	1,997	−2,230	−1	−1	1
7.01	0,03133	1,999	−2,236	−1	1	1
7.06	0,03165	1,996	−2,252	−1	−1	1
7.07	0,03171	1,997	−2,256	−1	1	1
7.19	0,03247	2,016	−2,232	−1	−1	−1
7.20	0,0325[illegible]	2,000	−2,304	1	−1	−1
7.21	0,03260	1,997	−2,306	−1	1	1
7.23	0,03272	1,991	−2,305	1	1	−1
7.26	0,03291	2,014	−2,321	−1	−1	−1
7.27	0,03297	2,000	−2,303	1	−1	−1
7.28	0,03304	1,999	−2,301	1	1	−1
7.33	0,03335	1,997	−2,301	−1	1	1



Rys 3.3 Charakterystyki dynamiczne momentów elektromechanicznych maszyny asynchronicznej dla małych prędkości kątowych x_5;
1 – przy sterowaniu $u_1=u_2=u_3=1$ oraz $R_{2dod}=0$,
2 – przy sterowaniu suboptymalnym dla zagadnienia 1 (rys 4).



Rys 3.4. Sterowanie suboptymalne o minimalnym czasie przełączania $\Delta t = 32 \mu s$, kształtujące moment elektromechaniczny maszyny asynchronicznej o $R_{2dod} = 0$ dla małych prędkości kątowych $x_5 = \omega$.

1	2	3	4	5	6	7
7.34	0,03342	1,999	−2,302	1	1	−1
7.36	0,03354	1,996	−2,304	−1	1	1
7.37	0,03361	2,000	−2,307	1	1	−1
7.39	0,03373	1,997	−2,310	−1	1	1
7.40	0,03380	2,002	−2,314	1	1	−1
7.41	0,03386	1,994	−2,313	−1	1	1
7.42	0,03392	2,001	−2,318	1	1	−1
7.44	0,03405	1,999	−2,322	−1	1	1
7.45	0,03411	2,006	−2,329	1	1	−1
7.46	0,03418	1,997	−2,327	−1	1	1
7.47	0,03424	2,006	−2,334	1	1	−1
7.48	0,03430	1,996	−2,319	1	−1	−1
7.49	0,03437	2,006	−2,328	1	1	−1
7.50	0,03443	1,997	−2,313	1	−1	−1
7.51	0,03449	2,007	−2,322	1	1	−1
7.52	0,03456	1,999	−2,308	1	−1	−1
7.54	0,03468	2,002	−2,305	1	1	−1
7.55	0,03475	1,995	−2,291	1	−1	−1
7.56	0,03481	2,008	−2,302	1	1	−1
7.57	0,03487	2,001	−2,289	1	−1	−1
7.59	0,03500	2,008	−2,282	+1	−1	−1
7.60	0,03506	2,001	−2,270	1	−1	−1
7.62	0,03519	2,008	−2,262	−1	−1	−1
7.63	0,03525	2,003	−2,250	1	−1	−1
7.66	0,03544	2,003	−2,229	−1	−1	−1
7.67	0,3550	1,999	−2,218	1	−1	−1
7.69	0,03563	2,004	−2,208	−1	−1	−1
7.70	0,03569	2,001	−2,197	1	−1	−1
7.73	0,03588	2,002	−2,176	−1	−1	−1
7.74	0,03595	2,000	−2,166	1	−1	−1
7.76	0,03607	2,004	−2,153	−1	−1	−1
7.77	0,03614	2,002	−2,144	1	−1	−1
7.86	0,03671	2,002	−2,070	−1	−1	−1
7.91	0,03702	2,002	−2,027	1	−1	−1
7.92	0,03709	1,999	−2,027	−1	−1	−1
7.93	0,03715	2,002	−2,010	1	−1	−1
7.94	0,03721	1,999	−1,998	1	−1	−1
7.95	0,03728	2,002	−1,992	1	−1	−1
7.96	0,03734	1,998	−1,979	+1	−1	−1
7.97	0,03747	1,996	−1,960	−1	−1	−1
7.99	0,03753	2,001	−1,955	1	−1	−1
8.00	0,03759	2,006	−1,951	1	−1	−1
8.01	0,03766	1,998	−1,935	−1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
8.02	0,03772	2,004	−1,931	1	−1	−1
8.03	0,03778	1,996	−1,914	−1	−1	−1
8.04	0,03785	2,001	−1,911	1	−1	−1
8.05	0,03791	1,993	−1,914	1	1	1
8.06	0,03797	1,999	−1,910	1	−1	−1
8.08	0,03810	1,999	−1,912	1	1	1
8.09	0,03816	2,006	−1,909	1	−1	−1
8.10	0,03822	2,001	−1,915	1	1	1
8.12	0,03835	2,003	−1,919	1	−1	−1
8.13	0,03841	1,999	−1,926	1	1	1
8.15	0,03854	2,004	−1,932	1	−1	−1
8.16	0,03860	2,001	−1,941	1	1	1
8.27	0,03930	2,009	−2,063	−1	1	−1
8.29	0,03943	1,991	−2,047	1	−1	1
8.30	0,03949	2,002	−2,048	1	−1	−1
8.31	0,03955	2,002	−2,052	−1	1	−1
8.38	0,04000	2,004	−2,088	1	1	1
8.39	0,04006	2,000	−2,089	−1	1	−1
8.41	0,04019	2,006	−2,110	1	1	1
8.42	0,04025	2,000	−2,109	−1	1	−1
8.44	0,04038	2,005	−2,130	1	1	1

Wyniki obliczeń dla wariantu 2

t	x_5	$\mathcal{M}_{en}$	i(t)	u_1	u_2	u_3
1	2	3	4	5	6	7
1.00	0,0001068	0,1580	2,530	1	1	1
2.00	0,002375	1,573	2,280	1	1	1
2.18	0,003392	2,003	1,613	1	1	−1
2.19	0,003455	2,002	1,602	−1	1	−1
2.25	0,003835	2,001	1,557	−1	1	1
2.26	0,003898	2,000	1,549	−1	1	−1
2.28	0,004025	2,001	1,546	−1	1	1
2.29	0,004088	1,999	1,541	−1	1	−1
2.30	0,004151	2,001	1,546	−1	1	1
2.31	0,004214	1,999	1,541	−1	1	−1
2.32	0,004278	2,000	1,547	−1	1	1
2.34	0,00440[illegible]	1,999	1,549	−1	1	−1
2.35	0,004467	1,999	1,556	−1	1	1
2.35	0,004467	1,999	1,556	−1	1	1
2.47	0,005224	2,015	1,576	1	1	−1
2.48	0,005288	1,996	1,560	1	−1	1
2.49	0,005351	1,992	1,568	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
2.52	0,005540	2,016	1,529	1	1	−1
2.53	0,005603	1,998	1,511	1	−1	1
2.54	0,005666	1,992	1,520	−1	1	1
2.57	0,005855	2,014	1,483	1	1	−1
2.58	0,005919	1,998	1,463	1	−1	1
2.59	0,005982	1,990	1,473	−1	1	1
2.61	0,006108	2,018	1,429	1	1	−1
2.62	0,006171	2,002	1,407	1	−1	1
2.63	0,006234	1,993	1,417	−1	1	−1
2.65	0,006361	2,020	1,374	1	1	1
2.66	0,006424	2,006	1,351	1	−1	1
2.67	0,006487	1,996	1,364	−1	1	−1
2.69	0,006614	2,022	1,322	1	1	1
2.70	0,006677	2,009	1,297	1	−1	1
2.71	0,006741	1,997	1,312	−1	1	−1
2.72	0,006804	1,986	1,290	1	−1	−1
2.73	0,006867	2,023	1,235	1	1	1
2.74	0,006931	2,010	1,247	−1	1	1
2.75	0,006994	1,999	1,225	1	−1	−1
2.78	0,007183	2,017	1,126	1	1	1
2.79	0,007247	2,002	1,139	−1	1	1
2.80	0,007310	1,993	1,117	1	−1	−1
2.82	0,007436	2,023	1,040	1	1	1
2.83	0,007500	2,006	1,053	−1	1	1
2.84	0,007563	1,999	1,032	1	−1	−1
2.88	0,007815	2,018	0,9119	1	1	1
2.89	0,007879	2,000	0,9364	−1	1	−1
2.90	0,007942	1,996	0,9554	1	−1	−1
2.95	0,008256	2,019	0,7757	1	1	1
2.96	0,008320	1,998	0,8037	−1	1	−1
2.97	0,008383	1,996	0,7831	1	−1	−1
3.00	0,008572	1,992	0,7220	1	−1	−1
3.10	0,009203	2,002	0,5070	1	−1	1
3.15	0,009520	1,984	0,3967	−1	1	−1
3.16	0,009583	1,989	0,3782	1	−1	−1
3.19	0,009772	2,006	0,3032	1	−1	1
3.22	0,009963	1,986	0,2661	−1	1	−1
3.23	0,01003	1,993	0,2483	1	−1	−1
3.24	0,01009	2,001	0,2092	1	−1	1
3.27	0,01028	1,983	0,1722	−1	1	−1
3.28	0,01034	1,992	0,1324	1	−1	1
3.29	0,01041	2,002	0,1155	1	−1	−1
3.23	0,01060	1,986	0,1012	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
3.33	0,01066	·1,997	0,05053	1	(1	1
3.34	0,01072	2,008	0,04415	1	−1	−1
3.36	0,01085	1,982	0,04728	−1	1	1
3.37	0,01091	1,995	0,005967	1	−1	1
3.38	0,01098	2,007	−0,009947	1	−1	−1
3.40	0,01110	1,981	−0,006246	−1	1	1
3.41	0,01116	1,996	−0,04814	1	−1	1
3.42	0,01123	2,009	−0,06356	1	−1	−1
3.44	0,01136	1,983	−0,05929	−1	1	1
3.45	0,01142	1,999	−0,1017	1	−1	1
3.46	0,01148	2,013	−0,1166	1	−1	−1
3.47	0,01154	1,973	−0,09702	−1	1	1
3.48	0,01161	2,001	−0,1185	1	1	−1
3.49	0,01167	2,016	−0,1331	1	−1	−1
3.50	0,01173	1,976	−0,1136	−1	1	1
3.51	0,01180	2,002	−0,1337	1	1	−1
3.52	0,01186	2,018	−0,1481	1	−1	−1
3.53	0,01192	1,977	−0,1287	−1	1	1
3.54	0,01199	2,002	−0,1475	1	1	−1
3.55	0,01205	2,018	−0,1615	1	−1	−1
3.56	0,01211	1,976	−0,1423	−1	1	1
3.57	0,01218	2,000	−0,1596	1	1	−1
3.58	0,01224	2,017	−0,1734	1	−1	−1
3.59	0,01230	1,974	−0,1543	−1	1	1
3.60	0,01237	2,000	−0,2009	1	1	1
3.61	0,01243	2,017	−0,2142	1	−1	−1
3.62	0,01249	1,974	−0,1952	−1	1	1
3.63	0,01256	1,999	−0,2408	1	1	1
3.64	0,01262	2,017	−0,2536	1	−1	−1
3.65	0,01268	1,973	−0,2346	−1	1	1
3.66	0,01274	1,996	−0,2792	1	1	1
3.67	0,01281	2,014	−0,2913	1	1	−1
3.68	0,01287	1,971	−0,2730	−1	−1	1
3.69	0,01293	1,995	−0,3175	1	−1	1
3.70	0,01300	2,012	−0,3280	1	1	−1
3.72	0,01312	1,987	−0,3213	−1	−1	1
3.73	0,01319	2,001	−0,3305	1	1	−1
3.75	0,01331	1,976	−0,3237	−1	−1	1
3.76	0,01338	2,002	−0,3683	1	−1	1
3.77	0,01344	2,014	−0,3754	1	1	−1
3.78	0,01350	1,977	−0,3612	−1	−1	1
3.79	0,01357	1,997	−0,3718	1	−1	−1
3.80	0,01363	2,008	−0,3774	1	1	−1

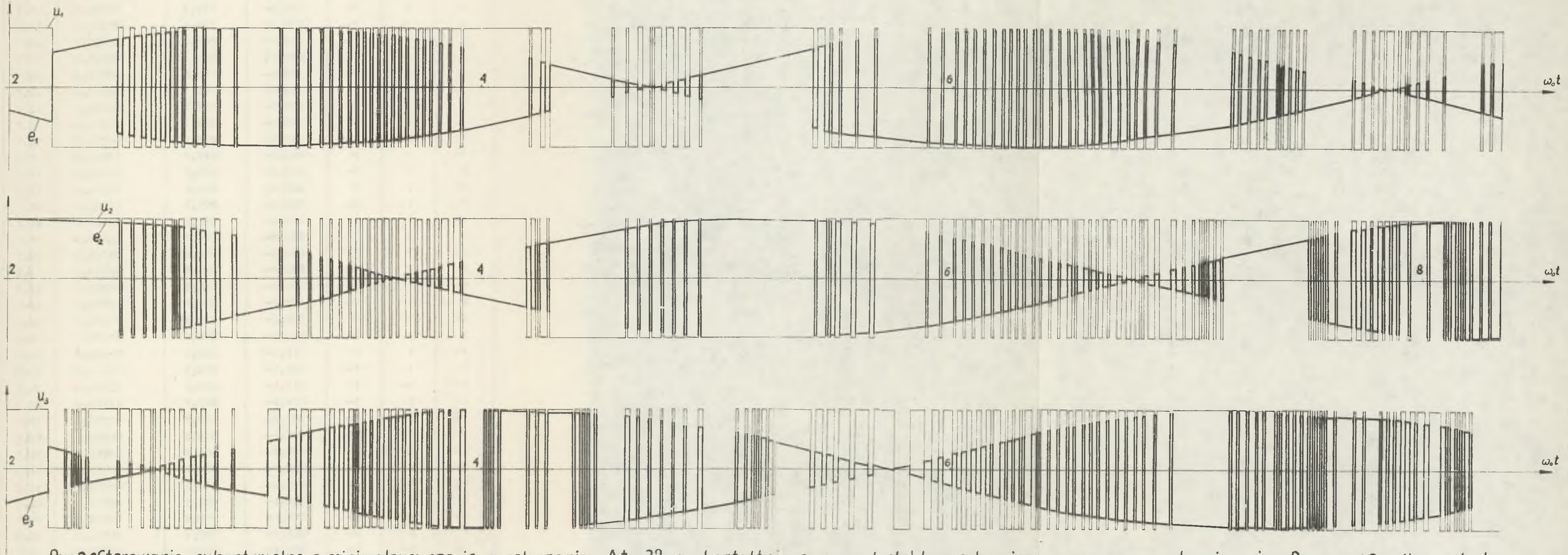
1	2	3	4	5	6	7
3.82	0,01376	1,983	−0,3702	−1	−1	1
3.83	0,01382	1,998	−0,4088	1	1	1
3.84	0,01388	2,006	−0,4123	1	1	−1
3.86	0,01401	1,981	−0,4047	−1	−1	1
3.87	0,01407	2,002	−0,4142	1	−1	−1
3.88	0,01414	2,008	−0,4157	1	1	−1
3.91	0,01433	1,987	−0,4091	−1	−1	1
3.92	0,01439	1,998	−0,4433	1	1	1
3.93	0,01445	2,000	−0,4432	1	1	−1
4.00	0,01490	1,996	−0,4229	1	1	−1
4.01	0,01496	2,002	−0,4544	1	1	1
4.02	0,01502	1,998	−0,4490	1	1	−1
4.03	0,01509	2,003	−0,4794	1	1	1
4.04	0,01515	1,998	−0,4729	1	1	−1
4.05	0,01521	2,001	−0,5024	1	1	1
4.07	0,01534	1,997	−0,5231	1	1	−1
4.08	0,01440	1,999	−0,5510	1	1	1
4.19	0,01610	2,010	−0,8006	+1	−1	−1
4.20	0,01616	2,001	−0,8042	−1	−1	1
4.21	0,01622	1,995	−0,8247	1	1	1
4.23	0,01635	2,010	−0,8464	1	−1	−1
4.24	0,01641	2,002	−0,8652	1	1	1
4.25	0,01648	1,997	−0,8709	−1	−1	+1
4.27	0,01660	2,012	−0,8780	1	−1	−1
4.28	0,01667	2,002	−0,8946	1	1	1
4.29	0,01673	1,999	−0,9020	−1	−1	1
4.39	0,01736	1,996	−0,9617	−1	−1	−1
4.40	0,01742	2,001	−0,9737	−1	−1	1
4.42	0,01755	1,998	−0,9629	−1	−1	−1
4.43	0,01761	2,005	−0,9761	−1	−1	1
4.44	0,01768	1,999	−0,9541	−1	−1	−1
4.45	0,01774	2,007	−0,9683	−1	−1	1
4.46	0,01780	2,001	−0,9474	−1	−1	−1
4.48	0,01793	2,007	−0,9427	−1	−1	1
4.49	0,01799	2,003	−0,9235	−1	−1	−1
4.55	0,01837	2,007	−0,8332	1	−1	−1
4.56	0,01844	2,007	−0,8183	−1	−1	−1
4.61	0,01875	1,984	−0,7649	1	1	1
4.62	0,01882	2,004	−0,7870	−1	−1	1
4.63	0,01888	2,008	−0,7761	−1	−2	−1
4.66	0,01907	1,986	−0,7534	1	1	1
4.67	0,01913	1,996	−0,7480	1	−1	−1
4.68	0,01920	2,004	−0,7401	−1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
4.71	0,01839	1,984	−0,7206	1	1	1
4.72	0,01945	1,994	−0,7150	−1	−1	−1
4.73	0,01951	2,003	−0,7087	1	−1	−1
4.76	0,01970	1,984	−0,6911	−1	1	1
4.77	0,01977	1,997	−0,6884	−1	−1	−1
4.78	0,01983	2,005	−0,6813	1	−1	−1
4.81	0,02002	1,985	−0,6632	−1	1	1
4.82	0,02008	2,000	−0,6633	−1	−1	−1
4.83	0,02015	2,006	−0,6554	1	−1	−1
4.86	0,02034	1,984	−0,6368	−1	1	1
4.87	0,02040	2,003	−0,6398	−1	−1	−1
4.88	0,02046	2,007	−0,6311	1	−1	−1
4.92	0,02072	1,986	−0,6031	−1	1	1
4.93	0,02078	2,004	−0,6208	1	−1	1
4.94	0,02085	2,006	−0,6111	1	−1	−1
5.00	0,02123	2,009	−0,5505	1	−1	−1
5.08	0,02173	2,007	−0,4858	1	−1	1
5.09	0,02180	2,004	−0,4742	1	−1	−1
5.12	0,02199	2,004	−0,4607	1	−1	1
5.13	0,02205	1,999	−0,4485	1	−1	−1
5.15	0,02218	2,001	−0,4449	1	−1	1
5.16	0,02224	1,995	−0,4323	1	−1	−1
5.17	0,02230	2,002	−0,4401	1	−1	1
5.18	0,02237	1,994	−0,4272	1	−1	−1
5.19	0,02243	2,000	−0,4341	1	−1	1
5.21	0,02256	1,997	−0,4270	1	−1	−1
5.22	0,02262	2,002	−0,4324	1	−1	1
5.24	0,02274	1.996	−0,4235	1	−1	−1
5.25	0,02281	1,999	−0,4275	1	−1	1
5.40	0,02376	2,025	−0,4618	−1	−1	−1
5.41	0,02382	2,002	−0,4565	−1	1	−1
5.42	0,02388	1,994	−0,4520	1	−1	1
5.45	0,02407	2,029	−0,4739	1	−1	−1
5.46	0,02414	2,008	−0,4709	−1	1	−1
5.47	0,02420	1,998	−0,4640	1	−1	1
5.48	0,02426	1,987	−0,4721	−1	1	1
5.50	0,02439	2,031	−0,5142	−1	−1	−1
5.51	0,02445	2,010	−0,4960	1	−1	−1
5.52	0,02451	2,001	−0,5045	−1	1	1
5.57	0,02483	2,025	−0,5754	−1	−1	−1
5.58	0,02489	2,002	−0,5561	1	−1	−1
5.59	0,02496	1,995	−0,5651	−1	1	1
5.65	0,02533	2,029	−0,6495	−1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
5.66	0,02540	2,003	−0,6288	1	−1	−1
5.67	0,02546	1,999	−0,6383	−1	1	1
5.76	0,02603	1,985	−0,7255	−1	1	−1
5.83	0,02647	2,001	−0,8031	−1	1	1
5.89	0,02685	1,982	−0,8296	1	−1	−1
5.90	0,02691	1,991	−0,8451	−1	1	−1
5.92	0,02704	2,006	−0,8712	−1	1	1
5.95	0,02723	1,980	−0,8673	1	−1	−1
5.96	0,02729	1,994	−0,8851	−1	1	−1
5.97	0,02735	2,000	−0,8955	−1	1	1
6.00	0,02754	2,021	−0,9268	−1	1	1
6.01	0,02761	1,983	−0,9019	1	−1	−1
6.02	0,02767	2,000	−0,9219	−1	1	−1
6.03	0,02773	2,008	−0,9325	−1	1	1
6.05	0,02786	1,978	−0,9178	1	−1	−1
6.06	0,02792	1,998	−0,9393	−1	1	−1
6.07	0,02799	2,006	−0,9499	−1	1	1
6.09	0,02811	1,976	−0,9351	1	−1	−1
6.10	0,02818	1,998	−0,9580	−1	1	−1
6.11	0,02824	2,008	−0,9686	−1	1	1
6.13	0,02837	1,978	−0,9536	1	−1	−1
6.14	0,02843	2,003	−0,9779	−1	1	−1
6.15	0,02849	2,013	−0,9885	−1	1	1
6.17	0,02862	1,982	−0,9733	1	−1	−1
6.18	0,02868	1,994	−0,9839	−1	1	1
6.21	0,02887	1,974	−0,9792	1	−1	−1
6.22	0,02893	2,004	−1,006	−1	1	−1
6.23	0,02900	2,016	−1,017	−1	1	1
6.24	0,02906	1,973	−0,9908	1	−1	−1
6.25	0,02912	2,005	−1,019	−1	1	−1
6.26	0,02919	2,017	−1,029	−1	1	1
6.27	0,02925	1.974	−1,003	1	−1	−1
6.28	0,02931	2,008	−1,032	−1	1	−1
6.29	0,02938	2,020	−1,042	−1	1	1
6.30	0,02944	1,977	−1,016	1	−1	−1
6.31	0,02950	1,990	−1,027	−1	1	1
6.34	0,02969	1,973	−1,021	1	−1	−1
6.35	0,02976	2,010	−1,052	−1	1	−1
6.36	0,02982	2,023	−1,062	−1	1	1
6.37	0,02988	1,979	−1,036	1	−1	−1
6.38	0,02995	1,993	−1,047	−1	1	1
6.41	0,03014	1,976	−1,041	1	−1	−1
6.42	0,03020	1,990	−1,051	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
6.65	0,03039	1,974	−1,045	1	−1	−1
6.46	0,03045	1,989	−1,055	−1	1	1
6.49	0,03064	1,972	−1,049	1	−1	−1
6.50	0,03070	2,008	−1,069	−1	−1	1
6.51	0,03077	2,022	−1,079	−1	1	1
6.52	0,03083	1,977	−1,053	1	−1	−1
6.53	0,03089	1,992	−1,063	−1	1	1
6.56	0,03108	1,975	−1,056	1	−1	−1
6.57	0,03115	2,006	−1,074	−1	−1	1
6.58	0,03121	2,021	−1,084	−1	1	1
6.59	0,03127	1,975	−1,058	1	−1	−1
6.60	0,03134	2,004	−1,075	−1	−1	1
6.61	0,03140	2,019	−1,084	−1	1	1
6.62	0,03146	1,973	−1,059	1	−1	−1
6.63	0,03153	1,999	−1,074	−1	−1	1
6.64	0,03159	2,014	−1,083	−1	1	1
6.66	0,03172	1,983	−1,067	1	−1	−1
6.67	0,03178	1,997	−1,07	−1	1	1
6.70	0,03197	1,980	−1,068	1	−1	−1
6.71	0,03203	2,001	−1,080	−1	−1	1
6.72	0,03210	2,015	−1,088	−1	1	1
6.74	0,03222	1,983	−1,071	1	−1	−1
6.75	0,3229	2,001	−1,082	−1	−1	1
6.76	0,03235	2,015	−1,090	−1	1	1
6.78	0,03248	1,983	−1,073	1	−1	−1
6.79	0,03254	1,998	−1,081	−1	−1	1
6.80	0,03260	2,011	−1,089	−1	1	1
6.81	0,03267	2,024	−1,096	−1	−1	1
6.82	0,03273	1,980	−1,073	1	1	−1
6.83	0,03279	1,993	−1,080	−1	1	1
6.84	0,03286	2,004	−1,086	−1	−1	1
6.87	0,03305	1,982	−1,076	1	1	−1
6.88	0,0331	1,994	−1,083	−1	1	1
6.89	0,03317	2,001	−1,086	−1	−1	1
6.94	0,03349	1,984	−1,078	1	1	−1
6.95	0,03355	1,995	−1,084	−1	1	1
6.96	0,0336[illegible]	1,996	−1,085	−1	−1	1
6.99	0,0338[illegible]	2,006	−1,089	−1	1	1
7.00	0,03387	2,003	−1,088	−1	−1	1
7.03	0,03406	2,005	−1,088	−1	1	1
7.04	0,03412	1,999	−1,085	−1	−1	1
7.06	0,03425	2,001	−1,085	−1	1	1
7.07	0,03431	1,993	−1,080	−1	−1	1

Rys 3.5 Charakterystyki dynamiczne momentów elektromechanicznych maszyny asynchronicznej dla mały prędkości kątowych x_s;
1 - przy sterowaniu $u_1 = u_2 = u_3 = 1$, dla $R_{2dod} = 0{,}1\Omega$,
2 - przy sterowaniu suboptymalnym dla zagadnienia 1 (rys 6).



Rys.3.6. Sterowanie suboptymalne o minimalnym czasie przełączania $\Delta t = 32 \mu s$, kształtujące moment elektromechaniczny maszyny asynchronicznej o $R_{2dod} = 0{,}1 \Omega$ dla małych prędkości kątowych $x_5 = \omega$

1	2	3	4	5	6	7
7.08	0,03438	2,001	−1,085	−1	1	1
7.09	0,03444	1,991	−1,079	−1	−1	1
7.10	0,03450	1,999	−1,083	−1	1	1
7.12	0,03463	1,994	−1,079	−1	−1	1
7.13	0,03469	2,001	−1,083	−1	1	1
7.15	0,03482	1,992	−1,078	−1	−1	1
7.16	0,03488	1,999	−1,081	−1	1	1
7.19	0,03507	1,995	−1,081	1	1	−1
7.20	0,03514	2,001	−1,084	−1	1	1
7.22	0,03526	1,993	−1,082	1	1	−1
7.23	0,03533	1,997	−1,084	−1	1	1
7.26	0,03551	1,996	−1,086	1	1	−1
7.27	0,03558	1,999	−1,087	−1	1	1
7.30	0,03577	1,998	−1,089	1	1	−1
7.31	0,03583	2,000	−1,090	−1	1	1
7.33	0,03596	1,998	−1,092	1	1	−1
7.34	0,03602	1,999	−1,092	−1	1	1
7.38	0,03627	2,000	−1,096	1	1	−1
7.39	0,03634	1,999	−1,095	−1	1	1
7.40	0,03640	2,001	−1,099	1	1	−1
7.41	0,03646	2,000	−1,099	−1	1	1
7.43	0,03659	2,002	−1,103	1	1	−1
7.44	0,03665	1,999	−1,102	−1	1	1
7.46	0,03678	2,003	−1,107	1	1	−1
7.47	0,03684	1,999	−1, 05	−1	1	1
7.49	0,03697	2,004	−1,111	1	1	−1
7.50	0,03703	2,000	−1,109	−1	1	1
7.52	0,03716	2,004	−1,116	−1	−1	−1
7.53	0,03722	1,998	−1,113	−1	1	1
7.54	0,03729	2,006	−1,122	−1	−1	−1
7.55	0,03735	2,000	−1,119	−1	1	1
7.56	0,03741	2,006	−1,126	−1	−1	−1
7.57	0,03748	1,999	−1,122	−1	1	1
7.58	0,03754	2,004	−1,129	−1	−1	−1
7.59	0,03760	1,996	−1,125	−1	1	1
7.60	0,03767	2,000	−1,130	−1	−1	−1
7.63	0,03786	1,995	−1,135	−1	1	1
7.64	0,03792	1,995	−1,138	−1	−1	−1
7.70	0,03830	2,012	−1,163	1	1	−1
7.71	0,03836	1,999	−1,156	−1	1	1
7.72	0,03842	1,993	−1,155	−1	−1	−1
7.74	0,03855	2,015	−1,172	1	1	−1
7.75	0,03861	2,001	−1,165	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
7.76	0,03868	1,992	−1,161	−1	−1	−1
7.78	0,03880	2,013	−1,177	1	1	−1
7.79	0,03887	2,001	−1,172	−1	−1	−1
7.81	0,03899	2,022	−1,188	1	1	−1
7.82	0,03906	2,001	−1,177	1	1	1
7.83	0,03912	1,986	−1,169	−1	−1	−1
7.84	0,03918	2,021	−1,192	1	1	−1
7.85	0,03925	2,002	−1,182	1	1	1
7.86	0,03931	1,985	−1,173	1	−1	−1
7.87	0,03937	2,021	−1,196	−1	1	−1
7.88	0,03944	2,001	−1,186	−1	1	1
7.89	0,03950	1,985	−1,178	1	−1	−1
7.90	0,03956	2,018	−1,199	−1	1	−1
7.91	0,03963	1,997	−1,188	−1	1	1
7.92	0,03969	1,984	−1,183	1	1	1
7.93	0,03975	2,015	−1,203	−1	1	−1

Wyniki obliczeń dla wariantu 3

t	x_5	$\mathfrak{M}_{em}$	$i(t)$	u_1	u_2	u_3
1	2	3	4	5	6	7
.10	0,0000000008232	0,00002470	0,05270	−1	−1	1
.20	0,00000001267	0,0001414	−0,1649	−1	−1	−1
.30	0,00000005470	0,0004264	−0,4081	−1	1	−1
.50	0,0000003621	0,001652	−0,6719	1	1	−1
.55	0,0000005126	0,002171	−0,6171	1	−1	−1
1.00	0,00001103	0,02193	0,06553	1	−1	1
1.35	0,00003285	0,04629	0,9516	−1	−1	1
1.40	0,00004083	0,05467	1,113	1	−1	1
1.60	0,00008591	0,08776	1,646	−1	−1	1
1.70	0,0001165	0,1060	1,747	−1	1	1
2.50	0,0006607	0,3623	1,582	1	1	1
2.70	0,0009134	0,4419	0,5570	1	1	−1
3.35	0,002239	0,8540	−1,767	1	1	1
3.70	0,003310	1,087	−3,089	1	−1	1
4.50	0,006995	1,797	−4,898	1	1	1
4.75	0,00848	1,964	−4,439	−1	1	1
4.85	0,009114	2,033	−4,205	1	1	1
4.90	0,009435	2,028	−4,288	−1	−1	1
5.00	0,01008	2,045	−4,198	1	1	1
5.05	0,01040	2,030	−4,301	−1	−1	1
5.15	0,01104	2,033	−4,190	1	1	1
5.25	0,01168	2,021	−3,831	−1	1	−1

1	2	3	4	5	6	7
5.30	0,01200	2,037	−3,594	1	1	1
5.35	0,01232	2,022	−3,492	−1	1	−1
5.40	0,01265	2,033	−3,241	1	1	1
5.45	0,01297	2,033	−3,173	−1	1	−1
5.50	0,01329	2,037	−2,910	1	1	1
5.70	0,01458	2,056	−2,130	−1	1	−1
5.75	0,01490	2,036	−1,851	1	1	−1
5.85	0,01554	2,048	−1,632	−1	1	1
5.90	0,01587	2,047	−1,375	1	1	−1
6.00	0,01635	2,032	−0,9136	1	1	1
6.05	0,01667	2,051	−0,6895	1	1	−1
6.10	0,01684	2,040	−0,6527	−1	1	1
6.20	0,01748	2,042	−0,5335	1	1	−1
6.30	0,01813	2,024	−0,6151	−1	−1	−1
6.35	0,01845	2,065	−0,8014	−1	1	−1
6.40	0,01877	2,026	−0,6997	1	−1	−1
6.45	0,01910	2,060	−0,8973	−1	1	−1
6.50	0,01942	2,041	−0,7951	1	−1	−1
6.70	0,02071	2,053	−0,7418	−1	1	−1
6.75	0,02103	2,043	−0,9758	−1	−1	−1
6.80	0,02136	2,04	−1,197	−1	1	−1
6.85	0,02168	2,042	−1,406	−1	−1	−1
6.95	0,02232	2,027	−1,813	−1	1	−1
7.00	0,02265	2,045	−1,984	−1	−1	−1
7.05	0,02297	2,063	−1,923	1	1	−1
7.10	0,02329	2,020	−2,123	−1	1	−1
7.15	0,02361	2,057	−2,259	−1	−1	−1
7.20	0,02394	2,056	−2,227	1	1	−1
7.35	0,02475	2,005	−1,974	1	−1	1
7.40	0,02507	2,076	−2,058	−1	−1	−1
7.45	0,02539	2,040	−1,800	1	−1	1
7.50	0,02556	2,081	−1,740	−1	+1	−1
7.55	0,02588	2,060	−1,502	1	−1	1
7.90	0,02798	2,059	−0,1931	−1	−1	1
7.95	0,02831	2,075	−0,06169	1	−1	1
8.15	0,02963	1,976	0,1377	−1	1	−1
8.20	0,02995	2,067	0,3293	−1	−1	1
8.25	0,03028	2,086	0,3821	1	−1	1
8.45	0,03160	1,984	0,4135	−1	1	−1
8.50	0,03192	2,028	0,3312	1	−1	−1
8.60	0,03257	2,058	0,2186	1	−1	1
8.70	0,03322	2,053	0,08932	1	−1	−1
8.95	0,03482	2,146	−0,03755	−1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
9.00	0,03515	2,061	0,05397	−1	1	−1
9.05	0,03547	1,996	−0,07489	1	−1	1
9.10	0,03578	1,941	0,001462	−1	1	1
9.15	0,03611	2,125	0,2468	−1	−1	−1
9.20	0,03644	2,074	0,3719	−1	1	−1
9.25	0,03676	2,048	0,4389	−1	1	1
9.55	0,03870	2,075	0,9179	−1	1	−1
9.75	0,40003	1,980	1,160	1	−1	1
9.80	0,04035	2,040	1,198	−1	1	1
9.95	0,04134	1,956	1,143	1	1	−1
10.00	0,04166	2,044	1,340	−1	−1	−1
10.05	0,04198	2,087	1,343	−1	−1	1
10.20	0,04282	2,038	1,238	1	1	1
10.25	0,04314	2,060	1,381	−1	−1	−1
10.50	0,04445	2,082	1,803	−1	1	1
10.55	0,04478	2,053	1,808	1	1	−1
10.65	0,04542	2,078	1,789	−1	1	1
10.70	0,04559	2,048	1,823	−1	−1	−1
10.75	0,04591	2,067	1,779	−1	1	1
11.00	0,04755	2,057	1,511	1	1	1
11.25	0,04919	2,036	1,343	−1	1	1
11.30	0,04951	2,068	1,390	−1	1	−1
11.60	0,05132	2,023	1,517	1	−1	−1
11.70	0,05180	2,137	1,711	1	1	1
11.75	0,05213	2,063	1,667	1	−1	1
11.80	0,05246	2,057	1,681	1	−1	−1
12.00	0,05377	2,081	1,749	1	−1	1
12.05	0,05410	2,101	1,773	1	−1	−1
12.25	0,05528	2,079	1,806	−1	1	1
12.30	0,05561	2,113	1,836	1	−1	−1
12.45	0,05662	1,981	1,743	−1	1	1
12.50	0,05694	2,106	1,872	1	1	−1
12.55	0,05728	2,134	1,902	1	−1	−1
12.70	0,05829	1,991	1,806	−1	1	1
12.75	0,05861	2,057	1,893	1	1	−1
12.80	0,05894	2,065	1,918	1	−1	−1
12.90	0,05959	2,090	1,994	1	1	−1
12.95	0,05992	2,078	2,012	1	−1	−1
13.00	0,06025	2,071	2,042	1	1	−1
13.10	0,06089	2,015	2,070	1	−1	−1
13.20	0,06154	2,210	2,233	1	1	1
13.25	0,06188	2,089	2,098	−1	1	1
13.30	0,06220	2,017	2,094	1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
13.35	0,06252	1,948	2,013	−1	−1	1
13.40	0,06284	2,166	2,137	1	1	1
13.45	0,06318	2,085	2,017	−1	1	1
13.50	0,06351	2,057	1,974	−1	−1	1
13.80	0,06530	2,108	1,916	−1	1	1
14.05	0,06700	1,989	1,584	1	−1	−1
14.10	0,06732	2.088	1,683	−1	−1	1
14.15	0,06765	2,151	1,632	1	1	1
14.25	0,06833	1,989	1,542	−1	−1	−1
14.30	0,06865	2,083	1,513	−1	−1	1
14.35	0,06898	2,091	1,414	1	1	1
14.45	0,06964	2,080	1,352	1	−1	1
14.55	0,07030	2,171	1,385	−1	1	1
14.60	0,07064	2,106	1,225	1	1	1
14.70	0,07130	2,146	1.247	−1	−1	1
14.75	0,07163	2,096	1,184	−1	1	−1
15.00	0,07327	2,092	1,233	−1	−1	−1
15.20	0,07463	2,229	1,933	−1	−1	1
15.25	0,07496	2,013	1,649	1	1	−1
15.30	0,07529	2,093	1,845	−1	−1	−1
15.35	0,07562	2,112	2,011	−1	−1	1
15.60	0,07728	2,095	2,603	−1	1	1
15.85	0,07893	2,220	2,865	−1	−1	−1
15.90	0,07928	2,117	2,930	−1	−1	1
15.95	0,07961	2,038	2,936	−1	1	1
16.00	0,07994	2,248	3,117	−1	−1	−1
16.05	0,08029	2,111	3,146	−1	−1	1
16.10	0,08062	2,047	2,957	1	1	−1
16.20	0,08127	2,234	2,950	−1	−1	−1
16.25	0,08161	2,061	2,941	−1	−1	1
16.30	0,08194	2,042	2,791	1	−1	−1
16.55	0,08358	2,134	2,195	1	1	−1
16.90	0,08598	2,002	1,958	−1	−1	1
16.95	0,08631	2,124	2,114	−1	1	−1
17.00	0,08664	2,148	2,160	1	1	−1
17.30	0,08873	2,217	2,618	−1	1	−1
17.35	0,08890	2,115	2,500	1	−1	1
17.40	0,08923	2,103	2,613	1	1	−1
17.60	0,09055	2,184	2,828	−1	−1	−1
17.65	0,09089	2,129	2,967	1	1	−1
17.75	0,09156	2,189	2,915	−1	−1	−1
17.80	0,09189	2,105	3,067	1	1	−1
17.85	0,09223	2,078	2,960	1	−1	1

1	2	3	4	5	6	7
17.90	0,09256	2,162	2,735	−1	−1	−1
17.95	0,09290	2,168	2,661	1	−1	1
18.00	0,09324	2,051	2,363	−1	−1	1
18.05	0,09356	2,096	2,123	−1	−1	−1
18.35	0,09558	2,066	0,6379	−1	−1	1
18.40	0,09591	2,167	0,7117	1	−1	−1
18.45	0,09625	2,155	0,4763	−1	−1	1
18.60	0,09727	2,079	3,033	1	1	1
18.65	0,09760	2,105	0,09866	−1	−1	1
18.75	0,09827	2,111	0,06237	1	−1	−1
18.80	0,09860	2,092	0,2841	1	1	1
18.85	0,09894	2,144	0,1085	−1	−1	1
18.90	0,09928	2,154	0,3848	−1	1	1
19.00	0,09996	2,097	0,5578	−1	1	1
19.05	0,1003	2,149	0,8194	1	1	1
19.10	0,1006	2,109	0,7222	−1	1	1
19.20	0,1011	2,128	0,5355	−1	−1	1
19.25	0,1015	2,152	0,4523	−1	1	1
19.30	0,1016	2,189	0,3698	−1	−1	1
19.35	0,1020	2,253	0,2967	−1	1	1
19.40	0,1023	1,968	0,3704	1	1	−1
19.45	0,1026	2.113	0,6009	1	1	1
19.50	0,1030	2,175	0,5527	−1	−1	1
19.65	0,1040	2,018	0,5071	1	1	−1
19.70	0,1044	2,075	0,7478	1	−1	1
19.80	0,1050	2,134	0,9944	−1	−1	1
20.00	0,1062	2,101	1,112	−1	−1	1
20.10	0,1067	2,190	1,126	−1	1	1
20.15	0,1070	2,121	1,219	−1	−1	1
20.20	0,1072	2,048	1,116	1	1	−1
20.25	0,1074	1,993	1,166	1	−1	1
20.30	0,1077	2,248	1,196	1	1	1
20.35	0,1080	2,146	1,043	1	1	−1
20.40	0,1084	2,064	0,8772	−1	1	−1
20.45	0,1085	2,032	0,7556	1	1	−1
20.55	0,1090	2,265	0,6573	−1	1	1
20.60	0,1093	2,164	0,6775	1	−1	1
20.65	0,1096	2,140	0,5742	−1	1	−1
21.40	0,1147	2,015	0,4479	1	−1	1
21.45	0,1150	2,214	0,2336	1	1	−1
21.50	0,1154	2,207	0,3396	−1	1	1
21.65	0,1164	2,122	0,6872	−1	1	−1
21.80	0,117	2,196	0,7248	1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
21.85	0,1178	2,147	0,8985	−1	1	−1
21.95	0,1184	2,178	0,8115	1	1	1
22.00	0,1188	2,121	0,7333	1	−1	−1
22.05	0,1191	2,185	0,4771	1	1	1
22.10	0,1194	2,165	0,4094	1	−1	−1
22.25	0,1203	2,181	0,1158	1	1	1
22.55	0,1220	2,210	−0,8055	1	1	−1
22.60	0,1222	2,179	−0,9217	1	1	1
22.65	0,1225	2,175	−1,102	1	−1	1
22.70	0,1227	2,134	−1,188	1	1	1
22.75	0,1230	2,157	−1,150	1	1	−1
22.90	0,1241	2,186	−1,194	1	−1	1
22.95	0,1244	2,129	−1,099	1	1	−1
23.00	0,1247	2,185	−1,262	1	−1	1
23.05	0,1251	2,140	−1,053	−1	−1	−1
23.15	0,1258	2,174	−1,016	1	−1	1
23.20	0,1261	2,168	−0,8490	−1	−1	−1
23.30	0,1268	2,136	−0,7466	−1	−1	1
23.35	0,1271	2,168	−0,6244	−1	−1	−1
23.40	0,1275	2,167	−0,6945	−1	−1	1
23.60	0,1289	2,335	−1,034	1	−1	1
23.65	0,1292	2,036	−0,8277	−1	1	−1
23.70	0,1296	2,156	−0,7965	−1	−1	−1
23.75	0,1299	2,197	−0,8544	1	−1	1
23.85	0,1306	2,252	−0,8038	1	−1	−1
24.10	0,1324	2,156	−0,3888	1	−1	1
24.25	0,1334	2,261	−0,4434	−1	−1	−1
24.30	0,1337	2,170	−0,3804	1	−1	1
24.40	0,1344	2,291	−0,4518	−1	−1	−1
24.45	0,1348	2,152	−0,3518	1	−1	1
24.50	0,1351	2,022	−0,3751	−1	1	1
24.55	0,1354	2,264	−0,5432	−1	−1	−1
24.60	0,1358	2,154	−0,5654	−1	1	1
24.65	0,1361	2,065	−0,5965	−1	1	−1
24.70	0,1365	2,309	−0,7615	−1	−1	1
24.71	0,1368	2,232	−0,7826	−1	1	1
24.85	0,1375	2,146	−0,8708	−1	1	−1
25.00	0,1385	2,189	−1,117	−1	1	−1
25.05	0,1389	2,173	−1,132	−1	1	1
25.85	0,1444	2,258	−1,325	−1	−1	−1
25.90	0,1447	2,145	−1,262	−1	−1	1
25.95	0,1450	2,098	−1,239	−1	1	1
26.00	0,1454	2,202	−1,340	−1	−1	−1

1	2	3	4	5	6	7
26.05	0,1457	2,136	−1,308	−1	1	1
26.10	0,1461	2,214	−1,386	−1	−1	−1
26.15	0,1464	2,128	−1,345	−1	1	1
26.20	0,1468	2,179	−1,399	−1	−1	−1
26.30	0,1474	2,178	−1,430	1	1	−1
26.35	0,1478	2,189	−1,446	−1	−1	−1
26.55	0,1492	2,203	−1,459	1	1	−1
26.60	0,1495	2,147	−1,409	−1	−1	−1
26.65	0,1499	2,233	−1,473	1	1	−1
26.70	0,1502	2,146	−1,396	−1	−1	−1
26.75	0,1506	2,232	−1,461	−1	1	−1
26.80	0,1509	2,167	−1,393	1	−1	−1
26.85	0,1512	2,220	−1,439	−1	1	−1
26.90	0,1516	2,179	−1,381	1	−1	−1
26.95	0,1519	2,195	−1,407	−1	1	−1
27.00	0,1523	2,176	−1,359	1	−1	−1
27.20	0,1537	2,164	−1,295	1	1	1
27.25	0,1540	2,191	−1,272	1	−1	−1
27.30	0,1544	2,195	−1,343	1	1	1
27.45	0,1554	2,156	−1,445	1	−1	1
27.50	0,1557	2,198	−1,437	1	−1	−1
27.55	0,1561	2,165	−1,394	1	−1	1
27.60	0,1564	2,213	−1,393	1	−1	−1
27.61	0,1568	2,221	−1,376	1	−1	1
27.75	0,1573	2,095	−1,273	−1	1	−1
27.80	0,1577	2,195	−1,431	1	1	−1
27.85	0,1580	2,236	−1,442	1	−1	−1
28.05	0,1594	2,046	−1,320	−1	1	1
28.10	0,1598	2,208	−1,406	1	−1	1
28.15	0,1601	2,211	−1,426	1	−1	−1
28.25	0,1608	2,190	−1,555	1	1	−1
28.30	0,1612	2,161	−1,572	1	−1	−1
28.45	0,1622	2,283	−1,799	1	1	1
28.50	0,1623	2,192	−1,684	−1	−1	1
28.55	0,1627	2,097	−1,696	1	−1	−1
28.60	0,1630	2,318	−1,881	1	1	1
28.65	0,1634	2,188	−1,885	1	−1	−1
28.75	0,1639	2,341	−2,053	1	1	1
28.80	0,1643	2,158	−2,048	1	−1	−1
28.85	0,1646	2,071	−1,897	−1	1	1
28.90	0,1650	2,293	−2,063	1	−1	1
28.95	0,1653	2,218	−1,944	−1	−1	1
29.00	0,1657	2,178	−1,806	−1	1	1

1	2	3	4	5	6	7
29.25	0,1674	2,178	−1,301	−1	−1	1
29.35	0,1681	2,239	−1,197	−1	1	1
29.40	0,1684	2,223	−1,210	−1	−1	1
29.80	0,1712	2,193	−1,707	1	−1	1
29.85	0,1716	2,172	−1,805	−1	−1	1
29.95	0,1723	2,289	−1,826	1	1	1
30.00	0,1726	2,207	−1,892	1	−1	1
30.05	0,1730	2,158	−2,019	−1	−1	1
30.10	0,1733	2,275	−1,894	1	1	1
30.15	0,1737	2,207	−2,036	−1	−1	1
30.25	0,1742	2,258	−1,929	1	1	1
30.30	0,1745	2,160	−1,811	−1	1	−1
30.35	0,1749	2,234	−1,632	1	1	1
30.40	0,1752	2,172	−1,547	−1	1	−1
30.45	0,1756	2,226	−1,352	1	1	1
30.50	0,1759	2,198	−1,300	−1	1	−1
30.60	0,1766	2,207	−1,045	1	1	1
30.90	0,1787	2,241	0,001988	−1	1	1
30.90	0,1791	2,214	0,2297	1	1	−1
31.15	0,1805	2,209	0,7391	−1	1	1
31.25	0,1812	2,223	0,8065	1	1	−1
31.30	0,1815	2,168	0,6904	−1	1	1
31.35	0,1819	2,213	0,8535	1	1	−1
31.45	0,1826	2,205	0,7008	−1	−1	−1
31.50	0,1829	2,262	0,8379	1	1	−1
31.55	0,1833	2,224	0,5389	−1	−1	−1
31.65	0,1840	2,253	0,3679	1	1	−1
31.70	0,1843	2,224	0,4328	1	−1	−1
31.85	0,1854	2,241	0,2752	−1	−1	−1
31.95	0,1861	2,297	−0,2402	−1	1	−1
32.25	0,1883	2,226	−1,412	1	1	−1
32.40	0,1893	2,265	−1,549	−1	−1	−1
32.45	0,1897	2,207	−1,575	1	1	−1
32.55	0,1902	2,215	−1,533	1	−1	−1
32.60	0,1905	2,115	−1,597	1	1	−1
	0,1909	2,239	−1,677	−1	−1	−1
32.70	0,1912	2,111	−1,459	1	−1	1
32.75	0,1915	2,249	−1,519	−1	−1	−1
32.80	0,1919	2,140	−1,320	1	−1	1
32.85	0,1922	2,290	−1,359	−1	−1	−1
32.90	0,1926	2,198	−1,182	1	−1	1
33.00	0,1933	2,285	−1,033	1	−1	−1
33.05	0,1936	2,229	−0,8715	−1	−1	1

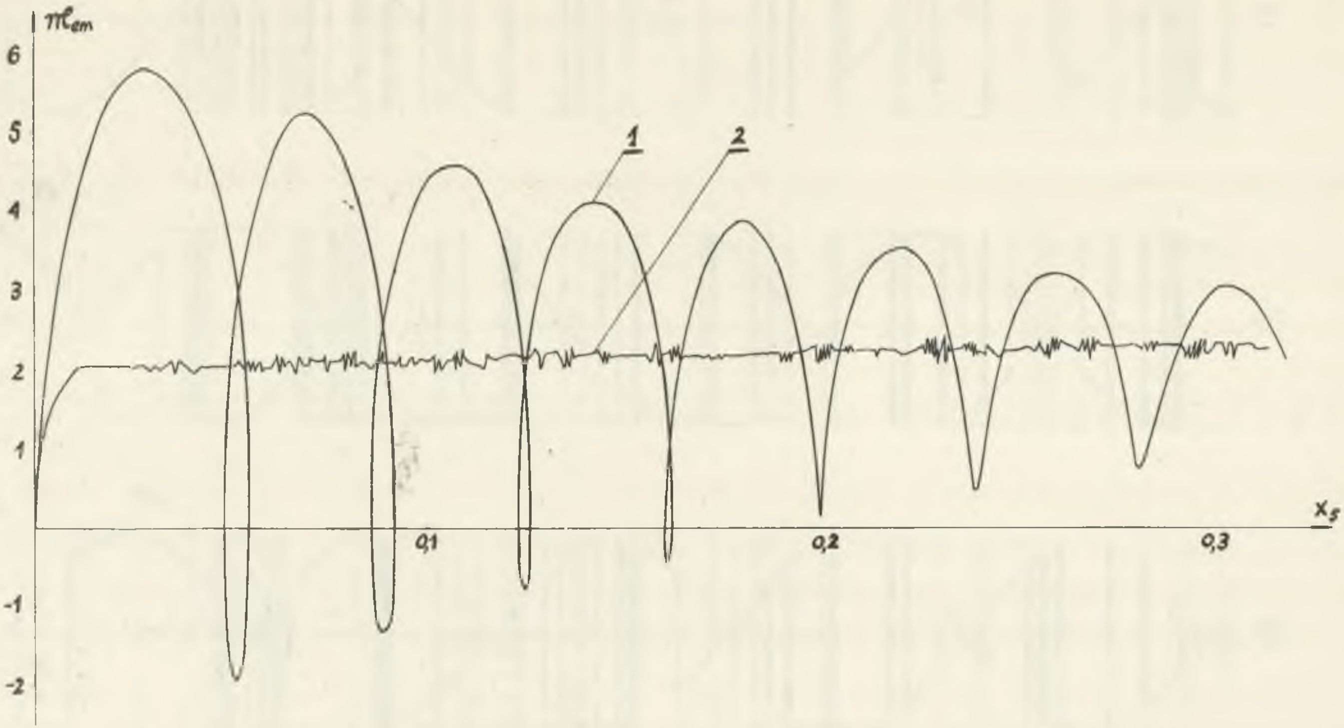
1	2	3	4	5	6	7
33.40	0,1959	2,223	0,1378	1	−1	1
33.50	0,1964	2,246	0,2915	−1	−1	1
33.55	0,1966	2,232	0,3322	1	−1	1
33.65	0,1973	2,234	0,1930	1	−1	−1
33.95	0,1994	2,301	−0,1752	−1	−1	1
34.00	0,1998	2,210	−0,2975	1	−1	−1
34.05	0,2001	2,104	−0,42244	1	−1	1
34.10	0,2005	2,277	−0,2198	−1	−1	−1
34.15	0,2008	2,148	−0,3702	1	−1	1
34.20	0,2012	2,311	−0,1590	−1	−1	−1
34.25	0,2015	2,160	−0,1171	−1	1	1
34.30	0,2019	2,317	0,09511	−1	−1	−1
34.35	0,2022	2,196	0,1308	−1	1	1
34.40	0,2026	2,345	0,3416	−1	−1	−1
34.45	0,2029	2,225	0,4467	−1	1	−1
34.50	0,2033	2,152	0,4724	−1	1	1
34.55	0,2036	2,287	0,6771	−1	−1	−1
34.60	0,2040	2,238	0,6954	−1	1	1
34.75	0,2051	2,280	0,9197	−1	−1	−1
34.08	0,2054	2,259	1,057	−1	1	−1
34.95	0,2065	2,282	1,323	−1	1	1
35.00	0,2068	2,303	1,311	−1	1	1
35.10	0,2076	2,342	1,276	−1	−1	1
35.30	0,2090	2,265	1,266	−1	−1	−1
35.45	0,2101	2,249	1,415	−1	1	1
35.75	0,2121	2,301	1,337	−1	1	−1
35.80	0,2124	2,240	1,328	1	1	−1
35.90	0,2131	2,279	1,434	−1	1	−1
35.95	0,2135	2,270	1,459	1	1	−1
36.10	0,2146	2,187	1,432	−1	1	1
36.15	0,2149	2,236	1,494	1	1	−1
36.20	0,2153	2,262	1,538	−1	1	−1
36.50	0,2174	2,299	1,696	1	1	−1
36.55	0,2178	2,267	1,696	1	1	1
37.00	0,2210	2,215	2,044	1	−1	−1
37.05	0,2213	2,263	2,141	1	1	1
37.10	0,2217	2,197	2,103	1	−1	−1
37.15	0,2220	2,265	2,214	1	1	1
37.20	0,2224	2,212	2,182	1	−1	1
37.25	0,2227	2,270	2,290	1	1	−1
37.30	0,2231	2,254	2,278	1	−1	1
37.40	0,2241	2,219	2,255	1	−1	−1
37.50	0,2245	2,283	2,284	1	−1	1

1	2	3	4	5	6	7
37.55	0,2249	2,271	2,362	1	1	−1
37.70	0,2259	2,309	2,550	1	−1	1
37.71	0,2263	2,222	2,591	1	1	−1
37.80	0,2266	2,362	2,663	1	−1	1
37.85	0,2270	2,237	2,685	1	1	−1
37.90	0,2274	2,394	2,767	1	−1	1
37.95	0,2277	2,230	2,768	1	1	−1
38.00	0,2281	2,402	2,860	1	−1	1
38.05	0,2285	2,197	2,839	1	1	−1
38.10	0,2288	2,379	2,937	1	−1	1
38.15	0,2292	2,136	2,881	1	−1	−1
38.20	0,2241	2,219	2,255	1	−1	−1
38.25	0,2299	2,077	2,781	−1	1	1
38.30	0,2302	2,268	2,892	1	−1	1
38.40	0,2310	2,256	2,803	−1	1	1
38.45	0,2314	2,434	2,916	1	−1	1
38.50	0,2317	2,257	2,775	−1	−1	1
38.55	0,2321	2,126	2,594	−1	1	1
38.60	0,2324	2,287	2,710	1	−1	1
38.65	0,2328	2,194	2,539	−1	1	1
38.70	0,2331	2,332	2,652	1	−1	1
38.75	0,2335	2,276	2,492	−1	1	1
39.00	0,2356	2,261	1,846	−1	−1	1
39.10	0,2360	2,273	1,938	1	−1	1
39.25	0,2371	2,328	2,000	−1	1	1
39.30	0,2374	2,253	2,068	−1	−1	1
39.35	0,2378	2,347	1,959	1	1	1
39.40	0,2382	2,262	2,047	−1	−1	1
39.45	0,2385	2,331	1,913	1	1	1
39.50	0,2389	2,232	2,019	−1	−1	1
39.55	0,2392	2,278	1,862	1	1	1
39.70	0,2403	2,206	1,668	−1	−1	1
39.75	0,2407	2,204	1,474	1	1	1
39.85	0,2414	2,345	1,267	−1	1	1
39.90	0,2418	2,305	1,052	1	1	1
40.00	0,2425	2,197	0,6100	1	1	1
40.05	0,2428	2,327	0,6380	−1	1	1
40.10	0,2432	2,239	0,4031	1	1	1
40.15	0,2435	2,243	0,4134	−1	1	−1
40.35	0,2450	2,198	0,2605	1	1	−1
40.40	0,2453	2,273	0,3387	−1	1	−1
40.45	0,2457	2,274	0,4I22	−1	1	1
40.60	0,2466	2,329	0,5905	−1	1	−1

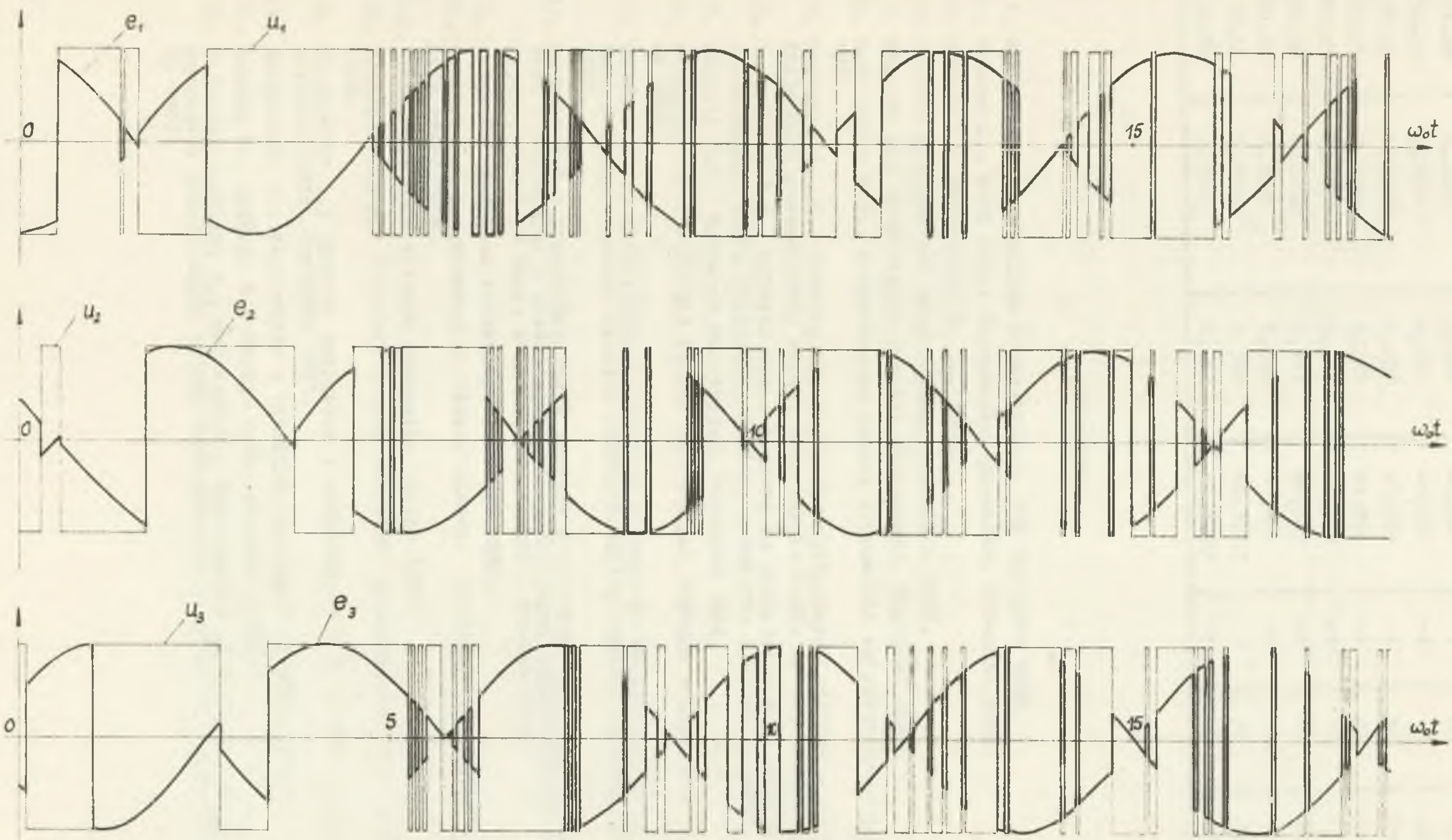
1	2	3	4	5	6	7
40.65	0,2470	2,270	0,3656	1	1	−1
40.75	0,2477	2,338	0,3154	−1	1	−1
40.80	0,2480	2,313	0,1218	1	1	−1
41.00	0,2495	2,250	−0,09413	−1	−1	−1
41.05	0,2499	2,266	−0,2279	1	1	−1
41.15	0,2506	2,271	−0,07177	−1	−1	−1
41.20	0,2509	2,291	−0,1722	1	1	−1
41.25	0,2513	2,298	0,09266	−1	1	−1
41.30	0,2517	2,281	0,02317	1	−1	−1
41.40	0,2524	2,296	−0,09308	1	1	−1
41.50	0,2531	2,300	0,1296	−1	1	−1
41.60	0,2538	2,253	0,3738	1	1	−1
41.65	0,2542	2,340	0,5760	−1	−1	−1
41.70	0,2546	2,289	0,5858	1	1	−1
41.80	0,2553	2,338	0,7780	−1	−1	−1
41.85	0,2556	2,246	0,8218	1	1	−1
41.90	0,2560	2,367	0,9661	−1	−1	−1
41.95	0,2564	2,240	1,031	1	1	−1
42.00	0,2567	2,373	1,149	−1	−1	−1
42.05	0,2571	2,208	1,234	1	1	−1
42.10	0,2575	2,351	1,324	−1	−1	−1
42.15	0,2578	2,146	1,429	1	1	−1
42.20	0,2582	2,298	1,492	−1	−1	−1
42.30	0,2589	2,256	1,363	1	−1	1
42.35	0,2593	2,420	1,391	−1	−1	−1
42.40	0,2596	2,367	1,238	−1	−1	1
42.45	0,2600	2,419	1,259	1	−1	−1
42.50	0,2604	2,289	1,099	−1	−1	1
42.60	0,2611	2,337	0,9836	1	−1	−1
42.65	0,2615	2,271	0,8128	−1	−1	1
42.75	0,2622	2,351	0,7120	1	−1	−1
42.80	0,2625	2,253	0,6709	1	−1	1
42.85	0,2629	2,269	0,4907	−1	−1	1
43.00	0,2640	2,277	0,1611	1	−1	1
43.05	0,2644	2,307	0,2745	1	−1	−1
43.30	0,2662	2,335	0,5527	−1	−1	1
43.35	0,2665	2,230	0,6811	1	−1	−1
43.40	0,2669	2,379	0,4973	−1	−1	1
43.45	0,2673	2,229	0,6340	1	−1	−1
43.50	0,2676	2,380	0,4506	−1	−1	−1
43.55	0,2680	2,204	0,6117	1	−1	1
43.60	0,2683	2,343	0,4194	−1	−1	−1
43.65	0,2687	2,140	0,6051	1	−1	1

1	2	3	4	5	6	7
43.70	0,2690	2,306	0,4509	−1	−1	1
43.75	0,2694	2,420	0,2530	−1	−1	−1
43.80	0,2698	2,210	0,2333	−1	1	1
43.85	0,2701	2,316	0,03780	−1	−1	−1
43.95	0,2709	2,316	−0,1599	−1	−1	−1
44.00	0,2712	2,347	−0,3456	−1	−1	−1
44.05	0,2716	2,237	−0,3444	−1	1	1
44.10	0,2720	2,305	−0,5224	−1	−1	−1
44.20	0,2727	2,302	−0,6778	−1	1	1
44.25	0,2731	2,342	−0,8380	−1	−1	−1
44.30	0,2734	2,305	−0,8142	−1	1	1
44.40	0,2742	2,312	−0,7791	−1	−1	1
44.45	0,2745	2,304	−0,9160	−1	−1	−1
44.50	0,2749	2,300	−0,8801	−1	−1	1
44.55	0,2753	2,294	−0,8410	−1	1	1
44.60	0,2756	2,296	−0,9707	−1	1	−1
44.65	0,2760	2,297	−0,9224	−1	1	1
44.80	0,2771	2,323	−0,9461	−1	1	−1
44.85	0,2774	2,311	−0,8830	−1	1	1
44.95	0,2782	2,338	−0,9366	−1	1	−1
41.00	0,2784	2,320	−0,9368	−1	1	−1
45.10	0,2791	2,325	−0,9611	−1	1	−1
45.15	0,2794	2,254	−0,8708	−1	1	1
45.20	0,2798	2,304	−0,9636	−1	1	−1
45.30	0,2804	2,302	−1,079	1	1	−1
45.35	0,2807	2,343	−1,145	−1	1	−1
45.40	0,2811	2,291	−1,147	1	1	−1
45.45	0,2815	2,317	−1,195	−1	1	−1
45.50	0,2816	2,311	−1,239	1	1	−1
45.60	0,2822	2,307	−1,303	−1	1	−1
45.70	0,2829	2,335	−1,360	1	1	−1
45.75	0,2833	2,280	−1,346	−1	1	−1
45.80	0,2836	2,350	−1,410	1	1	−1
45.85	0,2840	2,257	−1,373	−1	1	−1
45.90	0,2844	2,342	−1,449	1	1	−1
45.95	0,2847	2,246	−1,414	1	1	1
46.00	0,2851	2,336	−1,499	1	1	−1
46.06	0,2855	2,257	−1,488	1	1	1
46.10	0,2858	2,346	−1,580	1	1	−1
46.15	0,2862	2,283	−1,590	1	1	1
46.20	0,2864	2,324	−1,692	1	1	−1
46.25	0,2867	2,271	−1,722	1	1	1
46.30	0,2871	2,339	−1,819	1	1	−1

1	2	3	4	5	6	7
42.35	0,2875	2,300	−1,867	1	1	1
46.45	0,2880	2,318	−2,053	1	1	−1
46.50	0,2884	2,296	−2,123	1	1	1
42.55	0,2887	2,302	−2,209	1	1	−1
46.65	0,2895	2,289	−2,378	1	1	1
46.95	0,2913	2,302	−2,744	1	−1	1
47.15	0,2931	2,183	−2,786	1	1	−1
47.20	0,2935	2,265	−2,897	1	1	1
47.35	0,2946	2,125	−3,029	1	−1	−1
47.40	0,2949	2,233	−3,086	1	−1	1
47.45	0,2953	2,334	−3,180	1	1	1
47.60	0,2964	2,160	−3,099	−1	−1	1
47.65	0,2968	2,279	−3,172	1	1	1
47.70	0,2971	2,391	−3,254	1	−1	1
47.80	0,2979	2,201	−3,103	−1	1	1
47.85	0,2983	2,329	−3,154	1	1	1
47.90	0,2986	2,412	−3,239	1	−1	1
47.95	0,2990	2,193	−3,026	−1	1	1
48.00	0,2994	2,325	−3,054	1	1	1
48.05	0,2997	2,371	−3,140	1	−1	1
48.15	0,3005	2,266	−3,031	−1	1	1
48.20	0,3008	2,258	−3,112	1	−1	1
48.25	0,3012	2,373	−3,089	1	1	1
48.30	0,3016	2,317	−3,162	1	−1	1
48.35	0,3017	2,295	−3,104	−1	1	1
48.65	0,3039	2,187	−2,471	1	−1	1
48.70	0,3043	2,272	−2,369	−1	1	1
48.75	0,3047	2,348	−2,255	1	1	1
48.90	0,3056	2,151	−2,162	−1	−1	1
48.95	0,3059	2,272	−2,102	−1	1	1
49.00	0,3063	2,307	−1,941	1	1	1
49.45	0,3096	2,372	−0,5003	−1	1	1
49.50	0,3100	2,315	−0,2881	1	1	1
49.55	0,3104	2,357	−0,3468	−1	1	1
49.65	0,3111	2,304	−0,4570	−1	1	−1
49.70	0,3115	2,273	−0,5258	−1	1	1
49.75	0,3118	2,221	−0,5987	−1	1	−1
50.00	0,3135	2,013	−1,127	−1	1	−1
50.10	0,3141	1,918	−1,050	1	1	−1
50.80	0,3184	1,954	0,4169	1	−1	−1
51.20	0,3211	2,345	0,1300	−1	−1	−1
51.35	0,3222	2,379	−0,3351	1	−1	−1
51.40	0,3226	2,358	−0,5206	−1	−1	−1



Rys 3.7. Charakterystyki momentów elektromechanicznych maszyny asynchronicznej ;
1 - przy sterowaniu $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ oraz $R_{2dod} = 0{,}1\Omega$,
2 - przy sterowaniu suboptymalnym dla zagadnienia 1 o funkcjonale jakości (3.21).



Rys.3.8. Sterowanie suboptymalne o minimalnym czasie przełączania $\Delta t = 160\mu s$, kształtujące moment elektromechaniczny maszyny asynchronicznej o $R_{2dod} = 0{,}1\Omega$ dla małych prędkości kątowych $x_5 = \omega$.

1	2	3	4	5	6	7
51.85	0,3259	2,397	-1,541	1	-1	-1
52.05	0,3274	2,371	-1,763	-1	-1	-1
52.10	0,3278	2,287	-1,851	1	-1	-1
52.15	0,3281	2,329	-1,832	-1	-1	-1
52.25	0,3289	2,313	-1,652	-1	-1	1
52.30	0,3292	2,371	-1,607	-1	-1	-1
52.35	0,3296	2,351	-1,457	-1	-1	1
52.65	0,3319	2,194	-0,9302	1	-1	-1
52.70	0,3322	2,292	-0,8329	-1	-1	-1

LITERATURA

1. Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN Warszawa 1969.
2. Athans M., Falt P.L.: Sterowanie optymalne. Warszawa 1969.
3. Banach S.: Mechanika, t. II. 1947.
4. Bellman R.: Dynamic programming. Princeton 1957.
5. Bellman R.: Adaptacyjne procesy sterowania. Warszawa 1965.
6. Bołtianski W.G.: Matematyczne metody sterowania optymalnego. Warszawa 1971.
7. Butkowskij A.G.: Princip maksimuma dla optimalnych sistiem s raspriedielennymi parametrami. Awtom. Tielemiech. T.22, nr 10, 1961.
8. Dubowickij A.J., Milutin A.A.: Zadaczi na ekstriemum pri naliczii ograniczenij. Żurn. Wyczyslit. Matiem. i Matiem. Fiz. nr 3, 1965.
9. Elsgolc L.E.: Rachunek wariacyjny. Warszawa 1960.
10. Feldbaum A.A.: Podstawy teorii optymalnych układów sterowania. Warszawa 1967.
11. Gaponow A.W.: Elektromechaniczeskije sistemy so skoljaszczimi kontaktami i dinamiczeskaja teorija elektriczeskich sistem. NN ZSRR Moskwa 1952.
12. Gochman A.W.: Geometriczeskaja teorija reonomnych dinamiczeskich sistem s liniejnymi i nieliniejnymi niegołonomnymi swjazjami. Sb."2-Wsesojuzn. Zjezd po Teor. i Prikł. Mechanikie". Moskwa 1964.
13. Gołąb S.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1956.
14. Hurwicz L.: Programming in linear spaces. Stanford, Stanford University Press 1958.
14a. Hamel G.: Theoretische Mechanik, Berlin 1949.
15. Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Katowice 1969.
16. Kulikowski R.: Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej. Warszawa 1965.
17. Kulikowski R.: Sterowanie w wielkich systemach. Warszawa 1970.
18. Landau L., Lifszic E.: Teoria pola. Warszawa 1958.
19. Majerczyk-Gomułka J., Makowski K.: Wyznaczenie optymalnego sterowania procesami dynamicznymi metodą funkcjonałów Lagrange'a. Prace IPPT PAN 9, 1967.

20. Merriam III C.W.: Teoria optymalizacji i projektowania układów sterowania automatycznego. Warszawa 1967.
21. Moszyński K.: Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych na maszynach cyfrowych. Warszawa 1971.
22. Nejmark J.I., Fufajew N.A.: Dynamika układów nieholonomicznych. Warszawa 1971.
23. Nejmark J.I., Fufajew N.A.: Ob urawnienijach dwiżenija sistem s nieliniejnymi niegołonomnymi swjazjami. PMM, t. 28, wyp. 1, 1964.
24. Pontriagin L.S.,Bołtianski W.G., Gamkrelidze R.W. i Miszczenko E.F.: Matiematiczeskaja tieorija optimalnych processow. Moskwa 1961.
25. Pontriagin L.S.: Równania różniczkowe zwyczajne. Warszawa 1964.
26. Rubinowicz W., Królikowski W.: Mechanika teoretyczna. Warszawa 1955.
27. Synge J.L., Schild A.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1964.
28. Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego Warszawa 1964.
29. Thaler G.J., Pastel M.P.: Nieliniowe układy automatycznego sterowania Warszawa 1965.
30. White D.C., Woodson H.H.: Electromechanical Energy Conversion. John Wiley and Sons. New York 1959.

IDENTYFIKACJA I STEROWANIE UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO Z PUNKTU WIDZENIA KSZTAŁTOWANIA NIEKTÓRYCH CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH MASZYNY ASYNCHRONICZNEJ

Streszczenie

W pierwszej części pracy poruszono problem modelowania matematycznego układów elektromechanicznych. Wykorzystując elektrodynamikę ośrodków quasi-stacjonarnych, podano w ujęciu wariacyjnym równania d'Alemberta-Lagrange'a układów elektromechanicznych. Następnie wyeliminowano w równaniu ruchu układu reakcję więzów, wprowadzając w tym celu quasi-współrzędne.
Druga część pracy dotyczy sterowania układu elektromechanicznego. Wykorzystując zasadę minimum Pontriagina określono sterowania suboptymalne kształtując moment elektromechaniczny maszyny asynchronicznej w początkowej fazie rozruchowej.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ И УПРАВЛЕНЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННОЙ МАШИНЫ

Р е з ю м е

В первой части работы затронута проблема математического моделирования электромеханических систем. Используя между другими электродинамику сред в квазистационарном состоянии и применяя вариационные методы, получены были уравнения Доломбера - Лагранжа электромеханических систем.

В дальнийшем исключено из уравнения движения системы реакции узлов,вводя для этой цели квазикоординатные оси.

Вторая часть работы касается управления электромеханической системой.

Используя принцип минимума Понтрягина, описано суботимальное управление формирующее электромеханический момент асинхронной машины в начальном моменте пуска.

IDENTIFICATION AND CONTROLLING OF ELECTROMECHANICAL SYSTEM IN VIEW OF MODELLING SOME DYNAMIC CHARACTERISTIC OF ASYNCHRONOUS MACHINES

S u m m a r y

In the first part of the dissertation, the problem of mathematical modelling of electromechanical systems - is dealt with.

Between other things - due to electrodynamics of slow velocities centres in quasi-static approximation in wariation's comprehension - presented d'Alembert-Lagrange's equations of electromechanical systems.

Nex in the equations of system's motion eliminated reactions, introducing quasi-coordinates.

The second part of this publication concerns the controlling of electromechanical systems.

Taking advantage of the minimum Pontriagin's rule, suboptimal regulation of electromechanical torque of the asynchronous machines in early starting course - was defined.