ZESZYTY
NAUKOWE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

P. 3347/77

ELEKTRYKA

Z. 49
GLIWICE
1977

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 503

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

P. 3347/77

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI, EWA SOWA

TEORIA MOCY UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

PL ISSN 0072-4688

GLIWICE 1977

SPIS TREŚCI

1. WSTĘP 3

2. PRZEBIEGI O SKOŃCZONEJ MOCY 5

2.1. Klasyfikacja przebiegów elektrycznych 5

2.2. Uogólniona transformata Fouriera 6

2.3. Transformacja Hilberta 11

3. UOGÓLNIONA TEORIA MOCY 17

3.1. Moc czynna, bierna i pozorna 17

3.2. Przenoszenie mocy przez czwórnik liniowy 21

3.3. Moc dystorsji 25

3.4. Rozkład ortogonalny przebiegów 26

3.5. Poprawa współczynnika mocy 28

3.6. Przebiegi zespolone 31

4. PRZEBIEGI OKRESOWE I PRAWIE OKRESOWE 35

4.1. Przebiegi okresowe 35

4.2. Kompensacja mocy biernej w układach o przebiegach okresowych 41

4.3. Przebiegi prawie okresowe 43

5. ZASTOSOWANIA 45

5.1. Przebiegi okresowe 45

5.2. Pobór mocy przez układ nieliniowy o wymuszeniu sinusoidalnym 49

5.3. Współczynnik mocy układu zasilanego napięciem sinusoidalnym prostowanym 56

LITERATURA 60

STRESZCZENIA 61

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 503

BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

P. 3347/77

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI, EWA SOWA

TEORIA MOCY UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

PL ISSN 0072-4688

GLIWICE 1977

OPINIODAWCA

Prof. dr Tadeusz Puchałka

REDAKTOR NACZELNY WYDAWNICTW UCZELNIANYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Jan Bandrowski

REDAKTOR DZIAŁU

Zofia Cichowska

SEKRETARZ REDAKCJI

Jan Znamirowski

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 100+56 Ark. wyd. 3,14 Ark. druk. 4,0 Papier offsetowy kl. III 70x100, 70 g
Oddano do druku 23 10.1976 Podpis. do druku 24 01 1977 Druk ukończ. w marcu 1977
Zam. 1213/76 Cena zł 8,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

1. WSTĘP

Wprowadzenie do eksploatacji urządzeń elektrycznych o coraz większych mocach, złożonej strukturze wewnętrznej i parametrach na ogół nieliniowych postawiło w nowym świetle zadanie określenia, obliczenia i pomiaru różnego rodzaju mocy występujących w takich układach. Zagadnienie ma trzy aspekty. Po pierwsze: występujące przebiegi napięcia i prądu na zaciskach wyróżnionego układu nie są na ogół przebiegami sinusoidalnymi lub okresowymi i nie można ich także odnieść do ustalonego stanu pracy. Występujące w rzeczywistych układach przebiegi posiadają charakter złożony,często przypadkowy. Po drugie: dynamiczne zachowanie się układu na ogół nie pozwala na przeprowadzenie efektywnej analizy, tzn. takiej,która prowadzi do znalezienia zależności między przebiegami prądu i napięcia. Po trzecie: służba energetyczna stoi przed pilnym zadaniem poprawy sprawności wykorzystania energii elektrycznej dostarczonej do tych układów. Celem przedstawionej pracy jest podanie uogólnionej teorii mocy mającej zastosowanie do złożonych przebiegów i zawierającej podstawowe zależności konieczne do oceny pracy układu.

2. PRZEBIEGI O SKOŃCZONEJ MOCY

2.1. Klasyfikacja przebiegów elektrycznych

Przebiegi prądu i napięcia występujące w układach elektrycznych, niezależnie od struktury geometrycznej, rozkładu i własności parametrów elektrycznych tych układów, można uporządkować w trzech klasach przyjmując za podstawę ich własności energetyczne.

Niech $f(t)$ będzie funkcją przebiegu rzeczywistego. Przez wartość skuteczną F przebiegu $f(t)$ rozumieć będziemy wielkość:

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt}. \tag{2.01}$$

Dla wartości skutecznej F może zachodzić:

1. $F = 0$
2. $F = \text{constans} > 0$
3. $F = \infty$

Do pierwszej klasy zakwalifikujemy przebiegi, których wartość skuteczna $F = 0$, do drugiej klasy przebiegi, dla których: $0 < F < \infty$, a do trzeciej przebiegi, dla których $F = \infty$. Przebiegi należące do trzeciej klasy nie mogą wystąpić w układach rzeczywistych i zostaną pominięte w dalszych rozważaniach.

Ogólnie biorąc, przebiegi $f(t)$ mogą zawierać impulsy Diraca $\delta(t)$. Kwadrat impulsu Diraca jest niezdefiniowany i dlatego pojęcie wartości skutecznej dla tego typu przebiegów nie posiada znaczenia. W naszych rozważaniach przyjmiemy jednak zakwalifikowanie do jednej z klas przebiegu o postaci:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t-\tau_k); \quad k: |\tau_k| < T, \tag{2.02}$$

w zależności od wartości granicy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k^2. \tag{2.03}$$

Do klasy pierwszej należą przebiegi o skończonej energii. Oznacza to, że funkcja $f(t)$ przebiegu należącego do tej klasy spełnia relację:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt < \infty \tag{2.04}$$

i jest w sensie średniej zbieżności transformowalna według Fouriera. (Por. [1], str. 69).

Do drugiej klasy należą przebiegi o skończonej mocy. W szczególności przebiegi okresowe, prawie okresowe oraz przebiegi w różny sposób modulowane. Z punktu widzenia dalszych rozważań jest to podstawowa klasa przebiegów. Jest oczywiste, że przebiegi o skończonej energii są zawarte w klasie przebiegów o skończonej mocy jako ich szczególny przypadek.

2.2. Uogólniona transformata Fouriera (Por. [2], str. 150; [3], str. 240)

Niech $f(t)$ będzie funkcją przebiegu rzeczywistego o skończonej mocy. Zachodzi:

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt} \tag{2.05}$$

oraz (por. [2], str. 155):

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+t_o}^{T+t_o} f^2(t)dt}, \tag{2.06}$$

gdzie t_o jest chwilą dowolnie ustaloną.

Dla przebiegów $f(t)$ spełniających zależność (2.05) zdefiniowana jest funkcja autokorelacji:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)f(t-\tau)dt. \tag{2.07}$$

Jak widać zachodzi prosta relacja:

$$F = \sqrt{\varphi(o)} \tag{2.08}$$

(przyjmiemy, że $\varphi(\tau)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $\tau = 0$) przy czym:

$$\varphi(o) \geqslant \varphi(\tau) \tag{2.09}$$

dla każdego τ .
Funkcja $\varphi(\tau)$ jest funkcją parzystą i posiada transformatę Fouriera.

Odmiennie od $\varphi(\tau)$ funkcja $f(t)$ ogólnie biorąc nie jest transformowalna według Fouriera. Posiada jednak uogólnioną transformatę Fouriera zdefiniowaną przy pomocy relacji:

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt, \quad \varepsilon \neq o. \tag{2.10}$$

W szczególnym przypadku, gdy $f(t)$ jest transformowalna według Fouriera (np. przebieg o skończonej energii), tzn., jeżeli:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt \tag{2.11}$$

istnieje dla każdego rzeczywistego ω, to wtedy:

$$F_{\varepsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{\varepsilon}(\omega - \Omega)\, F(\Omega)\, d\Omega, \tag{2.12}$$

gdzie:

$$\Pi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{dla pozostałych wartości } x. \end{cases} \tag{2.13}$$

Zachodzi także (na podstawie (2.12)):

$$\lim_{\varepsilon \to o} \frac{F_{\varepsilon}(\omega)}{2\varepsilon} = F(\omega). \tag{2.14}$$

W dalszej części rozważań korzystać będziemy z twierdzenia N. Wienera (por. [2], str. 139 i nast.) które orzeka, że jeżeli jedna z granic:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)\, dt \tag{2.15}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} \cdot f^2(t)dt \tag{2.16}$$

istnieje to istnieje także druga granica i że są one sobie równe. Dla przebiegów o skończonej mocy mamy więc:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} f^2(t)dt. \tag{2.17}$$

Na podstawie twierdzenia Parsevala zachodzi (por. (2.10)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon t}{t^2} \cdot f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4}.$$

stąd:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon} \tag{2.18}$$

Mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin\varepsilon(t+\tau)}{t+\tau} - \frac{\sin\varepsilon t}{t}\right] f(t)e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t)e^{-j\omega t} \left[\frac{\sin\varepsilon(t+\tau)}{\sin\varepsilon t} \cdot \frac{t}{t+\tau} - 1\right] dt.$$

Czyli, dla wystarczająco małego ε :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon(t+\tau)}{t+\tau} \cdot f(t)e^{-j\omega t}\, dt \cong F_\varepsilon(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt \cong F_\varepsilon(\omega)e^{-j\omega\tau}. \tag{2.19}$$

Ważna jest intepretacja wzoru (2.19) w przypadku, gdy $f(t) = F_o$ = constans. Otrzymamy:

$$F_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot F_o\, e^{-j\omega t} dt = 2\pi F_o \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\varepsilon t}{\pi t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= 2\pi F_o \Pi_\varepsilon(\omega). \tag{2.20}$$

Dla wystarczająco małego ε :

$$\Pi_\varepsilon(\omega) \cong 2\varepsilon\delta(\omega), \tag{2.21}$$

stąd:

$$2\pi F_o \Pi_\varepsilon(\omega)\, e^{-j\omega\tau} \cong 4\pi\varepsilon F_o\, \delta(\omega)\, e^{-j\omega\tau} = 4\pi\varepsilon F_o\, \delta(\omega). \tag{2.22}$$

Niech $f(t)$ i $g(t)$ będą przebiegami rzeczywistymi o skończonej mocy. Zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot \left[f(t) + g(t-\tau) \right] e^{-j\omega t} dt \cong F_\varepsilon(\omega) + G_\varepsilon(\omega)\, e^{-j\omega\tau} \tag{2.23}$$

oraz (por. (2.18), (2.06)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t) dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g^2(t-\tau)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G_\varepsilon(\omega)|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}. \tag{2.24}$$

Wykażemy, że:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\, g(t-\tau)\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\omega) G_\varepsilon^*(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega}{4\pi\varepsilon}. \tag{2.25}$$

Istotnie, na podstawie nierówności Schwarza:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt \cdot \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g^2(t-\tau)\, dt \geqslant \left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\, g(t-\tau)\, dt\right|^2$$

co oznacza, że granica stojąca po lewej stronie relacji (2.25) istnieje. Na podstawie twierdzenia Wienera (por. (2.17)) mamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[f(t) + g(t-\tau)\right]^2 dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\varepsilon t}{t^2} \left[f(t) + g(t-\tau)\right]^2 dt.$$

Czyli (por. (2.18)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[f(t) + g(t-\tau)\right]^2 dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|F_\varepsilon(\omega) + G_\varepsilon(\omega)\, e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{4\pi\varepsilon}.$$

Stąd, uwzględniając (2.24) oraz fakt, że dla transformat funkcji rzeczywistych:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\varepsilon(\omega)\, G_\varepsilon^*(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega}{4\pi\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_\varepsilon^*(\omega)\, G_\varepsilon(\omega)\, e^{-j\omega\tau}\, d\omega}{4\pi\varepsilon}$$

otrzymamy relację (2.25).

Połóżmy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)g(t-\tau)dt, \tag{2.26}$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)e^{-j\omega t}\, dt. \tag{2.27}$$

Funkcja $\vartheta(\tau)$ jest funkcją korelacji wzajemnej przebiegów $f(t)$ i $g(t)$, a $\Theta(\omega)$ jest jej transformatą Fouriera.

Na podstawie (2.25):

$$\Theta(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F_\varepsilon(\omega)\, G_\varepsilon^*(\omega)}{4\pi\varepsilon}. \tag{2.28}$$

W szczególnym przypadku, gdy $g(t) = f(t)$ zachodzi:

$$\Phi(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left|F_\varepsilon(\omega)\right|^2}{4\pi\varepsilon}, \tag{2.29}$$

gdzie (por. (2.07)):

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t}\, dt. \tag{2.30}$$

Z relacji (2.28) oraz (2.29), otrzymamy:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\, d\omega \tag{2.31}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)\, d\omega \tag{2.32}$$

2.3. Transformacja Hilberta

Rozważmy całkę:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau, \tag{2.33}$$

gdzie $h(t)$ jest przebiegiem o skończonej energii a $f(t)$ przebiegiem o skończonej mocy.

Wykażemy, że:

$$g(t) \text{ jest przebiegiem o skończonej mocy,} \tag{2.34}$$

$$\Phi_g(\omega) = \Phi(\omega) \left|H(\omega)\right|^2, \tag{2.35}$$

$$\Theta(\omega) = \Phi(\omega)\, H^*(\omega). \tag{2.36}$$

na podstawie założenia mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)dt \leqslant M < \infty \tag{2.37}$$

Stąd:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\lambda)\ f(t-\tau)\ f(t-\lambda)d\tau d\lambda\right\} dt$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\tau)h(\lambda)\varphi(\tau-\lambda)\ d\tau\ d\lambda \leqslant \varphi(o)M \quad \text{(por. (2.09))}$$

co kończy dowód stwierdzenia (2.34).
Zachodzi:

$$\varphi g(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)h(t-\tau)\ dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)f(t-\lambda)\ d\lambda\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-\tau-x)dx\right\} dt$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)h(x)\varphi(\tau+x-\lambda)\ d\lambda dx$$

$$\Phi_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)h(x)\varphi(\tau+x-\lambda)d\lambda\ dx\right\} d\tau$$

$$= \Phi(\omega)H(\omega)H^*(\omega).$$

Podobnie:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)g(t-\tau)\ dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-\tau-x)dx\right\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) f(t-\tau-x)\, dt \right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(\tau+x)\, dx$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(\tau+x)\, dx \right\} d\tau$$

$$= \Phi(\omega) H^*(\omega).$$

Przyjmijmy:

$$h(t) = -\frac{1}{\pi t} \tag{2.39}$$

Otrzymamy (por. (2.33)):

$$g(t) = H\left\{f(t)\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d}{\tau - t}. \tag{2.40}$$

Funkcję $H\left\{f(t)\right\}$ nazywamy transformatę Hilberta funkcji $f(t)$. Na podstawie stwierdzenia (2.34) $H\left\{f(t)\right\}$ jest przebiegiem o skończonej mocy. Łatwo wyprowadzić następujące relacje:

$$H\left\{H\left\{f(t)\right\}\right\} = -f(t) \tag{2.41}$$

$$H\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} = j\, e^{j\omega_0 t}, \quad \omega_0 > 0 \tag{2.42}$$

$$H\left\{\delta(t)\right\} = -\frac{1}{\pi t} \tag{2.43}$$

$$H\left\{F_0\right\} = 0. \tag{2.44}$$

Z relacji (2.44) wynika, że jeżeli $f(t)$ jest przebiegiem zawierającym składową stałą, tzn. jeżeli:

$$f(t) = F_0 + f_1(t) \tag{2.45}$$

to:

$$H\left\{f(t)\right\} = H\left\{f_1(t)\right\}. \tag{2.46}$$

Zachodzi:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{1}{\pi t} \right] e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega t - j\sin\omega t}{t} dt$$

$$H(\omega) = j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega t}{t} dt = j \operatorname{sgn}\omega \tag{2.47}$$

gdzie:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{gdy } x > 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ -1, & \text{gdy } x < 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

Oznaczmy przez $\Phi_H(\omega)$ transformatę Fouriera funkcji autokorelacji przebiegu $H\{f(t)\}$ a przez $\Theta_H(\omega)$ transformatę Fouriera funkcji korelacji wzajemnej przebiegów $f(t)$ oraz $H\{f(t)\}$.
Otrzymamy (por. (2.35), (2.36)):

$$\Phi_H(\omega) = |\operatorname{sgn}\omega|^2 \Phi(\omega) = \begin{cases} \Phi(\omega), & \text{gdy } \omega \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } \omega = 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

$$\Theta_H(\omega) = (-j) \operatorname{sgn}\omega \Phi(\omega). \tag{2.50}$$

Relację (2.49) można interpretować jako równość:

$$\Phi_H(\omega) = \Phi(\omega). \tag{2.51}$$

przy założeniu, że przebieg $f(t)$ nie zawiera składowej stałej (por. (2.46))
W tym przypadku (por. 2.32)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[H\{f(t)\} \right]^2 dt. \tag{2.52}$$

Na podstawie (2.31) oraz (2.50), otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) H\{f(t)\} dt = 0. \tag{2.53}$$

co oznacza, że funkcje $f(t)$ i $H\{f(t)\}$ są wzajemnie ortogonalne.

Połóżmy:

$$\underset{\varepsilon}{F}_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} H\left\{f(t)\right\} e^{-j\omega t}\, dt. \tag{2.54}$$

Zachodzi:

$$\underset{\varepsilon}{F}_H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} e^{-j\omega t} \left\{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}\right\} dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot e^{-j\omega t} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t-\lambda)d\lambda}{\lambda}\right\} dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t-\lambda)\, e^{-j\omega t}\right\} dt \quad d\lambda. \tag{2.55}$$

Lecz (por. (2.19)):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} \cdot f(t-\lambda)\, e^{-j\omega t}\, dt \cong \underset{\varepsilon}{F}(\omega)\, e^{-j\omega\lambda}.$$

Stąd:

$$\underset{\varepsilon}{F}_H(\omega) \cong -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \underset{\varepsilon}{F}(\omega)\, e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda = j\, \underset{\varepsilon}{F}(\omega) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\Omega} e^{j\Omega\omega}\, d\Omega$$

$$\underset{\varepsilon}{F}_H(\omega) \cong j\, \mathrm{sgn}\omega\, \underset{\varepsilon}{F}(\omega). \tag{2.56}$$

Zależność (2.56) pozwala na znalezienie związku między transformatą $\Psi(\omega)$ funkcji korelacji wzajemnej przebiegów $f(t)$ i $H\left\{g(t)\right\}$ oraz transformatą $\Theta(\omega)$. Otrzymamy (por. (2.28)):

$$\Psi(\omega) = (-j) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{sgn}\omega\, \underset{\varepsilon}{F}(\omega)\, \underset{\varepsilon}{F}^*(\omega)}{4\pi\varepsilon} \tag{2.57}$$

$$\Psi(\omega) = (-j)\, \mathrm{sgn}\omega\, \Theta(\omega). \tag{2.58}$$

Na podstawie (2.31) i (2.58) mamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)H\left\{g(t)\right\} dt = (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\, \Theta(\omega)\, d\omega$$

$$= j \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\, \Theta^*(\omega)\, d\omega.$$

Z drugiej strony:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t)H\left\{f(t)\right\} dt = (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\, \Theta^*(\omega)\, d\omega.$$

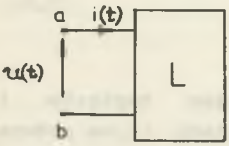
Czyli:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)H\left\{g(t)\right\} dt = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t)H\left\{f(t)\right\} dt. \tag{2.59}$$

3. UOGÓLNIONA TEORIA MOCY (POR. [4])

3.1. Moc czynna, bierna i pozorna

Niech L jest dowolnym[1)] układem elektrycznym między zaciskami którego występują przebiegi o skończonej mocy. Oznacza to, że między zaciskami (a,b) układu L (por. rys. 1) określone są wartości skuteczne:



Rys. 1

$$U = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)\,dt},$$

$$I = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)\,dt} \tag{3.01}$$

oraz moc modułowa:

$$P_m = U\,I. \tag{3.02}$$

Podstawowymi mocami przebiegów są moc czynna P i bierna Q. Na podstawie definicji mamy:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)i(t)\,dt, \tag{3.03}$$

$$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)H\{i(t)\}dt. \tag{3.04}$$

Przykładowo, gdy: $i(t) = G\,u(t)$, gdzie G jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$P = GU^2;\quad Q = 0 \quad \text{(na podstawie (2.53))}$$

[1)] W pracy ograniczymy się do dwójników. Jednak biorąc ogólnie L może być złożonym obiektem aktywnym zawierającym parametry skupione i rozłożone, elementy liniowe i nieliniowe oraz elementy odwzorowujące procesy stochastyczne.

oraz, gdy: $i(t) = B\,H\{u(t)\}$, to (por. (2.54)):

$$P = 0; \quad Q = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)H\{u(t)\}\,dt = -BU^2.$$

Połóżmy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)i(t-\tau)\,dt, \tag{3.05}$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{3.06}$$

Funkcja $\vartheta(\tau)$ jest funkcją korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu. (Można ją nazwać korelacją napięciowo-prądową układu L).Na podstawie (2.31) i (2.58) zachodzi:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\,d\omega, \tag{3.07}$$

$$Q = (-j)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega\,\Theta(\omega)\,d\omega. \tag{3.08}$$

Stąd:

$$P + j\,Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)\,(1+\operatorname{sgn}\omega)\,d\omega. \tag{3.09}$$

Relacja (3.09) ma znaczenie podstawowe. Wynika z niej, że jeżeli występujące na zaciskach układu L przebiegi napięcia i prądu posiadają zerową korelację wzajemną (są nieskorelowane) to moce: czynne P i bierna Q są równe zeru. (Np. dwa przebiegi sinusoidalne o różnych pulsacjach są przebiegami nieskorelowanymi).

W praktycznych obliczeniach bardziej specyficzna postać zależności (3.09) może okazać się przydatniejsza. Aby to pokazać załóżmy, że: $u(t) = U_o$ = constans; $i(t) = I_o$ = constans. Otrzymamy:

$$\vartheta(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} U_o\,I_o\,dt = U_o\,I_o,$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_o I_o \, e^{-j\omega t} \, dt = U_o I_o \, 2\pi\delta(\omega)$$

i stąd:

$$P = U_o I_o; \quad Q = 0.$$

Ogólnie więc, jeżeli w transformacie $\Theta(\omega)$ występuje impuls Diraca dla $\omega = 0$, tzn. jeżeli:

$$\Theta(\omega) = \Theta_o \, 2\pi\delta(\omega) + \Theta_1(\omega), \tag{3.10}$$

to:

$$P + jQ = \Theta_o + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Theta_1(\omega) \, d\omega. \tag{3.11}$$

Moc pozorną S definiujemy przy pomocy relacji:

$$S = \left| P + jQ \right| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{3.12}$$

Transformatę $\Theta(\omega)$ możemy przedstawić w postaci amplitudowo-fazowej. Kładziemy:

$$\Theta(\omega) = A(\omega) \, e^{j\sigma(\omega)}; \quad \cos\psi = \frac{P}{S}; \quad \sin\psi = \frac{Q}{S}. \tag{3.13}$$

Otrzymamy:

$$S \, e^{j\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \, e^{j\sigma(\omega)} \, (1+\mathrm{sgn}\,\omega) \, d\omega. \tag{3.14}$$

Moc pozorna S jest wielkością rzeczywistą. Stąd:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\left\{\cos\left[\sigma(\omega) - \psi\right](1+\mathrm{sgn}\,\omega)\right\} d\omega, \tag{3.15}$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\left\{\sin\left[\sigma(\omega) - \psi\right](1+\mathrm{sgn}\,\omega)\right\} d\omega. \tag{3.16}$$

Zauważmy, że w przypadku szczególnym, gdy: $\sigma(\omega)$ = constans = Ψ relacja (3.16) jest spełniona dla dowolnej amplitudy $A(\omega)$ i wtedy:

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Theta(\omega)\right|(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\,d\omega. \tag{3.17}$$

Teoria mocy - biorąc najogólniej, dotyczy związków zachodzących między mocami rozważanych przebiegów. W zastosowaniach - aby jej nadać określone znaczenie techniczne i ekonomiczne odnosimy ją do wyróżnionego obiektu lub układu. Jeżeli dynamiczne zachowanie się układu pozwala na przeprowadzenie efektywnej analizy, to znaczy prowadzącej do znalezienia zależności zachodzących między przebiegami, teoria mocy staje się składową częścią tej analizy a występujące moce możemy wyrazić w zależności od dynamicznych charakterystyk układu.

Najprostszym tego przykładem jest układ liniowy czasowo niezmienniczy. Załóżmy, że L jest układem liniowym pasywnym lub aktywnym czasowo niezmienniczym i niech $y(t)$ będzie odpowiedzią tego układu na napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$ a $\varphi(t)$ funkcją autokorelacji przyłożonego napięcia $u(t)$.

Na podstawie zasady superpozycji:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.18}$$

Stąd (por. (2.35), (2.32)):

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\left|Y(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{3.19}$$

oraz (por. (2.36), (3.09)):

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\,.\,Y^*(\omega)\,(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\,d\omega, \tag{3.20}$$

gdzie $\Phi(\omega)$ i $Y(\omega)$ są transformatami Fouriera odpowiednio funkcji $\varphi(t)$ i $y(t)$.

Jeżeli występujące przebiegi nie zawierają składowych stałych to (3.20) redukuje się do postaci:

$$P + jQ = \frac{1}{\pi}\int_{-0}^{\infty}\Phi(\omega)\,Y^*(\omega)\,d\omega. \tag{3.21}$$

Ważną cechą uzyskanych relacji jest fakt, że nie są one zależne bezpośrednio od przebiegów lecz (dla danego układu) od transformaty Fouriera funkcji autokorelacji przyłożonego napięcia. Transformata $\Phi(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą i dodatnią (por. (2.29)), co oznacza, że jest ona niezależna od kąta fazowego i dlatego różne przebiegi mogą posiadać taką samą funkcję autokorelacji. Tym samym dla różnych przebiegów napięć przyłożonych do zacisków (a,b) układu L (posiadających równą funkcję autokorelacji) pobór mocy P i Q oraz wartość skuteczna I prądu i(t) będą takie same. Mamy (por. (2.10), (3.18), (2.19)):

$$I_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} e^{-j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(t-\tau)\, d\tau \right\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\varepsilon t}{t} u(t-\tau) e^{-j\omega t}\, dt \right\} d\tau$$

$$\cong U_\varepsilon(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

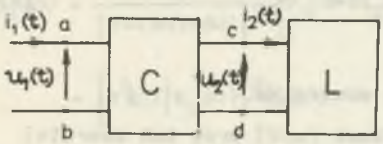
Stąd, dla wystarczająco małego ε:

$$I_\varepsilon(\omega) \cong Y(\omega) U_\varepsilon(\omega), \tag{3.22}$$

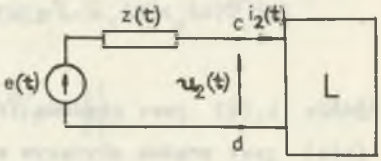
gdzie $U_\varepsilon(\omega)$ jest uogólnioną transformatą Fouriera przebiegu napięcia u(t).

3.2. Przenoszenie mocy przez czwórnik liniowy

Rozważmy układ składający się z czwórnika liniowego "C" zawartego między parą zacisków (a,b) i (c,d) oraz dowolnego obciążenia L (rys. 2).



Rys. 2



Rys. 3

Stosując twierdzenie Thevenina do liniowej części układu otrzymamy kolejno (por. rys. 3):

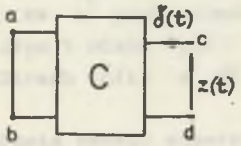
$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau) u_1(t-\tau)\, d\tau, \tag{3.23}$$

gdzie $k_u(t)$ jest napięciową transmitancją czwórnika ($e(t)$ jest napięciem występującym między zaciskami (c,d) przy odłączeniu tych zacisków od obciążenia).

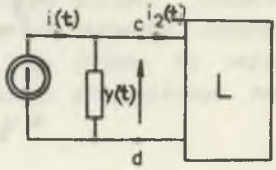
$$u_2(t) = e(t) - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)i_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.24}$$

gdzie (por. rys. 4) $z(t)$ jest odpowiedzią czwórnika zwartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu prądowym impulsem Diraca i zwartych końcówkach (a,b)

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau)u_1(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)i_2(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.25}$$



Rys. 4



Rys. 5

Na podstawie (2.10) oraz (2.19) dla uogólnionych transformat Fouriera zachodzi:

$$U_{\mathcal{F}2}(\omega) \cong K_u(\omega)U_{\mathcal{F}1}(\omega) - Z(\omega)I_{\mathcal{F}2}(\omega). \tag{3.26}$$

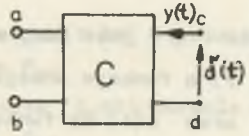
Podobnie, stosując twierdzenie Nortona, otrzymamy (por. rys 5):

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_i(\tau)i_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.27}$$

gdzie $k_i(t)$ jest prądową transmitancją czwórnika.

($i(t)$ jest prądem płynącym między zaciskami (c,d) przy ich zwarciu)

$$i_2(t) = i(t) - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.28}$$



Rys. 6

gdzie (por. rys. 6) $y(t)$ jest odpowiedzią czwórnika zawartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu napięciowym impulsem Diraca i otwartych końcówkach (a,b).

Czyli:

$$i_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) i_1(t-\tau)\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{3.29}$$

Dla uogólnionych transformat Fouriera, zachodzi:

$$I_{\varepsilon 2}(\omega) \cong K_1(\omega) I_{\varepsilon 1}(\omega) - Y(\omega) U_{\varepsilon 2}(\omega). \tag{3.30}$$

Wykorzystując (3.26) oraz (3.30), otrzymamy:

$$U_{\varepsilon 2}(\omega) \cong \frac{K_u(\omega) U_{\varepsilon 1}(\omega) - K_1(\omega) Z(\omega) I_{\varepsilon 1}(\omega)}{1 - Z(\omega) Y(\omega)} \tag{3.31}$$

$$I_{\varepsilon 2}(\omega) \cong \frac{K_1(\omega) I_{\varepsilon 1}(\omega) - K_u(\omega) Y(\omega) U_{\varepsilon 1}(\omega)}{1 - Z(\omega) Y(\omega)}. \tag{3.32}$$

Mamy:

$$\Theta_2(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_{\varepsilon 2}(\omega) I^*_{\varepsilon 2}(\omega)}{4 \Re \varepsilon}.$$

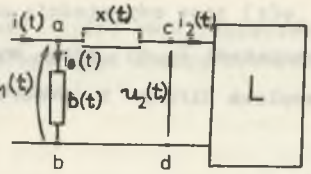
Stąd:

$$\Theta_2(\omega) = \frac{1}{|1 - Z(\omega) Y(\omega)|^2} \Big\{ K_u(\omega) K_1(\omega) \Theta_1(\omega) + Z(\omega) Y^*(\omega) K_1(\omega) K_u(\omega) \Theta_1^*(\omega)$$

$$- \Big[Y^*(\omega) |K_u(\omega)|^2 \Phi_1(\omega) + Z(\omega) |K_1(\omega)|^2 \Psi_1(\omega) \Big] \Big\}, \tag{3.33}$$

gdzie $\Psi_1(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji przebiegu prądu $i_1(t)$.

Zagadnieniem dualnym do przedstawionego jest obliczenie mocy przebiegów występujących między zaciskami (a,b).



Rys. 7

Załóżmy, że czwórnik "C" jest dany w układzie Γ (por. rys. 7) a funkcje przejścia jego elementów $x(t)$ oraz $b(t)$ są funkcjami nieparzystymi. (Założenie to określa obydwa elementy jako reaktancyjne). Otrzymamy:

$$u_1(t) = u_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) i_2(t-\tau)\, d\tau,$$

$$i_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) u_1(t-\tau) d\tau + i_2(t). \tag{3.34}$$

Stąd:

$$U_{\mathcal{E}1}(\omega) \cong U_{\mathcal{E}2}(\omega) + j\, X(\omega) I_{\mathcal{E}2}(\omega),$$

$$I_{\mathcal{E}1}(\omega) \cong j\, B(\omega) U_{\mathcal{E}1}(\omega) + I_{\mathcal{E}2}(\omega). \tag{3.35}$$

Czyli:

$$U_{\mathcal{E}1}(\omega) = U_{\mathcal{E}2}(\omega) + j\, X(\omega) I_{\mathcal{E}2}(\omega),$$

$$I_{\mathcal{E}1}(\omega) = j\, B(\omega) U_{\mathcal{E}2}(\omega) + \left[1 - X(\omega)B(\omega)\right] I_{\mathcal{E}2}(\omega). \tag{3.36}$$

Na podstawie (2.28) oraz (2.29), otrzymamy:

$$\Theta_1(\omega) = -jB(\omega)\Phi_2(\omega) + jX(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right]\Psi_2(\omega) +$$

$$+ \Theta_2(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right] + \Theta_2^{*}(\omega)X(\omega)B(\omega). \tag{3.37}$$

Kładziemy:

$$\Theta_1(\omega) = \Theta_{1r}(\omega) + j\Theta_{1u}(\omega),$$

$$\Theta_2(\omega) = \Theta_{2r}(\omega) + j\Theta_{2u}(\omega). \tag{3.38}$$

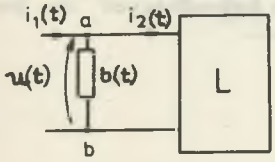
Stąd:

$$\Theta_{1r}(\omega) = \Theta_{2r}(\omega), \tag{3.39}$$

$$\Theta_{1u}(\omega) = \Theta_{2u}(\omega)\left[1 - 2X(\omega)B(\omega)\right] - B(\omega)\Phi_2(\omega) + X(\omega)\left[1 - X(\omega)B(\omega)\right]\Psi_2(\omega) \tag{3.40}$$

Relacja (3.39) wyraża oczywistą własność układu, a mianowicie fakt, że: $P_1 = P_2$.

Relacja (3.40) określa wpływ parametrów czwórnika na pobór mocy biernej Q_1.



Rys. 8

W szczególnym przypadku, gdy $X(\omega) \equiv 0$ (por. rys. 8), otrzymamy:

$$\Phi_1(\omega) = \Phi_2(\omega) = \Phi(\omega), \tag{3.41}$$

$$\Psi_1(\omega) = \Psi_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right], \tag{3.42}$$

$$\Theta_{1u}(\omega) = \Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega). \tag{3.43}$$

3.3. Moc dystorsji

Ogólnie, dla każdej skończonej wartości T prawdziwa jest tożsamość:

$$\int_{-T}^{T} u(t)^2\,dt \cdot \int_{-T}^{T} i(t)^2\,dt = \left|\int_{-T}^{T} u(t)i(t)dt\right|^2 +$$

$$+\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left|u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)\right|^2 dt\,d\tau, \tag{3.44}$$

a ponieważ granica:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u^2(t)dt \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i^2(t)dt = P_m^2,$$

istnieje - określona jest także wielkość D zdefiniowana przy pomocy relacji:

$$D = \sqrt{\lim_{T,T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\right)^2 \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left|u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)\right|^2 dt\,d\tau}, \tag{3.45}$$

D nazwiemy mocą dystorsji przebiegów $u(t)$ i $i(t)$.

Na podstawie (3.44) zachodzi:

$$P_m^2 = P^2 + D^2. \tag{3.46}$$

Zauważmy, że gdy:

$$i(t) = \lambda u(t), \tag{3.47}$$

gdzie λ jest wielkością stałą, to moc D jest równa zero. Jak pokażemy wielkość D odgrywa istotną rolę w rozważaniach prowadzących do poprawy współczynnika mocy układu.

3.4. Rozkład ortogonalny przebiegów[1)]

Połóżmy

$$i(t) = \lambda u(t) + i_\psi(t) \tag{3.48}$$

$$\lambda = \frac{P}{U^2} \quad \text{(por. [5])}. \tag{3.49}$$

Zachodzi:

$$\Theta(\omega) = \lambda \Phi(\omega) + \Phi_\psi(\omega), \tag{3.50}$$

$$\Psi(\omega) = \lambda^2 \Phi(\omega) + \Psi_\psi(\omega) + 2\lambda \Theta_{\psi\varphi}(\omega), \tag{3.51}$$

gdzie $\Theta_\psi(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji korelacji wzajemnej:

$$\vartheta_\psi(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) i_\psi(t-\tau) dt, \tag{3.52}$$

a $\Psi_\psi(\omega)$ jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji przegiegu $i_\psi(t)$. Na podstawie (3.07) oraz (3.49), otrzymamy:

$$P = P + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_\psi(\omega)\, d\omega.$$

Czyli (por. (2.31)):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_\psi(\omega)\, d\omega = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t) i_\psi(t) dt = 0. \tag{3.53}$$

---

1) Ze względu na zastosowania praktyczne rozkład przeprowadzono przyjmując przebieg napięcia za wielkość odniesienia.

Wynika stąd, że przebieg $i_\psi(t)$ jest ortogonalny do przebiegu napięcia $u(t)$.
Z drugiej strony:

$$(-j)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta(\omega)d\omega = (-j)\lambda\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Phi(\omega)d\omega +$$

$$+\,(-j)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta_\psi(\omega)d\omega.$$

Stąd (por. (3.8)):

$$Q = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}\omega\,\Theta_\psi(\omega)d\omega. \tag{3.54}$$

Mamy (por. (3.51)):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\omega)d\omega = \left(\frac{P}{U^2}\right)^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_\psi(\omega)d\omega +$$

$$+\,2\lambda\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_{\psi\varphi}(\omega)d\omega.$$

Stąd:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_\psi(\omega)d\omega. \tag{3.55}$$

Lecz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_\psi(\omega)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}i_\psi^2(t)dt = I_\psi^2. \tag{3.56}$$

Czyli:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + I_\psi^2,$$

$$P_m^2 = P^2 + (U\,I_\psi)^2. \tag{3.57}$$

Porównując (3.57) z (3.46), otrzymamy:

$$D = U\, I_{\varphi}, \tag{3.58}$$

gdzie I_{φ} jest wartością skuteczną przebiegu $i_{\varphi}(t)$.

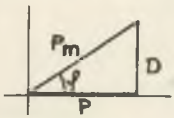
Bezpośrednio relacją (3.58) możemy uzyskać wstawiając (3.48) i (3.49) do (3.45). Istotnie, wykonując zaznaczone działania, otrzymamy:

$$D = U\sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i_{\varphi}^{2}(t)dt}. \tag{3.59}$$

3.5. Poprawa współczynnika mocy

Współczynnikiem mocy nazwiemy stosunek (por. rys. 9):

$$\frac{P}{P_m} = \cos\varphi. \tag{3.60}$$



Rys. 9

Jak widać współczynnik ten określa sprawność wykorzystania mocy dostarczonej do układu i jest równy jedności wtedy i tylko wtedy, gdy moc dystorsji $D = 0$.

Interesuje nas poprawa współczynnika mocy, tzn. minimalizacja mocy dystorsji układu. Jest oczywiste, że minimalizację taką można w różny sposób przeprowadzić. Jednak z punktu widzenia wykorzystania w praktyce można przyjąć, że wartość skuteczna U napięcia wzbudzenia jest dana i różna od zera. Przyjęcia takie redukuje problem minimalizacji mocy D do minimalizacji wartości skutecznej I_{φ} przebiegu $i_{\varphi}(t)$ (por. (3.59)). Z definicji wartości skutecznej wynika, że będzie ona równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy przebieg $i_{\varphi}(t)$ będzie przebiegiem o skończonej energii. Tak więc warunkiem koniecznym i równocześnie wystarczającym, aby moc dystorsji D układu była równa zero jest spełnienie nierówności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\varphi}^{2}(t)dt < \infty \tag{3.61}$$

Załóżmy, że spełnienie warunku (3.61) spodziewamy się uzyskać przez wprowadzenie między zaciski (a,b) układu L elementu reaktancyjnego, którego funkcją przejścia jest $b(t)$, (por. rys. 8). Zachodzi (por. (3.47), (3.42)):

$$\Phi_1(\omega) = \Phi_2(\omega) = \Phi(\omega),$$

$$\Psi_1(\omega) = \Psi_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right].$$

Stąd (por. (3.51)):

$$\lambda^2\Phi(\omega) + \mathcal{V}_{\psi 1}(\omega) + 2\lambda\Theta_{\psi r1}(\omega) =$$

$$= \mathcal{V}_2(\omega) + B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right],$$

$$\frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}_{\psi 1}(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}_2(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[B(\omega)\Phi(\omega) - 2\Theta_{2u}(\omega)\right]d\omega.$$

Przyjmując:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{V}_{\psi 1}(\omega)d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i_{\psi 1}^2(t)dt = 0,$$

(warunek równoważny nierówności (3.61)),
otrzymamy:

$$I_2^2 - \frac{P^2}{U^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[2\Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega)\right]d\omega,$$

$$I_{\psi 2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)\left[2\Theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\Phi(\omega)\right]d\omega. \tag{3.62}$$

W równaniu (3.62) szukaną funkcją jest $B(\omega)$. $I_{\psi 2}$ oraz pozostałe funkcje są znane.

Łatwo można zauważyć, że gdy $\Theta_{2u}(\omega) \equiv 0$ to równanie (3.62) nie może być spełnione dla żadnej funkcji $B(\omega)$ a z relacji (3.43) wynika, że gdy $\Theta_{1u}(\omega) \equiv 0$ to prawa strona równania (3.62) jest niezależna od $I_{\psi 2}$. Ogólniej: ponieważ wprowadzenie elementu $B(\omega)$ nie wpływa na przebieg prądu $i_2(t)$ proponowane rozwiązanie ma tylko ograniczony wpływ na poprawę współczynnika mocy. Na ogół (w zależności od funkcji przebiegów) bardziej złożona struktura czwórnika "C" (por. rys. 2) będzie konieczna do uzyskania efektywnej poprawy współczynnika mocy.

W literaturze problem poprawy współczynnika mocy sprowadza się często do zagadnienia kompensacji mocy biernej układu. Takie ustawienie problemu

nie jest ogólnie biorąc prawidłowe, pozwala jednak dla niektórych klas przebiegów uzyskać pewne informacje mogące być użyteczne. W rozważanym przypadku, na podstawie (3.37), otrzymamy:

$$(-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_1(\omega)\,\mathrm{sgn}\,\omega\,d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)B(\omega)\,\mathrm{sgn}\,\omega\,d\omega +$$

$$+ (-j)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_2(\omega)\,\mathrm{sgn}\,\omega\,d\omega.$$

Stąd:

$$Q_1 = Q_2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}\,\omega B(\omega)\Phi(\omega)\,d\omega. \tag{3.63}$$

Przyjmując:

$$Q_1 = 0 \quad \text{(kompensacja zupełna)},$$

otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}\,\omega B(\omega)\Phi(\omega)\,d\omega. \tag{3.64}$$

Równanie (3.64) da się uprościć. Jeżeli napięcie zasilania $u(t)$ nie zawiera składowej stałej to przyjmuje ono postać:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\Phi(\omega)\,d\omega. \tag{3.65}$$

W przypadku, gdy $u(t)$ zawiera składową stałą U_o to transformatę jego funkcji autokorelacji możemy przedstawić w postaci:

$$\Phi(\omega) = U_o^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + \Phi_o(\omega). \tag{3.66}$$

Wstawiając (3.66) do (3.64), otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\Phi_o(\omega)\,d\omega. \tag{3.67}$$

W równaniu (3.65) lub (3.67) szukaną funkcją jest $B(\omega)$. Pozostałe wielkości są znane.

3.6. Przebiegi zespolone (por. [6], [7])

Bardzo często w praktycznych obliczeniach mocy mamy do czynienia z przebiegami, dla których wygodniej zamiast operować przebiegami rzeczywistymi rozważać zależności zachodzące między przebiegami zespolonymi stowarzyszonymi z przebiegami rzeczywistymi. Dotyczy to przede wszystkim przebiegów okresowych, prawie okresowych oraz przebiegów posiadających obwiednie o znanym kształcie.

DEFINICJA: Niech $f(t)$ będzie przebiegiem rzeczywistym o skończonej mocy a $H\{f(t)\}$ jego transformatą Hilberta.
Przebieg zespolony:

$$F(t) = f(t) - j\,H\{f(t)\} \tag{3.68}$$

nazywamy przebiegiem stowarzyszonym z przebiegiem rzeczywistym $f(t)$.
Zachodzi (por. (2.52), (2.53)):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} |F(t)|^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \left[H\{f(t)\}\right]^2 dt\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt.$$

Czyli, dla wartości skutecznej F przebiegu rzeczywistego $f(t)$, otrzymamy:

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} |F(t)|^2\,dt} \tag{3.69}$$

Uwaga. Jeżeli $f(t)$ zawiera składową stałą F_0, to w zależności (3.69) zamiast F_0^2 wystąpi $\frac{1}{2}F_0^2$. Należy to uwzględnić w obliczeniach.

Przykładowo, niech:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{mn} \cos(\omega_n t + \gamma_n). \tag{3.70}$$

Stąd (por. (2.42)):

$$H\left\{f(t)\right\} = -\sum_{n=1}^{n=N} C_{mn} \sin(\omega_n t + \gamma_n), \tag{3.71}$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}\, e^{j\gamma_n}\, e^{j\omega_n t}, \tag{3.72}$$

$$\left|F(t)\right|^2 = \sum_{n,r=1}^{N} C_{mn}\, C_{mr}\, e^{j(\gamma_n - \gamma_r)}\, e^{jt(\omega_n - \omega_r)}. \tag{3.73}$$

Gdy $r \neq n$, otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} e^{jt(\omega_n - \omega_r)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin(\omega_n - \omega_r)T}{2T(\omega_n - \omega_r)} = 0.$$

Z drugiej strony, gdy $r = n$:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} dt = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie więc:

$$F^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=N} C_{mn}^2 = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{C_{mn}}{\sqrt{2}}\right)^2. \tag{3.74}$$

Połóżmy:

$$U(t) = u(t) - j\, H\left\{u(t)\right\}; \quad I(t) = i(t) - j\, H\left\{i(t)\right\} \tag{3.75}$$

Na podstawie (3.03), (3.04) oraz (2.59), otrzymamy:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^{T} U(t) I^*(t)\, dt = P + jQ, \tag{3.76}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T}\left|\int_{-T}^{T} U(t)I^*(t)dt\right| = S. \qquad (3.77)$$

Przyjmijmy, że przebiegi $u(t)$ i $i(t)$ posiadają postać (3.70) to znaczy, niech:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn}\cos(\omega_n t+\beta_n); \quad i(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn}\cos(\omega_n t+\alpha_n).$$

Otrzymamy:

$$U(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{mn}\, e^{j\beta_n}\cdot e^{j\omega_n t}; \quad I(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{mn}\, e^{j\alpha_n}\cdot e^{j\omega_n t},$$

$$U(t)I^*(t) = \sum_{n,r=1}^{N} U_{mn}\, I_{mr}\, e^{j(\beta_n-\alpha_r)}\cdot e^{jt(\omega_n-\omega_r)},$$

$$P + jQ = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T} U(t)I^*(t)dt = \sum_{n=1}^{n=N}\left|\bar{U}_n\right|\left|\bar{I}_n\right|e^{j\varphi_n},$$

gdzie:

$$\left|\bar{U}_n\right| = \frac{U_{mn}}{\sqrt{2}}; \quad \left|\bar{I}_n\right| = \frac{I_{mn}}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_n = \beta_n - \alpha_n.$$

Tożsamość (3.44) można także zastosować do przebiegów zespolonych (3.68). Otrzymamy:

$$\int_{-T}^{T}|U(t)|^2\,dt \int_{-T}^{T}|I(t)|^2\,dt = \left|\int_{-T}^{T} U(t)I^*(t)dt\right|^2 +$$

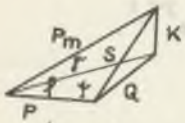
$$+\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\left|U(t)I(\tau) - U(\tau)I(t)\right|^2 dt\,d\tau. \qquad (3.79)$$

Z (3.79) wynika, że określona jest wielkość K zdefiniowana przy pomocy relacji:

$$K = \sqrt{\lim_{T,T\to\infty} \left(\frac{1}{4T}\right)^2 \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \frac{1}{2}\left|U(t)I(\tau) - U(\tau)I(t)\right|^2 dt\, d\tau} \qquad (3.80)$$

K nazywamy mocą deformacji.
Na podstawie (3.79) zachodzi:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2. \qquad (3.81)$$



Rys. 10

Geometryczna interpretacja zależności (3.81) podana jest na rys. 10.
Połóżmy:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m}; \quad \cos\psi = \frac{P}{S}; \quad \cos\gamma = \frac{S}{P_m}. \qquad (3.82)$$

Otrzymamy:

$$\cos\varphi = \cos\psi \cos\gamma. \qquad (3.83)$$

Jak wiemy współczynnik $\cos\varphi$ nazywamy współczynnikiem mocy. Współczynnik $\cos\psi$ nazwiemy współczynnikiem obciążenia a $\cos\gamma$ współczynnikiem deformacji.

Wszystkie wprowadzone współczynniki posiadają określone znaczenie przy czym współczynnik obciążenia jest w istotny sposób zależny od mocy biernej Q, a współczynnik deformacji od mocy deformacji K. Relacja (3.83) wskazuje na zależność współczynnika mocy tak od poboru mocy biernej przez układ jak i od wielkości mocy deformacji K. W szczególnym przypadku, gdy K = 0, $\cos\gamma = 1$ i otrzymamy: $\cos\varphi = \cos\psi$.

4. PRZEBIEGI OKRESOWE I PRAWIE OKRESOWE

Ważnym szczególnym przypadkiem przebiegów o skończonej mocy są przebiegi okresowe i jednostajnie prawie okresowe.

4.1. Przebiegi okresowe (por. [7])

Niech $u(t)$ oraz $i(t)$ będą przebiegami okresowymi napięcia i prądu o wspólnym okresie $2T_o$. Na podstawie definicji (3.03) i (3.04), otrzymamy:

$$P = \frac{1}{2T_o} \int_{-T_o}^{T_o} u(t)i(t)dt, \tag{4.01}$$

$$Q = \frac{1}{2T_o} \int_{-T_o}^{T_o} u(t)H\left\{i(t)\right\}dt, \tag{4.02}$$

(Należy zauważyć, że $H\left\{i(t)\right\}$ jest także przebiegiem o okresie $2T_o$). Załóżmy, że oba przebiegi są rozwijalne na zbieżne szeregi Fouriera. (Np. w sensie dystrybucyjnym). Tzn. zakładamy, że:

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_n e^{jn\omega_o t}; \quad i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} I_n e^{jn\omega_o t}; \quad \omega_o = \frac{\pi}{T_o}, \tag{4.03}$$

gdzie:

$$U_n = \frac{1}{2T_o} \int_{-T_o}^{T_o} u(t)e^{-jn\omega_o t} dt = \left|U_n\right| e^{j\beta_n},$$

$$I_n = \frac{1}{2T_o} \int_{-T}^{T_o} i(t)e^{-jn\omega_o t} dt = \left|I_n\right| e^{j\alpha_n}. \tag{4.04}$$

Bezpośrednio z relacji (4.01) i (4.02), otrzymamy:

$$P = U_o I_o + 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n^*\right\}. \tag{4.05}$$

$$Q = 2I_m\left\{U_n I_n^*\right\}.$$

Wprowadzając:

$$\bar{U}_n = \sqrt{2}\, U_n; \quad \bar{I}_n = \sqrt{2}\, I_n, \tag{4.06}$$

(tj. zespolone wartości skuteczne n-tych harmonicznych przebiegów) relacje (4.05) można zapisać w postaci:

$$P = U_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\bar{U}_n\right| \left|\bar{I}_n\right| \cos\varphi_n, \tag{4.07}$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\bar{U}_n\right| \left|\bar{I}_n\right| \sin\varphi_n; \quad \varphi_n = \beta_n - \alpha_n. \tag{4.08}$$

Alternatywnie relacje (4.05) można uzyskać następująco:
połóżmy:

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{2T_o} \int_{-T_o}^{T_o} u(t)\, i(t-\tau)\, dt, \tag{4.09}$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{4.10}$$

Otrzymamy:

$$\vartheta(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_n\, I_n^*\, e^{jn\omega_o \tau}, \tag{4.11}$$

$$\Theta(\omega) = 2\pi \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} U_n\, I_n^*\, \delta(\omega - n\omega_o). \tag{4.12}$$

Stąd (por. (3.07), (3.08)):

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(\omega)d\omega = \sum_{-\infty}^{\infty} U_n I_n^*,$$

$$Q = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(\omega)\Theta(\omega)d\omega = 2\mathrm{Im}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n^*\right\}.$$

Przebiegi zespolone stowarzyszone z przebiegami rzeczywistymi (por.(3.68), (3.72) oraz uwagę na str. 28) mają postać:

$$U(t) = U_o + 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{jn\omega_o t}; \quad I(t) = I_o + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{jn\omega_o t} \tag{4.13}$$

Stąd (por. (3.08)):

$$K = \frac{1}{4T_o}\sqrt{\int_{-T_o}^{T_o}\int_{-T_o}^{T_o}\left|\sum_{n,r=o}^{\infty}\left|\bar{U}_n\right|\left|\bar{I}_r\right|e^{j(\beta_n+\alpha_r)}\cdot e^{j\omega_o(nt+r\tau)}\right.}$$

$$\left.-\left|\bar{U}_r\right|\left|\bar{I}_n\right|e^{j(\beta_r+\ n)}\cdot e^{j\omega_o(rt+n\tau)}\right|^2 dr\, d\tau \tag{4.14}$$

$$=\sqrt{\sum_{n,r=o}^{\infty}\left[\left|\bar{U}_n\right|^2\left|\bar{I}_r\right|^2+\left|\bar{U}_r\right|^2\left|\bar{I}_n\right|^2-2\left|\bar{U}_n\right|\left|\bar{U}_r\right|\left|\bar{I}_n\right|\left|\bar{I}_r\right|\cos(\psi_n-\psi_r)\right]}.$$

Powyższe relacje (ogólnie znane i stosowane) pozwalają na obliczenie trzech podstawowych mocy układu z dowolną dokładnością. Jednak do dalszych rozważań wygodniej jest wykorzystać inny sposób podejścia.
Niech $f(t)$ będzie przebiegiem okresowym o okresie $2T_o$.
Połóżmy:

$$f_{T_o}(t) = f(t)\Pi_{T_o}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{gdy } |t| < T_o \\ 0, & \text{gdy } |t| > T_o \end{cases} \tag{4.15}$$

Przebieg $f_{T_o}(t)$ jest transformowalny według Fouriera. Zachodzi:

$$F_{T_o}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_o}(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-T_o}^{T_o} f(t)e^{-j\omega t}\,dt, \tag{4.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Pi_{T_o}(t-2nT_o)e^{-j\omega t}\,dt = F_{T_o}(\omega)e^{-j2nT_o\omega}, \tag{4.17}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t)\Pi_{T_o}(t-2nT_o). \tag{4.18}$$

Stąd:

$$F(\omega) = F_{T_o}(\omega) + F_{T_o}(\omega)\left\{e^{-j2nT_o\omega} + e^{j2nT_o\omega}\right\} + F_{T_o}(\omega)\left\{e^{-j4nT_o\omega} + e^{j4nT_o\omega}\right\} +$$

$$= F_{T_o}(\omega)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\,T_o\omega\right]$$

Lecz (por. [9], str. 63):

$$2\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\,T_o\omega\right] = \omega_o \sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_o); \quad \omega_o = \frac{\pi}{T_o} \tag{4.19}$$

Czyli:

$$F(\omega) = F_{T_o}(\omega)\,.\,\omega_o\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_o)$$

$$= 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o}\,\delta(\omega-n\omega_o). \tag{4.20}$$

Jak widać (por. (4.03), (4.04)):

$$U_n = \frac{U_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o}; \qquad I_n = \frac{I_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o}. \tag{4.21}$$

Interesuje nas korelacja wzajemna przebiegów napięcia i prądu. Połóżmy (por. (4.09)):

$$\Theta_{T_o}(\omega) = \int_{-T_o}^{T_o} \vartheta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{4.22}$$

Otrzymamy:

$$\Theta_{T_o}(\omega) = \frac{1}{2T_o} U_{T_o}(\omega) I^*_{T_o}(\omega). \tag{4.23}$$

Stąd:

$$\Theta(\omega) = \Theta_{T_o}(\omega) \cdot \omega_o \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_o)$$

$$= \omega_o \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \Theta_{T_o}(n\omega_o) \delta(\omega - n\omega_o) \tag{4.24}$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \frac{I^*_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \delta(\omega - n\omega_o). \tag{4.25}$$

Podobnie, dla transformat funkcji autokorelacji przebiegów napięcia i prądu, otrzymamy:

$$\Phi(\omega) = \omega_o \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_{T_o}(n\omega_o) \delta(\omega - n\omega_o) \tag{4.26}$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{U_{T_o}(n\omega_c)}{2T_o} \right|^2 \delta(\omega - n\omega_o), \tag{4.27}$$

$$\Psi(\omega) = \omega_o \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \Psi_{T_o}(n\omega_o) \; (\omega - n\omega_o) \tag{4.28}$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \right|^2 \delta(\omega - n\omega_o), \tag{4.29}$$

Przedstawiona metoda pozwala na uogólnienie wyników uzyskanych dla przebiegów okresowych do przebiegów dowolnych w przypadku, gdy interesuje nas (np. ze względów pomiarowych) wybrany i skończony w czasie stan pracy układu. Aby to pokazać załóżmy, że przebiegi $u(t)$ oraz $i(t)$ opisują wybrany stan pracy a interesujący nas przedział czasowy wynosi $2T_o$. Kładziemy:

$$u_{T_o}(t) = u(t)\Pi_{T_o}(t), \tag{4.30}$$

$$i_{T_o}(t) = i(t)\Pi_{T_o}(t).$$

$$u_o(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_{T_o}(t-2nT_o),$$

$$i_o(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} i_{T_o}(t-2nT_o). \tag{4.31}$$

Przebiegi (4.31) są przebiegami okresowymi o okresie $2T_o$. Na podstawie (4.16), (4.23) i (4.25), otrzymamy:

$$\Theta_{T_o}(\omega) = \frac{1}{2T_o} U_{T_o}(\omega) I^*_{T_o}(\omega),$$

$$\Theta(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \frac{I^*_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \delta(\omega - n\omega_o); \quad \omega_o = \frac{\pi}{T_o} \tag{4.32}$$

Stąd:

$$P_o = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{U_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \frac{I^*_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \tag{4.33}$$

$$Q_o = 2\,\mathrm{Im}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \cdot \frac{I^*_{T_o}(n\omega_o)}{2T_o} \right\} \tag{4.34}$$

4.2. Kompensacja mocy biernej w układach o przebiegach okresowych

Przyjmując, za podstawę do obliczeń układ przedstawiony na rys. 8 dla kompensacji zupełnej, otrzymamy (por. (3.64), (4.26)):

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\omega B(\omega)\Phi(\omega)d\omega$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n\omega_0)B(n\omega_0)\Phi_{T_0}(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0)\right\}d\omega$$

$$= \frac{2}{2T_0}\sum_{n=1}^{\infty} B(n\omega_0)\Phi_{T_0}(n\omega_0) = \sum_{n=1}^{\infty} B(n\omega_0)|\bar{U}_n|^2.$$

Czyli:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[|\bar{U}_n||\bar{I}_n|\sin\Psi_{n2} - B(n\omega_0)|\bar{U}_n|^2\right]. \tag{4.35}$$

Jednym z możliwych rozwiązań równania (4.35) jest przyjęcie:

$$B(n\omega_0) = \frac{|\bar{I}_{n2}|\sin\Psi_{n2}}{|\bar{U}_n|}. \tag{4.36}$$

Rozwiązanie (3.36) pokrywa się z klasycznym, znanym rozwiązaniem dla kompensacji mocy biernej. (Jego realizację techniczną otrzymujemy przez wprowadzenie do układu odpowiedniej liczby kondensatorów, których pojemność obliczamy z relacji (4.36)). Możliwa jest także prosta ekstrapolacja rozwiązania (4.36) na przypadek szczególny formalnie nie zawarty w tym rozwiązaniu. Chodzi o to, że w układach nieliniowych może zachodzić $|I_{n2}| \neq 0$; $|\bar{U}_n| = 0$ dla niektórych n.

Przyjmując dla tych przypadków:

$$B(n\omega_0) = \infty, \tag{4.37}$$

można (4.37) zrealizować wprowadzając do układu elementy rezonansowe LC.

Realizacja układu służącego do poprawy współczynnika mocy jest trudniejsza i nie można jej przeprowadzić przy pomocy jednoelementowego układu reaktancyjnego. Wydaje się jednak, że warto wykorzystać relację (3.62) w celu uzyskania informacji przydatnych do jego realizacji.

Zachodzi (por. (3.62), (4.24) i (4.25)):

$$I_{\varphi 2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_1(\omega)\left[2\Theta_{2u}(\omega) - B_1(\omega)\Phi(\omega)\right]d\omega$$

$$= \frac{\omega_o}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} B_1(n\omega_o)\left[2\Theta_{T_o u}(n\omega_o) - B_1(n\omega_o)\Phi_{T_o}(n\omega_o)\right]\delta(\omega - n\omega_o)\right\}d\omega$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\left|U_n\right| B_1(n\omega_o)\left[2\left|I_{n2}\right|\sin\varphi_{n2} - B_1(n\omega_o)\left|U_n\right|\right].$$

Z drugiej strony (por. (3.48)):

$$\Psi_{\varphi 2}(\omega) = \Psi_2(\omega) + \lambda^2\Phi(\omega) - 2\lambda\Theta_{2r}(\omega)$$

$$I_{\varphi 2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{\varphi 2}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2(\omega)d\omega + \lambda^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)d\omega -$$

$$- 2\lambda\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta_{2r}(\omega)d\omega.$$

Czyli (por.(4.27), (4.29)):

$$I_{\varphi 2}^2 = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left|I_n\right|^2 + \lambda^2\left|U_n\right|^2 - 2\lambda\left|U_n\right|\left|I_n\right|\cos\varphi_{n2}\right].$$

Porównując uzyskane wyniki (po elementarnych przekształceniach),otrzymamy:

$$B_1(n\omega_o) = B(n\omega_o) \pm j(\lambda - b_n\cos\varphi_{n2}),$$

gdzie:

$$b_n = \left|\frac{I_{n2}}{U_n}\right|; \qquad \lambda = \frac{P}{U^2}$$

4.3. Przebiegi prawie okresowe (por. [2], str. 185, [8], str. 427)

Niech obydwa przebiegi $u(t)$ oraz $i(t)$ będą przebiegami jednostajnie prawie okresowymi (funkcjami p.o. w sensie Bohra). Z teorii tej klasy funkcji wynika, że są one rozwijalne na skończony lub przeliczalny szereg Fouriera:

$$u(t) \sim \sum_n U_n e^{j\Omega_n t}; \quad i(t) \sim \sum_n I_n e^{j\Omega_n t} \tag{4.38}$$

gdzie:

$$U_n = U(\Omega_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)e^{-j\Omega_n t}\,dt = |U_n| e^{j\beta_n}$$

$$I_n = I(\Omega_n) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} i(t)e^{-j\Omega_n t}\,dt = |I_n| e^{j\alpha_n} \tag{4.39}$$

przy czym (ponieważ $u(t)$ oraz $i(t)$ są przebiegami rzeczywistymi):

$$U(-\Omega_n) = U^*(\Omega_n),$$

$$I(-\Omega_n) = I^*(\Omega_n). \tag{4.40}$$

Uporządkowanie szeregów (4.38) jest dowolne. Jednak ze względu na relacje (4.40) możemy przyjąć:

$$\Omega_o = 0; \quad \Omega_{on} > 0, \quad \text{gdy} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$\Omega_{-n} = -\Omega_n. \tag{4.41}$$

Czyli:

$$U(-\Omega_n) = U(\Omega_{-n}) = U^*(\Omega_n) = U_n^*,$$

$$I(-\Omega_n) = I(\Omega_{-n}) = I^*(\Omega_n) = I_n^*. \tag{4.42}$$

Obydwie funkcje autokorelacji oraz funkcja korelacji wzajemnej są także funkcjami jednostajnie prawie okresowymi. Zachodzi:

$$\varphi(\tau) = \sum_k |U_k|^2 e^{j\Omega_k \tau}, \tag{4.43}$$

$$\partial(\tau) = \sum_r \left|I_r\right|^2 e^{j\Omega_r \tau} \tag{4.44}$$

$$\vartheta(\tau) = \sum_n U_n I_n^* e^{j\Omega_n \tau} \tag{4.45}$$

(Należy zwrócić uwagę na wskaźniki określające uporządkowanie szeregów Fouriera (4.43), (4.44) i (4.45). Szereg (4.45) zawiera tylko te wyrazy, dla których $\Omega_k = \Omega_r$ i wtedy $\Omega_n = \Omega_k = \Omega_r$). Na podstawie (3.03), (3.04) i uwzględniając przyjęte uporządkowanie:

$$\Theta(\omega) = 2\pi \sum_n U_n I_n^* \delta(\omega - \Omega_n), \tag{4.46}$$

$$P = U_o I_o + \sum_{n \neq o} U_n I_n^* = U_o I_o + 2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{n>o} U_n I_n^*\right\}, \tag{4.47}$$

$$Q = 2\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{n>o} U_n I_n^*\right\} \tag{4.48}$$

Dla zespolonych przebiegów prawie okresowych, otrzymamy:

$$U(t) \sim U_o + \sum_{n>o} U_n e^{j\Omega_n t}; \quad I(t) \sim I_o + \sum_{n>o} I_n e^{j\Omega_n t} \tag{4.49}$$

i stąd:

$$K = \sqrt{\sum_{k,r \geq 0} \left[\left|\bar{U}_k\right|^2 \left|\bar{I}_r\right|^2 + \left|\bar{U}_r\right|^2 \left|\bar{I}_k\right|^2 - 2\left|\bar{U}_k\right|\left|\bar{U}_r\right|\left|\bar{I}_k\right|\left|\bar{I}_r\right| \cos(\varphi_k - \psi_r)\right]}, \tag{4.50}$$

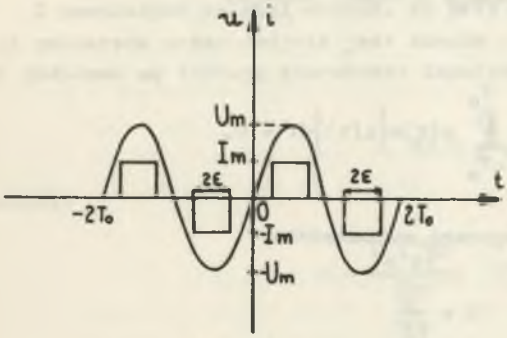
gdzie:

$$\bar{U}_k = \sqrt{2}\, U_k; \qquad \bar{I}_k = \sqrt{2}\, I_k.$$

5. ZASTOSOWANIA

5.1. Przebiegi okresowe

Rozważmy pobór mocy przez dwójnik, na zaciskach którego występują przebiegi prądu i napięcia pokazane na rys. 11.



Rys. 11

Bezpośrednio z relacji (4.09), (4.10) i (3.11), otrzymamy:

$$\mathcal{V}(\tau) \quad \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} u(t)i(t-\tau)\,dt =$$

$$= \frac{2}{2T_o}\int_{\frac{T_o}{2}-\varepsilon}^{\frac{T_o}{2}+\varepsilon} U_m \sin\omega_o t . I_m \, dt =$$

$$= \frac{-2U_m I_m}{2T_o\omega_o}\left[\cos\omega_o\left(\frac{T_o}{2}+\varepsilon\right) - \cos\omega_o\left(\frac{T_o}{2}-\varepsilon\right)\right] =$$

$$= \frac{2U_m I_m}{T_o \frac{2\pi}{2T_o}} \sin\omega_o\varepsilon = \frac{2U_m I_m}{\pi} \sin\omega_o\varepsilon$$

$$\mathcal{V}(\tau) = \text{const} \quad \text{dla ustalonego } \varepsilon$$

$$\Theta(\omega) = \frac{2U_m I_m}{\pi} \sin\omega_o\varepsilon \cdot 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$P + jQ = \frac{2U_m I_m}{\pi} \sin\omega_o\varepsilon$$

Stąd:

$$P = \frac{2U_m I_m}{\pi} \sin\omega_o\varepsilon \qquad Q = 0.$$

Alternatywnie wynik można uzyskać korzystając z definicji (por. (4.01), (4.02)):

$$P = \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} u(t)i(t)dt = \frac{2}{2T_o}\int_{\frac{T_o}{2}-\varepsilon}^{\frac{T_o}{2}+\varepsilon} U_m \sin\omega_o t\, I_m\, dt =$$

$$= \frac{U_m I_m}{T_o\omega_o} 2\sin\omega_o\varepsilon = \frac{2U_m I_m}{\pi}\sin\omega_o\varepsilon,$$

$$Q = \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} u(t)H\left\{i(t)\right\}dt = 0.$$

Wartości skuteczne przebiegów wynoszą odpowiednio:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

oraz

$$I = \sqrt{\frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} i^2(t)dt} = \sqrt{\frac{2}{2T_o}\int_{\frac{T_o}{2}-\varepsilon}^{\frac{T_o}{2}+\varepsilon} I_m^2\, dt} = I_m\sqrt{\frac{2\varepsilon}{T_o}}$$

Moc modułowa:

$$P_m = U\,I = \frac{U_m}{\sqrt{2}} I_m\sqrt{\frac{2\varepsilon}{T_o}} = U_m\, I_m\sqrt{\frac{\varepsilon}{T_o}}.$$

Moc dystorsji:

$$D = \sqrt{P_m^2 - P^2} = U_m\, I_m\sqrt{\frac{\varepsilon}{T_o} - \frac{4}{\pi^2}\sin^2\omega_o\varepsilon}$$

Współczynnik mocy:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m} = \frac{\frac{2}{\pi} U_m I_m \sin\omega_o \varepsilon}{U_m I_m \sqrt{\frac{\varepsilon}{T_o}}} = \frac{2\sin\omega_o \varepsilon}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{T_o}}} =$$

$$= \frac{2\sin\omega_o \varepsilon}{\sqrt{\pi\omega_o \varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\omega_o \varepsilon}{\sqrt{\omega_o \varepsilon}}$$

Z powyższych relacji wynika, że przy przyjętym przebiegu prądu moc bierna pobierana przez dwójnik jest zawsze równa zeru, natomiast moce czynna i modułowa są funkcją szerokości impulsów prądowych. Przykładowo, gdy:

$$2\varepsilon = \frac{T_o}{2};$$

wtedy:

$$P = \frac{U_m I_m \sqrt{2}}{\pi}; \quad P_m = \frac{U_m I_m}{2},$$

$$D = 0{,}047\ U_m\ I_m; \quad \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Jeśli zaś $2\varepsilon = T_o$:

$$P = \frac{2U_m I_m}{\pi}; \quad D = \sqrt{2}\,.\,0{,}047\ U_m\ I_m,$$

$$P_m = \frac{U_m I_m}{\sqrt{2}}; \quad \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

Dla wystarczająco małego ε, tj. $\varepsilon \ll T_o$ mamy:

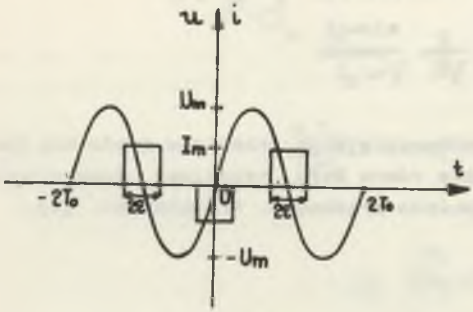
$$P = \frac{2U_m I_m}{\pi}\omega_o \varepsilon \left(\frac{\sin\omega_o \varepsilon}{\omega_o \varepsilon}\right) \cong \frac{2U_m I_m}{\pi}\ \omega_o \varepsilon =$$

$$= U_m\ I_m \left(\frac{2\varepsilon}{T_o}\right),$$

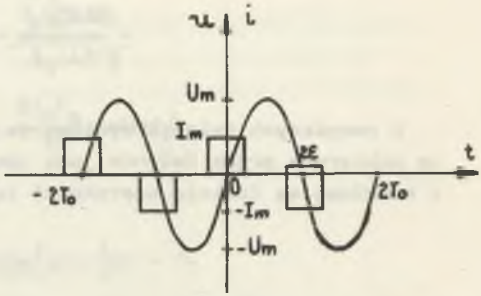
$$\cos\varphi \cong \frac{2\sqrt{\varepsilon\omega_o}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{T_o}}.$$

Moc czynna zatem dla bardzo małego ε jest wprost proporcjonalna do szerokości impulsów prądowych 2ε.

Rozważmy obecnie, jak zmienią się poszczególne moce, gdy przebieg prądu na zaciskach dwójnika ulegnie przesunięciu o $\pm\frac{T_o}{2}$, czyli przebiegi napięcia i prądu będą takie jak na rys. 12 i 13.



Rys. 12



Rys. 13

Dla przypadku z rys. 12 otrzymamy (por. (4.01) i (4.02)

$$P = \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} u(t)i(t)dt = \frac{2}{2T_o}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U_m \sin\omega_o t(-I_m)dt = 0$$

$$Q = -\frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} i(t)H\left\{u(t)\right\} dt = \left(\frac{-2}{2T_o}\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(-I_m)U_m\cos\omega_o t\, dt =$$

$$= \frac{2U_m I_m}{\pi}\sin\omega_o\varepsilon,$$

np. dla $2\varepsilon = T_o$

$$P = 0; \qquad Q = \frac{2U_m I_m}{\pi}.$$

Z kolei dla przypadku z rys. 13 mamy:

$$P = \frac{1}{2T_o}\cdot 2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin\omega_o t\cdot U_m I_m\, dt = 0,$$

$$Q = \left(\frac{-2}{2T_o}\right) \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} U_m \cos\omega_o t \cdot I_m \, dt = -\frac{2U_m I_m}{\pi} \sin\omega_o \varepsilon,$$

$$\text{dla} \quad 2\varepsilon = T_o, \qquad Q = \frac{-2U_m I_m}{\pi}.$$

Dla $\varepsilon \ll T_o$ zachodzi:

$$Q = \pm \frac{2U_m I_m}{\pi} \varepsilon\omega_o \left(\frac{\sin\omega_o\varepsilon}{\omega_o\varepsilon}\right) \cong \pm U_m I_m \left(\frac{2\varepsilon}{T_o}\right).$$

Moc bierna jest zatem wprost proporcjonalna do szerokości prostokątów prądowych 2ε.
Wartości skuteczne przebiegów nie uległy zmianie, nie zmieni się więc moc modułowa P_m, a ponieważ $P = 0$, to:

$$D = P_m.$$

Moc modułowa jest jednocześnie mocą dystorsji.
Moc deformacji K wynosi (przy $2\varepsilon = T_o$):

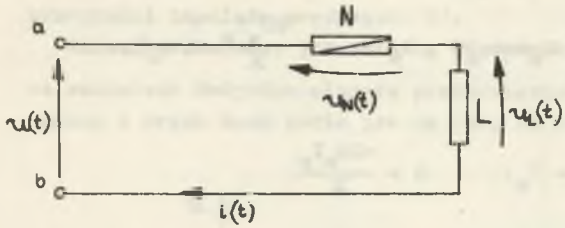
$$K = \sqrt{D^2 - Q^2} = \sqrt{\frac{U_m^2 I_m^2}{2} - \frac{4U_m^2 I_m^2}{\pi^2}} = \sqrt{2} \cdot 0{,}047\, U_m I_m.$$

Z rozważań powyższych wynika, że przesuwając względem napięcia $u(t)$ przebieg $i(t)$ możemy otrzymać interesujące przypadki: gdy jedna z mocy (bierna lub czynna) nie jest przez dwójnik wcale pobierana, a druga z nich jest funkcją szerokości impulsu prostokątnego 2ε. Przy pokazanych przesunięciach na rys. 12 i 13 układ jest odpowiednio odbiornikiem mocy biernej indukcyjnej i pojemnościowej.

Przy dowolnym innym przesunięciu przebiegu $i(t)$ wystąpią wszystkie rodzaje mocy, a więc P, Q, D, K, P_m.

5.2. Pobór mocy przez układ nieliniowy o wymuszeniu sinusoidalnym (patrz [4])

Rozważmy układ składający się z pasywnego elementu liniowego L o znanej funkcji przejścia $y(t)$ oraz szeregowo z nim połączonego elementu nieliniowego N o znanej charakterystyce napięciowo-prądowej $i_N = f(u_N)$ przedstawiony na rys. 14.



Rys. 14

Na zaciski wejściowe (a,b) podajemy napięcie sinusoidalne. Interesuje nad odpowiedź prądowa obwodu $i(t)$, przebieg napięcia na elemencie nieliniowym $u_N(t)$ oraz moce układu.

Przyjmujemy, że L jest równoległym dwójnikiem RC, a element N posiada charakterystykę:

$$i_N(t) = a_1\, u_N(t) + a_2\, u_N^2(t) + a_3\, u_N^3(t),$$

gdzie:

$$a_1,\ a_2,\ a_3 > 0.$$

Napięcie wejściowe:

$$u(t) = U_m \sin\Omega t.$$

Zachodzi:

$$u(t) = u_L(t) + u_N(t)$$

oraz dla elementu L:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u_L(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\left[u(t-\tau) - u_N(t-\tau)\right] d\tau =$$

$$= i_N(t) = a_1\, u_N(t) + a_2\, u_N^2(t) + a_3\, u_N^3(t).$$

Stąd:

$$a_1\, u_N + a_2\, u_N^2 + a_3\, u_N^3 + \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u_N(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(t-\tau)\, d\tau \tag{5.01}$$

Ostatnie nieliniowe równanie całkowe jest podstawowym równaniem analizy przedstawionego układu i zostanie rozwiązane metodą transformacji Volterry (patrz [4]). Napięcie na elemencie nieliniowym $u_N(t)$ rozwijamy w szereg całkowy z zaznaczoną dokładnością:

$$u_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 + \iint_{-\infty}^{\infty} w_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1).$$

$$. \; u(t-\tau_2)d\tau_1 \; d\tau_2 + \iiint_{-\infty}^{\infty} w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)$$

$$. \; u(t-\tau_3)d\tau_1 \; d\tau_2 \; d\tau_3, \qquad (5.02)$$

gdzie:

$$w_1(\tau_1), \quad w_2(\tau_1,\tau_2), \quad w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$$

tzw. funkcje wagi, które należy wyznaczyć.

Wstawiając równanie (5.02) do (5.01), a następnie porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach napięcia $u(t)$, mamy:
np. dla wyrazu liniowego:

$$a_1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1\right\} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)u(t-\tau) \; d\tau. \qquad (5.03)$$

Transformując (5.03) wg Fouriera znajdujemy:

$$W_1(\omega_1) = \frac{Y(\omega_1)}{a_1+Y(\omega_1)} \qquad (5.04)$$

co w dziedzienie czasu daje $w_1(\tau_1)$.

$Y(\omega_1)$ - jest transformatę Fouriera funkcji przejścia $y(t)$.

Mamy tu:

$$Y(\omega_1) = G + j\omega_1 C,$$

G, C - odpowiednio konduktancja i pojemność elementu L.

Analogicznie znajdujemy:

$$W_2(\omega_1,\omega_2) = -\frac{a_2 W_1(\omega_1)W_1(\omega_2)}{a_1+Y(\omega_1+\omega_2)} \tag{5.05}$$

co w dziedzinie czasu odpowiada funkcji $w_2(\tau_1,\tau_2)$ oraz

$$W_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = -\frac{a_3 W_1(\omega_1)W_1(\omega_2)W_1(\omega_3)+2a_2 W_1(\omega_1)W_2(\omega_2,\omega_3)}{a_1+Y(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} \tag{5.06}$$

co odpowiada funkcji wagi $w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$.

Znalezione oryginały wyrażeń (5.04), (5.05), (5.06) są w postaci:

$$w_1(\tau_1) = A\,e^{-\frac{\tau_1}{T_1}},$$

$$w_2(\tau_1,\tau_2) = B\,e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} + C e^{-\frac{\tau_1}{T_1}} e^{-\frac{\tau_2}{T_1}},$$

$$w_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = D\,e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} + E\,e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} + F\,e^{-\frac{\tau_1}{T_1}} e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} + G_o\,e^{-\frac{\tau_1}{T_1}} e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} +$$

$$+ H\,e^{\frac{\tau_1}{T_1}} e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} + J\,e^{-\frac{\tau_1}{T_1}} e^{\frac{\tau_2}{T_1}} e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} + K\,e^{-\frac{\tau_1}{T_1}} e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} e^{\frac{\tau_3}{T_1}} +$$

$$+ M(\tau_3-\tau_2)\,e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\left[N\,e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} e^{\frac{\tau_3}{T_1}} + P\right], \tag{5.07}$$

gdzie wielkości od A-P są stałymi zależnymi od wartości rezystancji R i pojemności C obwodu L oraz od współczynników charakterystyki elementu N, a

$$T_1 = \frac{C}{a_1+G}.$$

Wstawiając (5.07) do wyrażenia (5.02) i przyjmując, że dla $t<0$, $u(t) = 0$, znajdujemy przebieg napięcia na elemencie nieliniowym $u_N(t)$.

Otrzymamy:

$$u_N(t) = \int_0^{\infty} A\, e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, U_m \sin\Omega(t-\tau_1)\, d\tau_1 + \iint_0^{\infty}\left[B\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} + C\, e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\right].$$

$$.\ U_m \sin\Omega(t-\tau_1)\, U_m \sin\Omega(t-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 +$$

$$+ DU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ EU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ FU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ G_0 U_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ HU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{\frac{\tau_1}{T}}\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1'\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ JU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, e^{\frac{\tau_2}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ KU_m^3 \iiint_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_1}{T_1}}\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\, e^{\frac{\tau_3}{T_1}} \sin\Omega(t-\tau_1)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_2)\,.\,\sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 +$$

$$+ U_m^3 \iiint_0^\infty M(\tau_3-\tau_2)\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}} \left[N\, e^{-\frac{\tau_2}{T_1}}\, e^{\frac{\tau_3}{T_1}} + P \right] \sin\Omega(t-\tau_1) \cdot \sin\Omega(t-\tau_2) \cdot$$

$$\cdot \sin\Omega(t-\tau_3)\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3. \qquad (5.08)$$

Ponieważ poszukujemy rozwiązania okresowego, a także z punktu widzenia stabilności układu współczynniki przy rozbieżnych całkach rozwiązania (5.08) muszą znikać, tzn. muszą być spełnione poniższe warunki:

$$H = J = K = M = N = P = 0. \qquad (5.09)$$

Wtedy $u_N(t)$ ma postać:

$$u_N(t) = U_o + U_{m1}\sin(\Omega t+\varphi_1) + U_{m2}\sin(2\Omega t+\varphi_2) +$$

$$+ U_{m3}\sin(3\Omega t+\varphi_3), \qquad (5.10)$$

a przebieg prądu w obwodzie określony bezpośrednio charakterystyką elementu N będzie typu:

$$i(t) = i_N(t) = I_o + \sum_{K=1}^{K=9} I_{mk}\sin(k\Omega t+\psi_k). \qquad (5.11)$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń widać, że dla przyjętych w rozważanym obwodzie założeń i warunków napięcie $u_N(t)$ zawiera trzy pierwsze harmoniczne, a w prądzie wystąpi ich dziewięć. Znamy zatem charakter przebiegów na zaciskach (a,b) układu. Moce pobierane przez układ nieliniowy na zaciskach (a,b) wynoszą odpowiednio:

$$P = \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} u(t)i(t)dt = \frac{1}{2T_o}\int_{-T_o}^{T_o} U_m\sin\Omega t \cdot \Big[I_o +$$

$$+ \sum_{K=1}^{K=9} I_{mk}\sin(k\Omega t+\psi_k) \Big] dt = \frac{1}{2} U_m I_{m1}\cos\psi_1$$

lub

$$P = U\, I_1 \cos\psi_1, \qquad (5.12)$$

gdzie:

U - wartość skuteczna napięcia zasilania u(t),

I_1 - wartość skuteczna pierwszej harmonicznej prądu.

$$Q = \left(-\frac{1}{2T_o}\right)\int_{-T_o}^{T_o} i(t)H\left\{u(t)\right\}dt = \left(-\frac{1}{2T_o}\right)\int_{-T_o}^{T_o}\Big[I_o +$$

$$+\sum_{K=1}^{K=9} I_{mk}\sin(k\Omega t+\varphi_k)\Big]U_m\cos\Omega t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}U_m I_m\sin\varphi_1$$

lub

$$Q = -UI_1\sin\varphi_1. \tag{5.13}$$

Moc pozorna:

$$S = \left|P+jQ\right| = U I_1 = \frac{1}{2}U_m I_{m1}. \tag{5.14}$$

Moc modułowa:

$$P_m = U I = U\sqrt{I_o^2 + \sum_{K=1}^{K=9} I_k^2}, \tag{5.15}$$

gdzie:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}.$$

Współczynnik mocy układu:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m} = \frac{I_1\cos\varphi_1}{\sqrt{I_o^2 + \sum_{K=1}^{K=9} I_k^2}}. \tag{5.16}$$

Moc dystorsji:

$$D = \sqrt{P_m^2 - P^2} = \sqrt{U^2 I^2 - U^2 I_1^2 \cos^2\varphi_1} =$$

$$= U\sqrt{I_o^2 + I_1^2 \sin^2\varphi_1 + \sum_{K=2}^{K=9} I_k^2} = U\, I_\varphi, \qquad (5.17)$$

gdzie:

$$I_\varphi = \sqrt{I_o^2 + I_1^2 \sin^2\varphi_1 + \sum_{K=2}^{K=9} I_k^2}$$

jest wartością skuteczną prądu $i_\varphi(t)$ występującego w rozkładzie ortogonalnym $i(t)$.

Moc deformacji:

$$K = \sqrt{P_m^2 - S^2} = \sqrt{D^2 - Q^2} = U\sqrt{I_o^2 + \sum_{K=2}^{K=9} I_k^2}. \qquad (5.18)$$

Należy zauważyć, że w mocy K nie występuje pierwsza harmoniczna prądu.

Współczynnik deformacji:

$$\cos\gamma = \frac{S}{P_m} = \frac{I_1}{\sqrt{I_o^2 + \sum_{K=1}^{K=9} I_k^2}} \qquad (5.19)$$

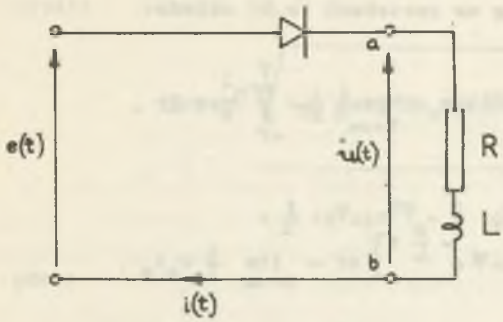
a współczynnik obciążenia:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \cos\varphi_1.$$

5.3. Współczynnik mocy układu (rys. 15) zasilanego napięciem sinusoidalnym prostowanym

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 15 i wyznaczmy współczynnik mocy tego układu na zaciskach (a, b).

$$e(t) = U_m \sin\Omega t.$$



Rys. 15

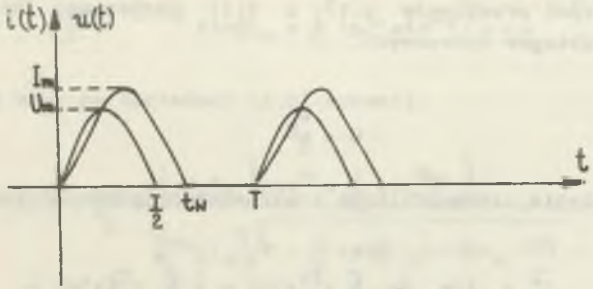
Przebiegi napięcia i prądu na zaciskach odbiornika RL (a,b) wynoszą dla jednego cyklu odpowiednio:

$$u(t) = \begin{cases} U_m \sin\Omega t, & \text{dla } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{dla } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

oraz:

$$i(t) = \begin{cases} I_m\left[\sin(\Omega t - \Psi) + \sin\Psi\, e^{-\frac{R}{L}t}\right], & \text{dla } 0 < t < t_w \\ 0 & \text{dla } t_w < t < T \end{cases}$$

i są pokazane na rys. 16:



Rys. 16

gdzie:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2+\Omega^2L^2}} \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Omega L}{R}$$

t_w - czas przejścia prostownika w stan nieprzewodzenia.

Na podstawie (3.03) mamy moc czynną na zaciskach (a,b) układu:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)i(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} U_m \sin\Omega t \,.$$

$$. \; I_m \left[\sin(\Omega t-\varphi) + \sin\varphi \, e^{-\frac{R}{L}t}\right] dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} U_m I_m \,.$$

$$. \left\{ \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\Omega t \sin(\Omega t-\varphi) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\Omega t \sin\varphi \, e^{-\frac{R}{L}t} \, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} U_m \, I_m \cos\varphi + \frac{1}{2\pi} U_m \, I_m \sin^3\varphi$$

$$P = \frac{1}{4} U_m \, I_m \left[\cos\varphi + \frac{2}{\pi} \sin^3\varphi\right]. \qquad (5.20)$$

Wartości skuteczne przebiegów $u(t)$ i $i(t)$ wyznaczamy bezpośrednio z (3.01) dla przebiegów okresowych.
Otrzymamy:

$$U = \frac{U_m}{2}$$

- jako dla napięcia sinusoidalnego prostowanego jednopołówkowo i

$$I^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} i^2(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_w} i^2(t)dt =$$

$$= \int_0^{t_w} I_m^2 \left[\sin^2(\Omega t-\varphi) + 2\sin(\Omega t-\varphi) \sin\varphi \, e^{-\frac{R}{L}t} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\varphi \, e^{-2\frac{R}{L}t}\right] dt = \frac{I_m^2}{4} \left[\frac{2t_w}{T} - \right.$$

$$- \frac{1}{\pi} \cos\Omega t_w \sin(\Omega t_w - 2\varphi) - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{R}{L}t_w} \sin\Omega t_w +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}\varphi \sin^2\varphi - \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}\varphi \sin^2\varphi \, e^{-2\frac{R}{L}t_w} \right].$$

Czyli:

$$I = \frac{I_m}{2}\sqrt{k - \frac{1}{\pi}\cos\Omega t_w \sin(\Omega t_w - 2\varphi) - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{R}{L} t_w} \sin\Omega t_w + \frac{1}{\pi} tg\varphi \sin^2\varphi - \frac{1}{\pi} tg\varphi \sin^2\varphi \, e^{-2\frac{R}{L} t_w}}, \qquad (5.21)$$

gdzie

$$k = \frac{t_w}{\frac{T}{2}} \quad \text{oraz} \quad 1 < k < 2$$

zależnie od parametrów RL.

Moc modułowa:

$$P_m = U\,I = \frac{U_m}{2} \cdot \frac{I_m}{2}\sqrt{k - \frac{1}{\pi}\cos\Omega t_w \cdot \sin(\Omega t_w - 2\varphi) - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{R}{L} t_w} \sin\Omega t_w + \frac{1}{\pi} tg\varphi \sin^2\varphi \left[1 - e^{-2\frac{R}{L} t_w}\right]}. \qquad (5.22)$$

Współczynnik mocy na zaciskach (a,b) wynosi:

$$\cos\varphi = \frac{P}{P_m} = \frac{\frac{1}{4} U_m I_m \left[\cos\varphi + \frac{2}{\pi}\sin^3\varphi\right]}{\frac{1}{4} U_m I_m \sqrt{k - \frac{1}{\pi}\cos\Omega t_w \sin(\Omega t_w - 2\varphi) - \frac{4}{\pi} e^{-\frac{R}{L} t_w} \sin\Omega t_w + \frac{1}{\pi} tg\varphi \sin^2\varphi \left(1 - e^{-2\frac{R}{L} t_w}\right)}} \cdot \qquad (5.23)$$

Z relacji (5.23) widać, że współczynnik mocy jest złożoną funkcją kąta φ oraz zależy od czasu t_w (chwili przejścia prostownika w stan zaporowy), a obydwa te parametry zależą od wartości rezystancji i indukcyjności RL odbiornika.

Przy ustalonym czasie t_w, można wyznaczyć wartość kąta φ, a co zatem idzie dobrać wielkości R i L dla żądanego współczynnika mocy.

Weźmy przykładowo:

$$k = 1{,}5; \quad \text{tzn.} \quad t_w = 1{,}5\,\frac{T}{2} = 0{,}75\,T.$$

Wtedy:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\Psi + \frac{2}{\pi}\sin^3\Psi}{\sqrt{1{,}5 + \frac{4}{\pi}e^{-\frac{R}{L}t_w} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{tg}\Psi\sin^2\Psi\,(1 - e^{-2\frac{R}{L}t_w})}}$$

Kąt Ψ, dla którego zachodzi $k = 1{,}5$ można wyznaczyć z warunku zerowania się prądu $i(t)$ dla chwili $t_w = 0{,}75\,T$, tzn. z równania:

$$\sin(\Omega . 0{,}75T - \Psi) + \sin\Psi\, e^{-\frac{R}{L}0{,}75T} = 0$$

lub

$$\mathrm{tg}\Psi = e^{1{,}5\pi\,\mathrm{ctg}\Psi}.$$

LITERATURA

[1] Titchmarsh E.C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford at the Clarendon Press second Edition 1948.

[2] Wiener N.: The Fourier Integral and Certain of Its Applications. Cambridge University Press, N. York, 1933.

[3] Papoulis A.: The Fourier Integral and Its Applications. McGraw-Hill Book Comp. INC. 1962.

[4] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 46, 1975.

[5] Fryze S.: Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. P.E. 1931, Nr 7 i 8.

[6] Gabor D.: Theory of Communications. Inst. Electr. Engrs. 93,1946, 429.

[7] Nowomiejski Z.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalformigen Vorgangen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 8, s. 244-254. 1967.

[8] Demidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności, WNT 1972.

[9] Mikusiński J.,Sikorski R.: Elementarna teoria dystrybucji, PWN, Warszawa 1964.

Przyjęto do druku w czerwcu 1976 r.

Recenzent: prof. dr inż. Tadeusz Puchałka - Politechnika Poznańska

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono teorię mocy układów elektrycznych, w którym występują przebiegi o skończonej mocy, w szczególności przebiegi okresowe, prawie okresowe i w różny sposób modulowane. W oparciu o uogólnioną transformację Fouriera oraz analizę funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej przebiegów wyprowadzono relacje dla podstawowych mocy. Otrzymano:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\omega)(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega,$$

gdzie:

P, Q - odpowiednio moce czynna i bierna za zaciskach układu,

$\theta(\omega)$ - transformata Fouriera funkcji $\vartheta(\tau)$ korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu na tych zaciskach.

Omówiono zagadnienie przenoszenia mocy przez czwórnik liniowy i wyprowadzono związki między przebiegami czasowymi na wejściu i wyjściu układu, jak również pomiędzy ich uogólnionymi transformatami Fouriera a funkcjami korelacji własnej i wzajemnej. W szczególności dla czwórnika "Γ" wyprowadzono relacje określające wpływ parametrów czwórnika na pobór mocy biernej.

Wiele uwagi w pracy poświęcono zagadnieniu występowania w takich obwodach mocy dystorsji i pokazano jak istotną rolę odgrywa w rozważaniach prowadzących do poprawy współczynnik mocy. Podano warunek minimalizacji mocy dystorsji układu. Otrzymano:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\varphi}^{2}(t)dt < \infty$$

gdzie:

$i_{\varphi}(t)$ - składnik rozkładu ortogonalnego prądu wejściowego układu i(t),

$$i_{\varphi}(t) = i(t) - \lambda u(t).$$

Pokazano zastosowanie uogólnionej teorii mocy do przebiegów okresowych i prawie okresowych w konkretnych układach liniowych i nieliniowych.

РЕЗЮМЕ

В работе представлена теория мощности в электрических схемах, в которых встречаются процессы с конечной мощностью, особенно периодические процессы, почти периодические и модулированные разными методами. Исходя из обобщённой трансформации фурьера и анализа функции автокорреляции и взаимой корреляции процесса, выведены соотношения для основных мощностей.

Получено:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega,$$

где:

P, Q – соответственно реактивная и пассивная мощность на зажимах схемы,

$\Theta(\omega)$ – трансформата фурьера функции $\vartheta(\tau)$ взаимной корреляции пробегов напряжения и тока на этих зажимах.

Обсуждена проблема переноса мощности через линейную крестовину и выведено отношение между характеристиками на входе н выходе схемы, а также между их обобщёнными трансформатами фурьера и функциями собственной и взаимной корреляции. Особенно для креотовины "Г" выведено отношение, определяющее влияние параметров крестовины на потребление пассивной мощности. В работе обращено внимание на проблему наличия в таких схемах дисторсии и показано, как важное значение имеет она в рассуждениях ведущих к улучшению коэффициента мощнооти. Показаны условия сведения к минимуму мощности дисторсии схемы. Получено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\psi}^{2}(t)\,dt < \infty$$

где:

$i_{\psi}(t)$ – составной элемент разложения ортогонального входного тока схемы $i(t)$,

$$i_{\psi}(t) = i(t) - \lambda u(t).$$

Показано применение обобщённой теории мощности для периодических пробегов и почти периодических в конкретных линейных и нелинейных схемах.

SUMMARY

In the paper the theory of power in electric networks with finite power processes was shown. Especially the periodic, almost periodic and modulated in different ways functions were concerned.

The relations for basic powers:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega)(1+\mathrm{sgn}\,\omega)\, d\omega,$$

were obtained on the ground of the generalized Fourier transform and analysis of the correlation and autocorrelation functions, where:

- P, Q - active and reactive power on the terminals of the network,
- $\Theta(\omega)$ - Fourier transform of $\vartheta(\tau)$,
- $\vartheta(\tau)$ - correlation fuction of voltage and current on the terminals of the network.

The problem of transmission of the power in linear two-ports was discussed.

The relations between input and output functions in the time domain andt the realtions between their generalized Fourier transforms and correlation and autocorrelation functions were obtained. For the two-port of the type "Γ" the connection between the elements and input reactive power was shown.

The problem of distortion power and its important part in the correction of power factor was also discussed. The condition for minimalization of distortion power was given.

The condition was:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\psi}^{2}(t)\,dt < \infty$$

where:

- $i_{\psi}(t)$ - the component of orthogonal factoring of the input current $i(t)$,

$$i_{\psi}(t) = i(t) - \lambda u(t).$$

Practical examples were carried out.