ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Jerzy Cyklis, Marek Bielut
Politechnika Krakowska

ZASTOSOWANIE ŁAŃCUCHÓW MARKOWA DO OKREŚLANIA ZAPOTRZEBOWANIA NA NARZĘDZIA

Streszczenie: W oparciu o przeprowadzoną analizę działania gospodarki narzędziowej w przedsiębiorstwie, przedstawiono koncepcję zastosowania teorii łańcuchów Markowa do matematycznego opisu tego systemu. Podano metodę określenia dziennego zapotrzebowania na narzędzia, oraz przedstawiono przykładowe rozwiązanie tego problemu.

1. Wstęp

W sterowaniu procesami szczególną rolę odgrywają ich modele matematyczne, dające możliwość lepszego zrozumienia interesującego nas systemu a w konsekwencji działań zmierzających do jego usprawnienia. Obserwując działalność gospodarki narzędziowej, a w szczególności obieg narzędzia w produkcji, dostrzec można pewne powtarzające się sytuacje. Ze stanowiska roboczego pracownik zwraca narzędzia, a następnie, w zależności od potrzeb, pobiera z wypożyczalni narzędzi pewną ich liczbę. Zaproponowano tu w charakterze modelu matematycznego łańcuchy Markowa, pozwalające na zrozumienie kolejnych etapów działania systemu, a także planowanie liczby zużycia narzędzi.

2. Wprowadzenie pojęć podstawowych

Na stanowisku produkcyjnym pojawiają się kolejno różne stany $E_0, E_1 \dots E_k, \dots E_m$ odpowiadające aktualnej liczbie narzędzi k. Zmiany tych stanów, tzn. przechodzenie z jednego stanu w drugi, mogą zachodzić w chwilach $0, 1, 2, \dots n$. Przez $p_k(n)$ oznaczono prawdopodobieństwo stanu E_k /inaczej liczby k narzędzi/ w chwili n. Wektor stanu w danej chwili n posiada m+1 współrzędnych:

$$\bar{p}(n) = \left[p_0(n),\ p_1(n) \dots p_k(n) \dots p_m(n)\right]. \qquad (1)$$

W związku z tym, iż w danej chwili na stanowisku musi wystąpić któryś ze stanów E_k, suma prawdopodobieństw w chwili n równa się 1, a więc:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(n) = 1. \qquad (2)$$

Każdej parze stanów $(E_k E_j)$ przyporządkować można wielkość p_{kj}, tzn. prawdopodobieństwa przejścia systemu ze stanu E_k w chwili n do stanu E_j w chwili $(n+1)$. W omawianym systemie dotyczy to przejścia ze stanu k narzędzi w etapie n w stan j narzędzi w etapie $(n+1)$. Prawdopodobieństwo j narzędzi w etapie $(n+1)$ wynosi:

$$p_j(n+1) = \sum_{k=0}^{m} p_{kj}\ p_k(n) \cdot \tag{3}$$

Wektor stanu $\overline{p}(n+1)$ po zastosowaniu zapisu macierzowego przedstawia się następująco:

$$\overline{p}(n+1) = \left[p_o(n)\ p_1(n) \dots\ p_k(n) \dots p_m(n)\right] \times \begin{bmatrix} p_{oo} \dots p_{oj} \dots p_{om} \\ p_{1o} \dots p_{1j} \dots p_{1m} \\ p_{mo} \dots p_{mj} \dots p_{mm} \end{bmatrix} = \overline{p}(n)\ .\ [M] \tag{4}$$

$[M]$ jest macierzą, której każdy wiersz podaje prawdopodobieństwa przejścia z danego stanu do wszystkich możliwych do uzyskania stanów / nie wyłączając stanu wyjściowego/. W analizowanym łańcuchu Markowa prawdopodobieństwo $p_k(n)$ dla dużych n /tzw. stan ustalony / staje się niezależne od stanu początkowego $p_o(n)$. To graniczne prawdopodobieństwo stanu równowagi oznaczono przez p_k:

$$p_k = \lim_{n \to \infty} p_k(n) \cdot \tag{5}$$

Tak więc w stanie ustalonym prawdopodobieństwo zaistnienia stanu E_k po kroku n jest takie samo jak po kroku (n+1), a więc:

$$p_k(n+1) = p_k(n) = p_k . \tag{6}$$

Uwzględniając (4), otrzymano

$$\overline{p}(n) = \overline{p}(n) \cdot [M] \cdot \tag{7}$$

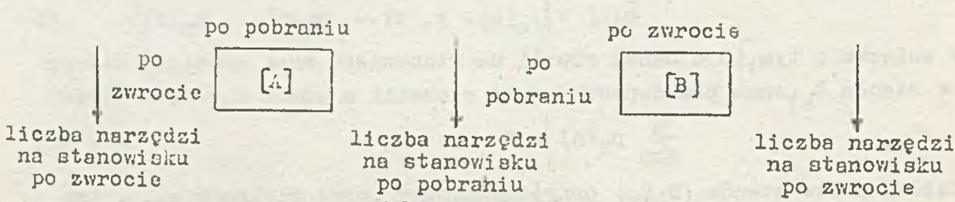
Po rozpisaniu otrzymano:

$$\left[p_o\ p_1 \dots p_k \dots p_n\right] = \left[p_o\ p_1 \dots p_k \dots p_m\right] \times \begin{bmatrix} p_{oo} \dots p_{oj} \dots p_{om} \\ p_{1o} \dots p_{1j} \dots p_{1m} \\ p_{mo} \dots p_{mj} \dots p_{mm} \end{bmatrix} \cdot \tag{8}$$

Z tego wzoru, po przejściu na układ równań z uwzględnieniem (2), można otrzymać wartości prawdopodobieństw systemu w stanie ustalonym. W tym celu należy ustalić wartości elementów macierzy $[M]$.

3. Wyznaczenie macierzy $[M]$.

Stan powtarza się okresowo: na stanowisku znajduje się określona liczba narzędzi, następuje zwrot oraz pobranie. Tego typu zmiany powtarzają się co pewien określony okres czasu.



Jeżeli można zbudować macierz $[A]$ określającą prawdopodobieństwo przejścia ze stanu na stanowiku po zwrocie do stanu narzędzi po pobraniu, oraz macierz $[B]$ określającą prawdopodobieństwo przejścia ze stanu przed zwrotem do stanu po zwrocie, to można otrzymać macierz $[M]$ (4):

$$[M] = [A] \cdot [B] \tag{9}$$

opisującą prawdopodobieństwa przechodzenia w różne stany na stanowisku pomiędzy kolejnymi chwilami zwrotu:

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \boxed{[M]} & \downarrow \\ \text{liczba narzędzi na stanowisku po zwrocie} & & \text{liczba narzędzi na stanowisku po zwrocie} \end{array}$$

Macierze [A] i [B] zbudowane zostały w oparciu o badania statystyczne, przeprowadzone w Wydziałowej Wypożyczalni Narzędzi w FOS Ponar-Tarnów. Na badanym stanowisku pracownik posługiwał się narzędziem zespołowym, składającym się z gwintownika M10 oraz pogłębiacza stożkowego o kącie wierzchołkowym 120°, wykonując otwory gwintowane w żeliwnych korpusach obrabiarek. Pobierał on nowe narzędzia tylko wtedy, gdy zwrócił wszystkie poprzednio wypożyczone. Narzędzia zwracane lub pobierane były zawsze między 7^{00} a 7^{30}, przy czym nie zdarzyło się, aby pracownik więcej niż jeden raz w ciągu dnia pobierał i zwracał narzędzia do wypożyczalni. W związku z tym, kolejne stany /liczba narzędzi / na stanowisku po zwrocie rozumiemy jako stany w kolejnych n dniach o godzinie 7^{30}.

Macierz prawdopodobieństw p_{kj} danej liczby j narzędzi na stanowisku po pobraniu, w zależności od liczby k narzędzi na stanowisku po zwrocie wygląda następująco /macierz [A] /.

Tabela 1

Liczba narzędzi po zwrocie j	Liczba narzędzi na stanowisku k: 0	1	2	3
0	0	0,4	0,28	0,32
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

Macierz [B] prawdopodobieństwa liczby j narzędzi po zwrocie zależnych od liczby narzędzi k przed zwrotem na stanowisku pracy przedstawia tabela 2.

Tabela 2

Liczba narzędzi przed zwrotem j	Liczba narzędzi po zwrocie k: 0	1	2	3
0	1	0,0	0	0
1	0,49	0,51	0	0
2	0,24	0,28	0,48	0
3	0,16	0,1	0,21	0,53

Zgodnie ze wzorem (9) obliczamy macierz [M] /tabela 3 /

Tabela 3

	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	0,315	0,315	0,2	0,17
p_1	0,49	0,51	0	0
p_2	0,24	0,28	0,48	0
p_3	0,16	0,1	0,21	0,53

Opierając się na zależnościach (2) i (8), otrzymujemy układ 5 równań z 4 niewiadomymi:

$$\begin{aligned} p_0 + \quad & p_1 + \quad p_2 + \quad p_3 = 1 \\ 0{,}315\, p_0 + 0{,}49\, p_1 + 0{,}24\, p_2 + 0{,}16\, p_3 &= p_0 \\ 0{,}315\, p_0 + 0{,}51\, p_1 + 0{,}28\, p_2 + 0{,}10\, p_3 &= p_1 \\ 0{,}20\, p_0 + \quad + 0{,}48\, p_2 + 0{,}21\, p_3 &= p_2 \\ 0{,}17\, p_0 + \quad + 0{,}53\, p_3 &= p_3 \end{aligned} \qquad (10)$$

Po rozwiązaniu tego układu równań /jedno z nich jest równaniem zależnym/ otrzymano następujące prawdopodobieństwa stanu ustalonego :

$$p_0 = 0{,}34 \qquad p_1 = 0{,}35 \qquad p_2 = 0{,}18 \qquad p_3 = 0{,}13$$

Po pomnożeniu przez macierz $[D]$ prawdopodobieństw p_{kj} liczby narzędzi pobranych j w zależności od ich stanu k na stanowisku po zwrocie, otrzymano prawdopodobieństwa pobrania 0,1,2 lub 3 narzędzi:

$$\begin{bmatrix} 0{,}34 & 0{,}35 & 0{,}18 & 0{,}13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}28 & 0{,}32 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}657 & 0{,}137 & 0{,}096 & 0{,}11 \end{bmatrix}$$

Dzienne zapotrzebowanie na narzędzia otrzymano mnożąc wartości p_k przez odpowiadające im liczby narzędzi, otrzymując:

$$z = \sum_{k=0}^{m} p_k \cdot k = 0 \cdot 0{,}657 + 1 \cdot 0{,}137 + 2 \cdot 0{,}096 + 3 \cdot 0{,}11 = 0{,}659$$

4. Wnioski

Opisany powyżej model pozwala w sposób dość dokładny ocenić planowane wartości wskaźników w wypożyczalni narzędzi dla przypadków ustabilizowanego procesu produkcyjnego, tzn. dla sytuacji, gdy produkcja na stanowisku jest niezmienna. Do obliczeń używać można - oprócz danych statystycznych - dane uzyskiwane inną drogą, np. na podstawie prognoz czy też analizy procesu technologicznego. W przypadku zmiennego profilu produkcji podany model może stanowić podstawę dla symulacji systemu stanowiącej jedyną drogę oceny istotnych jego wskaźników. Należy też zwrócić uwagę, iż w gospodarce narzędziowej zachodzi wiele zdarzeń o charakterze losowym,

takich jak: stany narzędzi w wydziałowej wypożyczalni narzędzi na zakończenie zmiany, liczba narzędzi przekazywanych do regeneracji w ustalonych odstępach czasu i inne.
Jak zostało pokazane na przykładzie, modelowanie tego typu przypadków za pomocą teorii łańcuchów Markowa jest bardzo efektywne, tak więc teoria ta stanowić może podstawę do kompleksowej analizy systemu gospodarki narzędziowej.

LITERATURA

[1] Horczyczak A. : Organizacja wydziału narzędziowego. WNT, Warszawa 1970.
[2] Kaufmann A., Faure R. : Badania operacyjne na co dzień. PWN, Warszawa 1968.
[3] Konowrocki T. : Model sterowania zaopatrzeniem produkcji w narzędzia. Przegląd Organizacji Nr 2/1976.
[4] Wasiak J. : Gospodarka narzędziowa. WNT, Warszawa 1969.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕБОВАНИЯ ИНСТРУМЕНТОВ

Р е з ю м е

На основе анализа деятельности инструментального хозяйства, изображается идея применения теории цепей Маркова для математического описания этой системы. Представлено метод определения дневного запроса на инструменты а также приводится примерное решение этой проблемы.

THE APPLICATION OF MARKOW'S CHAINS THEORY TO EVALUATION OF THE DEMAND FOR TOOLS

S u m m a r y

On the base of worked out analysis of tooling service functioning in a factory, the concept of application of Markow's chains theory to the mathematical discription of this system is presented. The evaluation method of the daily demand for tools and an example of solution of this problem is presented.