ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Ryszard Gessing

Politechnika Śląska

METODA DEKOMPOZYCJI I KOORDYNACJI STATYSTYCZNIE OPTYMALNEGO, STATYCZNEGO ROZDZIAŁU ZASOBÓW[x]

Streszczenie. W pracy rozpatrywana jest dwupoziomowa, hierarchiczna struktura sterowania rozdziałem zasobów w dużym systemie statycznym. Przedstawia się oryginalną metodę dekompozycji i koordynacji, w której punkty decyzyjne wyższego i niższego poziomu posiadają różną informację i minimalizowana jest wartość oczekiwana wskaźnika jakości.

1. Wprowadzenie

W literaturze opisanych jest wiele metod dekompozycji i koordynacji, a także optymalizacji z wykorzystaniem struktury hierarchicznej, przy czym przeważnie stosowane jest podejście deterministyczne [1, 4]. Dla przypadków niepełnej informacji stosuje się również podejście probabilistyczne [3].

Niniejsza praca różni się tym od innych, że zakłada się w niej, iż punkty decyzyjne niższego i wyższego poziomu posiadają różną informację. Punkty decyzyjne niższego poziomu posiadają informację, która jest istotna dla poszczególnych podsystemów, a punkt decyzyjny wyższego poziomu - informację istotną dla całego systemu.

Do rozwiązania rozpatrywanych problemów jest stosowana metoda programowania dynamicznego w wersji stochastycznej.

2. Sformułowanie problemu pierwotnego

Będziemy rozważać duży system złożony z M podsystemów z których każdy opisywany jest równaniem

$$y_i = f_i(u_i, w_i), \quad i = 1,2,\dots,M \tag{1}$$

---

[x] Praca wykonana w ramach Kierunku 01 Problemu Rządowego PR 7, koordynowanego przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej.

gdzie y_i, u_i, w_i oznaczają odpowiednio wektory wyjścia, sterowania i zakłócenia i-tego podsystemu, a f_i - określone funkcje swoich argumentów.

Pierwotny wskaźnik jakości wyrażający straty w całym systemie, które chcielibyśmy minimalizować, ma postać

$$I = \sum_{i=1}^{M} L_i^*(y_i, u_i, z_i^*), \qquad /2/$$

gdzie L_i^* - określone funkcje skalarne swoich argumentów, a z_i^* - wektory zmiennych losowych, które mogą reprezentować np. zapotrzebowania na zasoby w i-tym podsystemie. Podstawiając /1/ do /2/ możemy pierwotny wskaźnik jakości przedstawić w postaci

$$I = \sum_{i=1}^{M} L_i(u_i, z_i), \qquad /3/$$

gdzie L_i odpowiednie funkcje skalarne swoich argumentów, a $z_i = [z_i^{*T}, w_i^T]^T$. Zakładamy, że wielkości u_i nie mają wpływu na zmienne losowe z_j, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots,M$.

Zakładamy, że zasoby wielkości sterujących u_i są ograniczone. Niechaj wektor Q określa ograniczenie przydziału zasobów dla całego systemu. Chcielibyśmy, aby sumaryczny przydział zasobów $\sum_{i=1}^{M} u_i$ dla całego systemu nie przewyższał w zasadzie wielkości Q. Rozpatrywanie wielkości u_i i Q w postaci wektorów oznacza, że prezentowana teoria może być stosowana w przypadku gdy dzielone zasoby mają kilka składników, reprezentowanych przez składowe tych wektorów.

Rozwiązanie problemu pierwotnego, polegające na znalezieniu sterowań u_i, dla których pierwotny wskaźnik jakości przyjmuje minimalną wartość i spełnione są ograniczenia, jest niemożliwe w przypadku niepełnej informacji.

Sformułowanie problemu wtórnego, który będzie możliwy do rozwiązania, zależeć będzie zarówno od dostępnej informacji, jak i od zaproponowanej struktury układu sterowania.

3. Struktura systemu sterowania i dostępna informacja

Zakładamy, że decyzje o rozdziale zasobów będą odbywały się na dwóch poziomach. W punkcie decyzyjnym wyższego poziomu będą podejmowane decyzje o wstępnym rozdziale zasobów pomiędzy poszczególne podsystemy, a w punktach decyzyjnych niższego poziomu - decyzje o ostatecznym przydziale zasobów dla każdego z M podsystemów.

Zakładamy, że w każdym punkcie decyzyjnym informacja o systemie składa się z dwóch składników. Pierwszy wynika z doświadczeń w przeszłości i jest dany w postaci odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych, drugi - wynika z pomiarów wykonywanych w poszczególnych punktach systemu. Zakładamy więc, że z każdym punktem decyzyjnym niższego poziomu dla i-tego podsystemu związany jest wektor informacji p_i, którego składowe mogą wynikać z pomiarów. Z punktem decyzyjnym wyższego poziomu związany jest wektor p. Wektory p_i zawierają bardziej szczegółową informację dotyczącą i-tego podsystemu, a wektor p - informację istotną dla całego systemu i nie zawiera pewnych składowych występujących w wektorach p_i.

Zakładamy, że wszystkie składowe, które występują w wektorze p, występują również w wektorach p_i lub - alternatywnie, że wielkości z_i i p_i nie zależą od p. Zakładamy, że składowe wektorów p, p_i, $i = 1,2,\ldots,M$ wybrane są w ten sposób, że możliwe jest określenie funkcji warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa, potrzebnych do wykonania występujących dalej operacji.

Oznaczamy przez q_i wstępny przydział zasobów przyznanych i-temu podsystemowi przez punkt decyzyjny wyższego poziomu. Wielkość q_i stanowi ocenę wielkości u_i przy decyzjach optymalnych, wyznaczoną przy wykorzystaniu informacji zawartej w wektorze p i odpowiednich rozkładach prawdopodobieństwa. Rodzaj stosowanej oceny powinien być w zasadzie dostosowany do postaci funkcji występujących we wskaźniku jakości /3/. Ponieważ takie dostosowanie jest trudne, w dalszych rozważaniach będziemy stosowali najczęściej używaną ocenę w postaci warunkowej wartości oczekiwanej. Mamy zatem

$$q_i = E_{|p}\, u_i, \quad i = 1,2,\ldots,M, \qquad /4/$$

gdzie $E_{|p}$ oznacza operację warunkowego uśrednienia przy zadanym p.

Decyzje o wielkościach q_i są wypracowywane na wyższym poziomie i wielkości te odgrywają rolę zmiennych koordynujących. Decyzje o ostatecznym przydziale zasobów u_i są wypracowywane w punktach decyzyjnych niższego poziomu. Ograniczenie /4/ pozostawia pewną swobodę w wyborze decyzji u_i punktom decyzyjnym niższego poziomu, które od wyższego poziomu otrzymują wytyczne w postaci wielkości q_i. Dzięki tej "swobodzie" punkty decyzyjne niższego poziomu mogą lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację.

Zakładamy, że zasoby znajdują się w jednym lub kilku magazynach, przy czym transport zasobów pomiędzy magazynami i również do poszczególnych podsystemów odbywa się bez ograniczeń.

4. Sformułowanie problemu wtórnego

Przez dopuszczalne algorytmy sterowania i-tego, $i = 1,2,\dots,M$, punktu decyzyjnego niższego poziomu oraz punktu decyzyjnego wyższego poziomu będziemy rozumieć odpowiednio zbiory funkcji $u_i = a_i(p_i, q_i)$ oraz $q_i = b_i(p)$, $i = 1,2,\dots,M$, z których każda odwzorowuje odpowiedni zbiór wielkości p_i, q_i oraz p, określony przez zakres ich zmian, na odpowiednie zbiory wartości u_i oraz q_i. Zakładamy przy tym, że funkcje te spełniają ograniczenia

$$b_i(p) = E_{|p}\, a_i\left[p_i,\ b_i(p)\right], \quad i = 1,2,\dots,M \tag{/5/}$$

$$\sum_{i=1}^{M} b_i(p) \leqslant Q \tag{/6/}$$

oraz, że wtórny wskaźnik jakości o postaci

$$I(a,\ b) = E \sum_{i=1}^{M} L_i\left\{a_i\left[p_i,\ b_i(p)\right],\ z_i\right\}, \tag{/7/}$$

gdzie $a = \left\{a_1, a_2, \dots, a_M\right\}$, $b = \left\{b_1, b_2, \dots, b_M\right\}$, przyjmuje dla tych funkcji określoną wartość.

P r o b l e m   w t ó r n y

Dla opisanego powyżej systemu, spośród dopuszczalnych algorytmów sterowania należy znaleźć algorytmy optymalne $u_i = a_i^o(p_i, q_i)$ oraz $q_i = b_i^o(p)$, $i = 1,2,\dots,M$, dla których wtórny wskaźnik jakości /7/ przyjmuje minimalną wartość, czyli

$$I(a^o,\ b^o) = \underset{a,b}{\mathrm{Min}}\ I(a,\ b), \tag{/8/}$$

gdzie $a^o = \left\{a_1^o,\ a_2^o, \dots, a_M^o\right\}$, $b^o = \left\{b_1^o,\ b_2^o, \dots, b_M^o\right\}$.

Ze sformułowania problemu wtórnego widać, że wyniki rozwiązania tego problemu mogą być stosowane w przypadkach kiedy w systemie możliwe jest generowanie dostatecznie licznego zbioru decyzji sterujących, dla którego uzasadnione jest stosowanie miary jakości w postaci wartości oczekiwanej /7/. Może mieć to miejsce np. wtedy, gdy w systemie co pewien czas zachodzi potrzeba rozdziału zasobów ograniczonych wielkością Q.

Należy podkreślić, że przy podejmowaniu decyzji zgodnych z algorytmami optymalnymi w magazynach systemu powinna się znajdować ilość zasobów większa niż Q, która pokryje ewentualnie zwiększoną aktualną potrzebę na zasoby. Dla poszczególnych realizacji decyzji może być bowiem $\sum_{i=1}^{M} u_i > Q$, a sformułowanie problemu wtórnego zapewnia, że tylko $E_{|P} \sum_{i=1}^{M} u_i \leqslant Q$. Potrzeba zwiększenia zapasów w magazynie, wynikająca z występujących w systemie trudnych do przewidzenia zakłóceń, jest znana i stosowana w praktyce.

5. Rozwiązanie problemu wtórnego

Postępując podobnie jak w [2], a więc wykorzystując Lemat 1 [2 str. 450] oraz zasadę optymalności można udowodnić sformułowane niżej twierdzenie

T w i e r d z e n i e 1

Dla rozważanego systemu rozwiązanie problemu wtórnego ma następujące własności.

T_1: Algorytm optymalny, $u_i = a_i^o(p_i, q_i)$ dla i-tego punktu decyzyjnego niższego poziomu może być wyznaczony niezależnie od innych algorytmów przez rozwiązanie zagadnienia minimalizacji w wyrażeniu:

$$S_i(p_i, q_i) = \operatorname*{Min}_{u_i} E_{|p_i} L_i(u_i, z_i), \qquad /9/$$

przy ograniczeniu

$$q_i = E_{|P} u_i, \qquad /10/$$

dla odpowiednio przyjętych zakresów zmian wektorów p_i i q_i.

T_2: Algorytm optymalny $q_i = b_i^o(p)$, $i = 1,2,\dots,M$, dla punktu decyzyjnego wyższego poziomu może być wyznaczony przez rozwiązanie zagadnienia minimalizacji w wyrażeniu

$$\bar{S}(p,Q) = \operatorname*{Min}_{q_1,\dots,q_M} \sum_{i=1}^{M} \bar{S}_i(p,q_i), \quad \text{gdzie} \quad \bar{S}_i(p,q_i) = E_{|P} S(p_i,q_i), \qquad /11/$$

przy ograniczeniu

$$\sum_{i=1}^{M} q_i \leqslant Q. \qquad /12/$$

dla odpowiednio przyjętego zakresu zmian wektora p.

Do rozwiązania występującego w /9/ problemu minimalizacji przy niekonwencjonalnych ograniczeniach /10/ można wykorzystać metodę mnożników Lagrange'a.

6. Problem liniowo-kwadratowy

Załóżmy teraz, że równania systemu i pierwotny wskaźnik jakości mają postać:

$$y_i = B_i u_i + w_i, \quad i = 1,2,\dots,M, \tag{/13/}$$

$$I = \sum_{i=1}^{M} (y_i^T Q_i y_i + u_i^T H_i u_i), \tag{/14/}$$

gdzie B_i - macierze, a Q_i i H_i - macierze symetryczne nieujemnie określone. Zakładamy, że zmienne losowe w_j są niezależne od decyzji u_i, $i,j = 1,2,\dots,M$.

Zgodnie z /9/ mamy

$$S_i(p_i,q_i) = \underset{u_i}{\mathrm{Min}}\, E_{|p_i}\left[(B_i u_i + w_i)^T Q_i (B_i u_i + w_i) + u_i^T H_i u_i\right] =$$

$$= \underset{u_i}{\mathrm{Min}}\left\{u_i^T(B_i^T Q_i B_i + H_i)u_i + 2u_i^T B_i^T Q_i \hat{w}_i + E_{|p_i} w_i^T Q_i w_i\right\}, \tag{/15/}$$

gdzie $\hat{w}_i = E_{|p_i} w_i$. Do rozwiązania zagadnienia minimalizacji w wyrażeniu /15/ z uwzględnieniem ograniczenia /10/ zastosujemy metodę mnożników Lagrange'a. Dodając do wyrażenia $E_{|p}\, S_i(p_i,q_i)$ człon $2\lambda_i(E_{|p}\, u_i - q_i) = E_{|p}\, 2\lambda_i(u_i - q_i)$, w którym λ_i oznacza, mnożnik Lagrange'a oraz różniczkując względem u_i i przyrównując do zera, otrzymujemy

$$(B_i^T Q_i B_i + H_i)u_i + B_i^T Q_i w_i + \lambda_i = 0 \cdot \tag{/16/}$$

Zakładając, że odpowiednia macierz odwrotna istnieje, mamy:

$$u_i = -(B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1}(B_i^T Q_i w_i + \lambda_i) \cdot \tag{/17/}$$

W celu wyznaczenia mnożnika λ_i podstawiamy /17/ do /10/ i otrzymujemy

$$\lambda_i = (B_i^T Q_i B_i + H_i)q_i - B_i^T Q_i \hat{w}_i\,, \tag{/18/}$$

gdzie $\hat{\hat{w}}_i = E_{|p}\, w_i$. Uwzględniając /18/ w /17/ mamy:

$$u_i = q_i - (B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1} B_i^T Q_i (\hat{w}_i - \hat{\hat{w}}_i). \qquad /19/$$

Podstawiając /19/ do /15/ i wykonując operację $E_{|p}$, otrzymujemy

$$\bar{S}_i(p, q_i) = q_i^T (B_i^T Q_i B_i + H_i) q_i + 2 q_i B_i^T Q_i \hat{\hat{w}}_i + \{\cdot\}, \qquad /20/$$

gdzie w nawiasach $\{\cdot\}$ występują wyrazy, które nie zależą od q_i.

Rozwiązując, zagadnienie minimalizacji w wyrażeniu /11/ przy ograniczeniu /12/, otrzymujemy

$$q_i = -(B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1} (B_i^T Q_i \hat{\hat{w}}_i + \lambda), \qquad /21/$$

gdzie

$$\lambda = 0 \quad \text{gdy} \quad -\sum_{i=1}^{M} (B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1} B_i^T Q_i w_i \leqslant Q, \qquad /22/$$

$$\lambda = -\left[\sum_{i=1}^{M} (B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1}\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} (B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1} B_i^T Q_i w_i + Q\right] \qquad /23/$$

gdy $\quad -\sum_{i=1}^{M} (B_i^T Q_i B_i + H_i)^{-1} B_i^T Q_i w_i \geqslant Q.$

T w i e r d z e n i e 2

W przypadku systemu opisanego równaniem /13/ i pierwotnego wskaźnika jakości /14/ algorytmy $u_i = a_i^o(p_i, q_i)$ oraz $q_i = b_i^o(p)$, $i = 1, 2, \ldots, M$, minimalizujące wtórny wskaźnik jakości są określone odpowiednio przez zależności /19/ oraz /21/ - /23/.

7. Wnioski i uwagi końcowe

1) Dzięki oryginalnemu sformułowaniu problemu i zróżnicowaniu informacji wyższego i niższego poziomu unika się przetwarzania dużej ilości informacji przez punkt decyzyjny wyższego poziomu, który dysponuje tylko informacją istotną dla całego systemu. Punkty decyzyjne niższego poziomu dysponują natomiast bardziej szczegółową informacją, istotną dla poszczególnych podsystemów.

2) Dzięki sformułowaniu oryginalnych niekonwencjonalnych ograniczeń punkt decyzyjny wyższego poziomu daje punktom decyzyjnym niższego poziomu wytyczne co do przydziału zasobów, pozostawiając im pewną swobodę, która umożliwia im przy podejmowaniu decyzji lepiej wykorzystać swoją bardziej szczegółową informację. Jest to zgodne ze stosowaną praktyką podejmowania decyzji w strukturze hierarchicznej, wypracowaną na drodze eksperymentalnej.

3) Optymalne algorytmy sterowania punktów decyzyjnych niższego poziomu można wyznaczyć oddzielnie dla każdego podsystemu. W przypadku problemu liniowo-kwadratowego rozwiązanie można uzyskać w postaci analitycznej.

4) W pracy ograniczono się do dwupoziomowej struktury hierarchicznej podejmowania decyzji. W analogiczny sposób można rozpatrywać strukturę hierarchiczną, zawierającą więcej niż dwa poziomy.

LITERATURA

[1] Findeisen W.: Wielopoziomowe układy sterowania. PWN, Warszawa 1974.

[2] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki t. XXI z. 4. 1976.

[3] Hassan M.F., Hurteau R., Singh M.G., Titli A.: Stochastic Hierarchical Control of a Large-scale River System, Materiały VII Kongresu IFAC, Helsinki 1978 r., Vol 2, ss. 1353-1360.

[4] Kulikowski R.: Sterowanie w wielkich systemach, WNT, Warszawa 1970.

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ И КООРДИНАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО, СТАТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотривается некоторая иерархическая структура системы управления разделением ресурсов в большой статической системе.

Показывается оригинальный метод декомпозиции и координации, в котором в размытых точках предпринятия решений используется различную информацию и минимизируется среднее значение показателя качества.

A METHOD OF DECOMPOSITION AND COORDINATION FOR STOCHASTIC, OPTIMAL, STATIC RESOURCE DISTRIBUTION

S u m m a r y

In the paper a two-level hierarchical control system structure for the resource distribution in the largescale static system has been considered. The original method of decomposition and coordination, in which the decision - makers of the lower and higher level have different information has been presented and the expected value of the performance index has been minimized.