

Seria: ELEKTRYKA z. 35

ANTONI BOGUCKI, EDWARD LAWERA, PAWEŁ SOWA  
Instytut Elektroenergetyki i Sterowania Układów

## BADANIE WPŁYWU STANÓW ZAKŁÓCENIOWYCH W SYSTEMIE ELEKTROENERGETYCZNYM NA PRACĘ SILNIKÓW INDUKCYJNYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodykę analitycznego badania przebiegów przejściowych w pracy silników indukcyjnych, stanowiących podstawowy odbiornik składowy energetycznych odbiorów przemysłowych. Przeprowadzono dyskusję modelu matematycznego silnika, rozważając możliwości analizy warunków jego pracy w stanach zakłóceń przy pomocy maszyny cyfrowej i analogowej.

### 1. Wstęp

Zagadnienie pracy odbiorów energetycznych – szczególnie odbiorów silnikowych – w warunkach stanów zakłóceń systemu elektroenergetycznego staje się coraz bardziej istotne. Wynika to z następujących faktów stwarzanych przez postępujący rozwój systemu elektroenergetycznego:

- znacznego skrócenia czasów działania automatyki zakłóceń i aparatury łączeniowej;
- coraz powszechniejszego instalowania układów automatyki zakłóceń bezpośrednio w stacjach odbiorczych, chodzi tu przede wszystkim o układy automatyki SPZ i SZR;
- wzrostu instalowanej mocy odbiorów oraz gabarytów i mocy silników;
- częstego zbliżenia węzłów odbiorczych, zasilających duże odbiory przemysłowe, do sieci systemowej najwyższych napięć. Np. w systemie krajowym coraz więcej odbiorów przechodzi na bezpośrednie zasilanie z sieci 110 kV poprzez jeden stopień transformacji. Proces ten powoduje wzajemne uzależnienie pracy automatyki zakłóceń tej sieci i warunków pracy odbiorów.

Stany zakłóceń w systemie elektroenergetycznym powodują przebiegi przejściowe w pracy odbiorów silnikowych. Te przebiegi przejściowe są od kilku lat przedmiotem intensywnych badań energetyków wielu krajów [5, 6, 7, 8]. Są to zarówno badania pomiarowe, jak i analityczne, przy czym zakres i dokładność tych ostatnich coraz bardziej wzrastają z uwagi na rozwój metod i maszyn obliczeniowych.

Stany zakłóceniami istotne dla pracy odbiorów silnikowych można podzielić następująco:

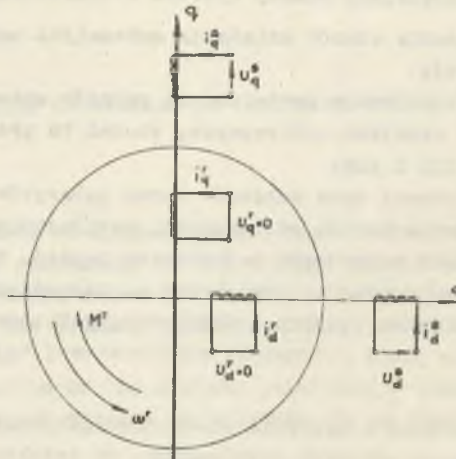
- a) zwarcia zewnętrzne,
- b) odłączenie odbioru od zasilania,
- c) ponowne załączenie odbioru.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że zazwyczaj w sytuacji praktycznej będzie występowała kombinacja podanych zakłóceń. Przebiegi przejściowe wywołane określonymi stanami zakłóceniami będą również zależne od warunków pracy odbiorów i systemu elektroenergetycznego. Najistotniejsze będą tutaj takie czynniki jak: czas trwania zakłócenia, lokalizacja zakłócenia w stosunku do odbioru rodzaj i sposób pracy odbiorów sąsiednich, rodzaj urządzeń napędzanych.

W niniejszym artykule przeprowadzono dyskusję modelu matematycznego silnika indukcyjnego, rozważając możliwości analizy przebiegów przejściowych przy pomocy maszyny analogowej i cyfrowej.

## 2. Model matematyczny silnika indukcyjnego

Trójfazowa maszyna indukcyjna może być reprezentowana przez analityczny, dwufazowy model maszyny uogólnionej d-q. Model ten będzie miał postać przedstawioną na rysunku 1 [1,2].



Rys. 1. Dwufazowy równoważny model d-q maszyny indukcyjnej

Dla przedstawionego modelu będzie obowiązywało równanie macierzowe [1,2]:

$$\begin{bmatrix} U_d^s \\ U_q^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + DL^s & 0 & DM & 0 \\ 0 & R^s + DL^s & 0 & DM \\ DM & M\omega^r n & R^r + DL^r & nL^r \omega^r \\ -M\omega^r n & DM & -nL^r \omega^r & R^r + DL^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} \quad (1)$$

w którym

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$R^s = R_d^s = R_q^s = R_R^s = R_S^s = R_T^s$$

$$R^r = R_d^r = R_q^r = R_R^r = R_S^r = R_T^r$$

$$L^s = L_d^s = L_q^s = \frac{3}{2} L_R^s = \frac{3}{2} L_S^s = \frac{3}{2} L_T^s$$

$$L^r = L_d^r = L_q^r = \frac{3}{2} L_R^r = \frac{3}{2} L_S^r = \frac{3}{2} L_T^r$$

$$M = M_q^{sr} = M_d^{sr} = M_{RR}^{sr} = M_{SR}^{sr} = M_{TR}^{sr} = M_{RS}^{sr} = M_{SS}^{sr} = M_{TS}^{sr} = M_{RT}^{sr} = M_{ST}^{sr} = M_{TT}^{sr}$$

s - indeks oznaczający wielkości stojana

r - indeks oznaczający wielkości wirnika

R, S, T - indeksy oznaczające fazy

R - rezystancja uzwojenia

L - indukcyjność własna

M - indukcyjność wzajemna

$\omega^m$  - prędkość obrotowa

n - ilość par biegunów

pozostałe oznaczenia jak na rysunku 1.

Równanie (1) opisuje stronę elektryczną silnika indukcyjnego, natomiast od strony mechanicznej silnik może być opisany równaniem:

$$-M^r = J \frac{d\omega^r}{dt} + B\omega^r = -M_e, \quad (2)$$

w którym:

- $M^x$  - moment obciążenia
- $J$  - całkowity moment bezwładności
- $B$  - współczynnik tarcia lepkiego w ruchu obrotowym
- $M_e$  - moment elektromagnetyczny.

Moment elektromagnetyczny  $M_e$  w równaniu(2) określony jest relacją [1,2].

$$M_e = n M (i_d^s i_q^s - i_q^x i_d^x). \quad (3)$$

Moment obciążenia  $M^x$  opisać można równaniem:

$$M^x = M_0^x + (M_N^x - M_0^x) \left( \frac{\omega^x}{\omega_N^x} \right)^0, \quad (4)$$

w którym

- $M_0^x$  - moment obciążenia dla  $\omega^x = 0$
- $\omega_N^x$  - znamionowa prędkość obrotowa silnika
- $C$  - współczynnik zależności momentu  $M^x$  od prędkości obrotowej.

Równanie 4 można zapisać w postaci:

$$M^x = M_0^x + M_1 (\omega^x)^0. \quad (4a)$$

Równania (1) są równaniami różniczkowymi nieliniowymi, które analitycznie można rozwiązywać jako równania liniowe w określonych przedziałach czasowych. Dokładność takiego rozwiązania jest tym większa, im mniejsza jest wielkość przedziałów, jednak w miarę zmniejszania wielkości przedziałów zwiększa się czasochłonność obliczeń. W związku z powyższym do analizy tych równań wykorzystuje się obecnie maszyny matematyczne.

### 3. Możliwości wykorzystania maszyny cyfrowej do analizy przebiegów przejściowych w silnikach

Równania (1) można zapisać w ogólnej postaci macierzowej

$$[U] = \left\{ [R] + \omega^x [G] + [L]D \right\} [I], \quad (5)$$

gdzie:

$$[R] = \begin{bmatrix} R^S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^X \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & nM & 0 & nL^X \\ -nM & 0 & -nL^X & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L^S & 0 & M & 0 \\ 0 & L^S & 0 & M \\ M & 0 & L^X & 0 \\ 0 & M & 0 & L^X \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} i_d^S \\ i_q^S \\ i_d^X \\ i_q^X \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} U_d^S \\ U_q^S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

W celu przygotowania równań (2) i (5) do obliczeń na maszynie cyfrowej przekształcono je do postaci:

$$D[I] = [L]^{-1} \{ [U] - [R] [I] - \omega^X [G] [I] \} \quad (6)$$

oraz

$$D\omega^X = -\frac{1}{j} \left\{ M_0^X + M_1^X (\omega^X)^0 + B\omega^X + nM(i_d^S i_q^X - i_q^S i_d^X) \right\} \quad (7)$$

gdzie

$$[L]^{-1} = \frac{1}{L^S L^X + M^2} = \begin{bmatrix} L^X & 0 & M & 0 \\ 0 & L^X & 0 & M \\ M & 0 & L^S & 0 \\ 0 & M & 0 & L^S \end{bmatrix}$$

Z relacji (6) i (7) otrzymuje się układ równań różniczkowych:

$$D i_d^S = \frac{1}{L^S L^X + M^2} \left\{ L^X U_d^S - L^X R^S i_d^S - M R^X i_q^X - n \omega^X (M^2 i_q^S + M L^X i_q^X) \right\} \quad (8)$$

$$D i_q^S = \frac{1}{L^X L^S + M^2} \left\{ L^X U_q^S - L^X R^S i_q^S - M R^X i_d^X + n \omega^X (M^2 i_d^S + L^X M i_d^X) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 Di_d^s &= \frac{1}{L^s L^x + M^2} \left\{ MU_d^s - MR^s i_d^s - L^s R^x i_d^x - n \omega^x (ML^s i_q^s + L^s L^x i_q^x) \right\} \\
 Di_q^x &= \frac{1}{L^s L^x + M^2} \left\{ MU_q^s - MR^s i_q^s - L^s R^x i_q^x + n \omega^x (ML^s i_d^s + L^s L^x i_d^x) \right\} \\
 D\omega^x &= -\frac{1}{J} \left\{ M_0^x + M_1^x (\omega^x)^0 + B\omega^x + nM(i_d^s i_q^x - i_q^s i_d^x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Układ równań (8) można zapisać w postaci ogólnej następująco:

$$\begin{aligned}
 Di_d^s &= F_1 \\
 Di_q^s &= F_2 \\
 Di_d^x &= F_3 \\
 Di_q^x &= F_4 \\
 D\omega^x &= F_5.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Numeryczne rozwiązywanie układu równań różniczkowych (9) metodą Rungego-Kutty [3] polega na znalezieniu wartości funkcji  $i_d^s, i_q^s, i_d^x, i_q^x, \omega^x$  w poszczególnych chwilach  $j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ) w postaci szeregu zależnego od kroku całkowania  $\Delta t$ . Wartości te można aproksymować przybliżonymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
 i_d^s(j+1) &= i_d^s(j) + \Delta i_d^s(j) \\
 i_q^s(j+1) &= i_q^s(j) + \Delta i_q^s(j) \\
 i_d^x(j+1) &= i_d^x(j) + \Delta i_d^x(j) \\
 i_q^x(j+1) &= i_q^x(j) + \Delta i_q^x(j) \\
 \omega^x(j+1) &= \omega^x(j) + \Delta \omega^x(j),
 \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta i_d^s(j) &= \frac{1}{6} (k_{j1} + 2k_{j2} + 2k_{j3} + k_{j4}) \\ \Delta i_q^s(j) &= \frac{1}{6} (l_{j1} + 2l_{j2} + 2l_{j3} + l_{j4}) \\ \Delta i_d^x(j) &= \frac{1}{6} (m_{j1} + 2m_{j2} + 2m_{j3} + m_{j4}) \\ \Delta i_q^x(j) &= \frac{1}{6} (n_{j1} + 2n_{j2} + 2n_{j3} + n_{j4}) \\ \Delta \omega^x(j) &= \frac{1}{6} (v_{j1} + 2v_{j2} + 2v_{j3} + v_{j4}), \end{aligned} \quad (11)$$

przy czym

$$\begin{aligned} k_{j1} &= \Delta t \cdot F_1(t_j, i_d^s(j), i_q^s(j), i_d^x(j), i_q^x(j), \omega^x(j), U_d^s(j), U_q^s(j)) \\ k_{j2} &= \Delta t \cdot F_1(t_j + \frac{1}{2}\Delta t, i_d^s(j) + \frac{1}{2}k_{j1}, i_q^s(j) + \frac{1}{2}l_{j1}, i_d^x(j) + \frac{1}{2}m_{j1}, \\ & i_q^x(j) + \frac{1}{2}n_{j1}, \omega^x(j) + \frac{1}{2}v_{j1}, U_d^s(j) + \frac{1}{2}\Delta U_d^s(j), U_q^s(j) + \frac{1}{2}\Delta U_q^s(j)) \\ k_{j3} &= \Delta t \cdot F_1(t_j + \frac{1}{2}\Delta t, i_d^s(j) + \frac{1}{2}k_{j2}, i_q^s(j) + \frac{1}{2}l_{j2}, i_d^x(j) + \frac{1}{2}m_{j2}, i_q^x(j) + \frac{1}{2}n_{j2}, \\ & \omega^x(j) + \frac{1}{2}v_{j2}, U_d^s(j) + \frac{1}{2}\Delta U_d^s(j), U_q^s(j) + \frac{1}{2}\Delta U_q^s(j)) \\ k_{j4} &= \Delta t \cdot F_1(t_j + \Delta t, i_d^s(j) + k_{j3}, i_q^s(j) + l_{j3}, i_d^x(j) + m_{j3}, i_q^x(j) + n_{j3}, \\ & \omega^x(j) + v_{j3}, U_d^s(j) + \Delta U_d^s(j), U_q^s(j) + \Delta U_q^s(j)). \end{aligned} \quad (12)$$

Równania (12) określające współczynniki  $k_{j1}$  oraz równania na współczynniki  $l_{j1}, m_{j1}, n_{j1}, v_{j1}$  można napisać w postaci ogólnej:

$$\begin{aligned} k_{j1} &= \Delta t \cdot F_1(\Delta_{1j}) & m_{j1} &= \Delta t \cdot F_4(\Delta_{1j}) \\ k_{j2} &= \Delta t \cdot F_1(\Delta_{2j}) & n_{j2} &= \Delta t \cdot F_4(\Delta_{2j}) \end{aligned}$$

$$k_{j3} = \Delta t \cdot F_1(\Delta_{3j})$$

$$n_{j3} = \Delta t \cdot F_4(\Delta_{3j})$$

$$k_{j4} = \Delta t \cdot F_1(\Delta_{4j})$$

$$n_{j4} = \Delta t \cdot F_4(\Delta_{4j})$$

$$l_{j1} = \Delta t \cdot F_2(\Delta_{2j})$$

$$v_{j1} = \Delta t \cdot F_5(\Delta_{1j})$$

$$l_{j2} = \Delta t \cdot F_2(\Delta_{2j})$$

$$v_{j2} = \Delta t \cdot F_5(\Delta_{2j})$$

$$l_{j3} = \Delta t \cdot F_2(\Delta_{3j})$$

$$v_{j3} = \Delta t \cdot F_5(\Delta_{3j})$$

$$l_{j4} = \Delta t \cdot F_2(\Delta_{4j})$$

$$v_{j4} = \Delta t \cdot F_5(\Delta_{4j})$$

$$m_{j1} = \Delta t \cdot F_3(\Delta_{1j})$$

$$m_{j2} = \Delta t \cdot F_3(\Delta_{2j})$$

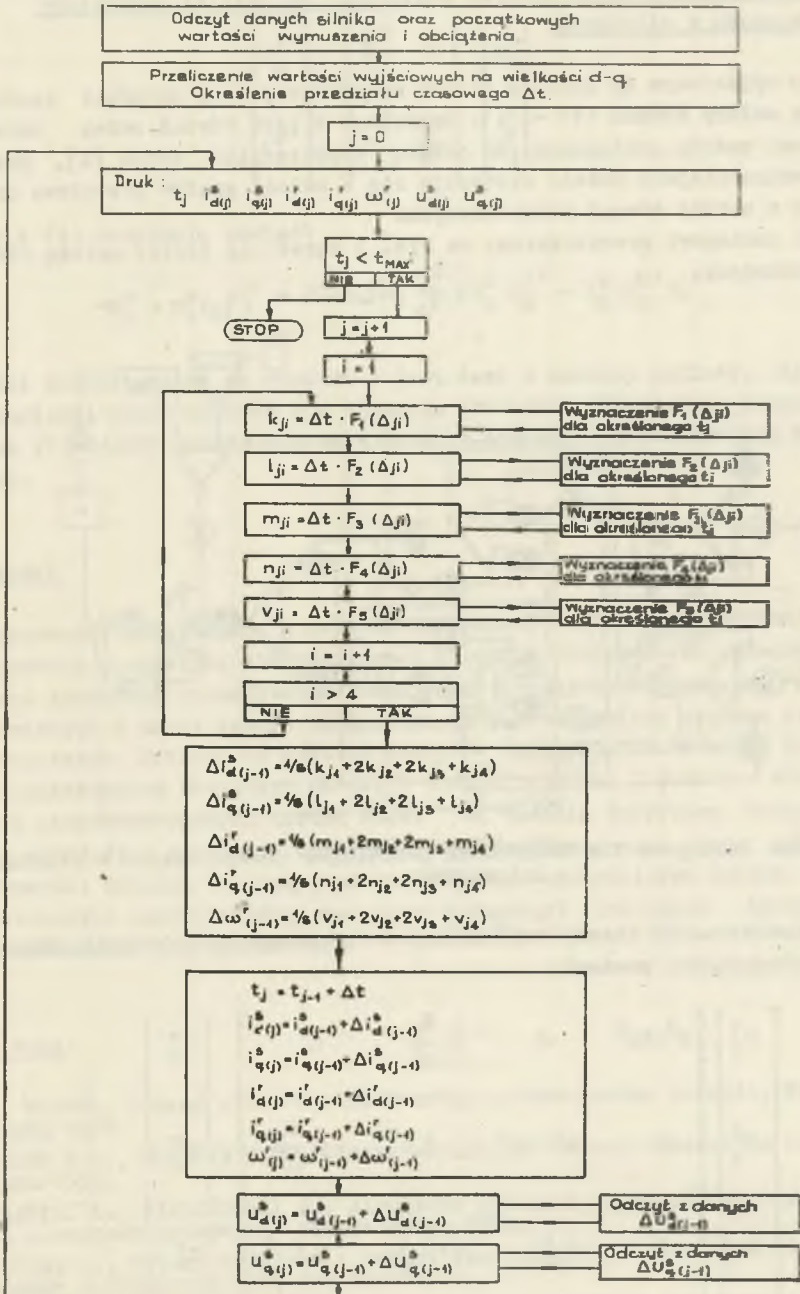
$$m_{j3} = \Delta t \cdot F_3(\Delta_{3j})$$

$$m_{j4} = \Delta t \cdot F_3(\Delta_{4j})$$

Punktem wyjścia do obliczeń są równania zapisane w postaci ogólnej (8). W momentach odpowiadających zewnętrznym wymuszeniom (np. zwarcie, wyłączenie zwarcia, odłączenie silnika, działanie SPZ w pewnym założonym cyklu) zmieniają się odpowiednie wielkości w równaniach. Przykładowo, dla przypadku zwarcia trójfazowego na zaciskach silnika  $U_d^S = U_g^S = 0$ . Na rysunku 2 podano schemat blokowy algorytmu rozwiązywania równań (8) przez maszynę cyfrową.

Podany algorytm ujmuje przedstawione w sposób ogólny podprogramy wyznaczenia funkcji  $F_1(\Delta_{1j})$ ,  $F_2(\Delta_{1j})$ ,  $F_3(\Delta_{1j})$ ,  $F_4(\Delta_{1j})$ ,  $F_5(\Delta_{1j})$  dla  $i = 1, 2, 3, 4$ . Podprogramy te mogą być opracowane na podstawie zależności (8), (9), (12), (13) dla konkretnych warunków obliczeń.



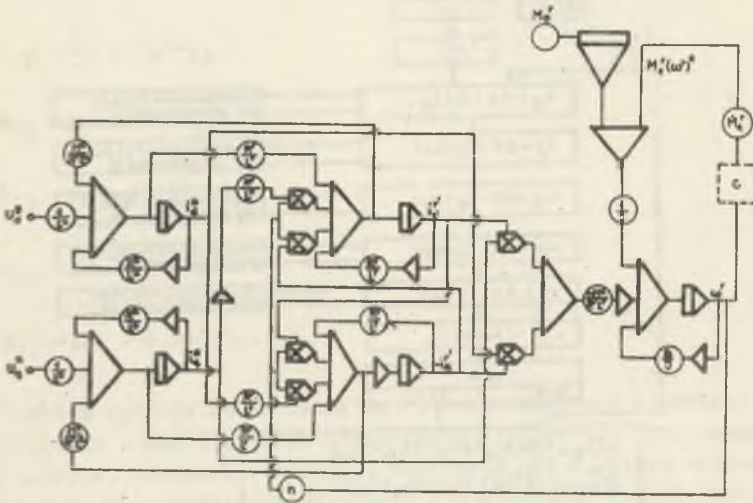


Rys. 2. Schemat blokowy algorytmu obliczania przebiegów przejściowych w silniku indukcyjnym

#### 4. Możliwości wykorzystania maszyny analogowej do analizy przebiegów przejściowych w silnikach

Punktem wyjściowym do analizy stanów nieustalonych na maszynie analogowej będą układy równań (1) - (4). Wychodząc z tych równań można określić schemat modelu analogowego za pomocą odpowiednich metod [4], przy czym najkorzystniejsze modele otrzymuje się z metody grafów przepływu sygnałów lub z metody równań różniczkowych.

Schemat analogowy przedstawiony na rys. 3 określony został metodą równań różniczkowych.



Rys. 3. Model analogowy dla obliczania przebiegów przejściowych w silniku indukcyjnym

W celu zmniejszenia liczby współczynników przekształcono układy równań (1), do następujących postaci:

$$\begin{bmatrix} U_d^s \\ U_q^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^s + DL^s & 0 & D \frac{M}{R^s} & 0 \\ 0 & R^s + DL^s & 0 & D \frac{M}{R^s} \\ D & a \mathcal{E}^N & 1 + D \frac{L^N}{R^N} & a \mathcal{E}^N \frac{L^N}{R^N} \\ -a \mathcal{E}^N & D & -a \mathcal{E}^N \frac{L^N}{R^N} & 1 + D \frac{L^N}{R^N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \\ i_d^N \\ i_q^N \end{bmatrix} \quad (14)$$

Prądy  $i_d^r$  oraz  $i_q^r$  są określone za pomocą relacji

$$\begin{bmatrix} i_d^r \\ i_q^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^r & 0 \\ 0 & M^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d^s \\ i_q^s \end{bmatrix} \quad (15)$$

Równania (2) przyjmuje postać:

$$-M_0^r - M_1^r (\omega^r)^0 = JD + B\omega^r - n \frac{M^r}{R} (i_q^s i_d^r - i_d^s i_q^r). \quad (16)$$

Model przedstawiony na rysunku 3 jest dany w postaci ogólnej. Dla różnych wartości współczynnika  $n$  w równaniu (16) jest odpowiednio przyjmowany blok (w miejscu oznaczonym na rysunku 3 literą "n") realizujący żadaną funkcję.

## 5. Wnioski

Opracowanie teoretyczne modelu matematycznego maszyny uogólnionej d-q w połączeniu z rozwojem elektronicznej techniki obliczeniowej stwarza możliwości znacznego rozszerzenia badań analitycznych dotyczących stanów przejściowych w pracy maszyn elektrycznych jako elementów systemu elektroenergetycznego. Dotyczy to również silników indukcyjnych będących podstawowym odbiornikiem składowym odbiorów energetycznych. Z punktu widzenia potrzeb elektroenergetyki bardzo ważne są badania dotyczące wzajemnego wpływu zakłóceń i działania automatyki zakłóceńowej oraz pracy odbiorów silnikowych. Badania te mogą stać się podstawą optymalnego doboru członów automatyki zakłóceńowej oraz mogą dostarczyć istotnych informacji dla projektantów tej automatyki.

## Literatura

- 1 J. MEISEL, Zasady elektromechanicznego przetwarzania energii, WNT Warszawa 1970
- 2 WHITE D.C., WOODSON H.W., Electromechanical Energy Conversion Inc. New York 1959.
- 3 JASICKI Z., KIERZKOWSKI Z., Algorytmy obliczeń elektroenergetycznych na maszynach cyfrowych. WNT Warszawa 1968.
- 4 LEVINE L., Metody stosowania maszyn analogowych do rozwiązywania problemów w technice. WNT, Warszawa 1969.
- 5 HUGHES F.M., ALDRED A.S., Transient characteristics and simulation of induction motors. Proc. IEE 1966.

- 6 WAGNER W.P., Short - circuit contrybution of Large induction motors. Proc. IEE 1969.
- 7 SMITH I.R., Transient performance of induction motors. Proc. IEE 1966
- 8 SMITH I.R., Induction motor reswitching transient. Proc. I.E.E. 1967.

Przyjęto do druku w kwietniu 1972 r.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАРУШЕННЫХ РЕЖИМОВ В ЭЛЕКТРОСИСТЕМЕ  
НА РАБОТУ ИНДУКЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

Резюме

В статье представлено методику аналитического исследования переходных процессов в работе индукционных электродвигателей - базисных составляющих приёмников энергетических промышленных приёмов. Проведено дискуссии математической модели электродвигателя, равешивая возможности анализа условий его работы в нарушенных режимах при помощи цифровой и аналоговой машин.

A RESEARCH ON THE INFLUENCE OF DISTURBANCE STATES IN THE ELECTRIC POWER SYSTEMS ON THE WORK OF THE INDUCTION MOTORS

Summary

The method of the analitic examination of transient states in the work of induction motors is presented in the article. These motors are the basic component receivers of industrial electric power receptions.

The mathematical model of the motor is discussed taking into consideration diferent possibilities of the digital and analogue computer analysis of the conditions of its work in the disturbance states.