ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Adam Janiak, Józef Grabowski
Politechnika Wrocławska

OPTYMALIZACJA SEKWENCJI OPERACJI Z ROZDZIAŁEM ZASOBÓW W DYSKRETNYCH PROCESACH PRODUKCYJNYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano ogólny problem kolejnościowy z rozdziałem zasobów w poszczególnych gniazdach produkcyjnych i podano algorytm rozwiązania go, opierający się na teorii grafów dysjunktywnych.

1. Wstęp

W wielu gałęziach przemysłu (hutniczy, maszynowy, samochodowy, budowlany itd.) proces produkcyjny charakteryzuje się przepływem materiałów (w ciągu technologicznym) w postaci pojedynczych elementów lub ich partii. Elementy te są poddawane operacjom obróbki na kolejnych agregatach technologicznych (maszynach). Maszyny jednakowego typu (tzn. o tych samych możliwościach funkcjonalnych, które jednak mogą mieć różne parametry techniczne, np. wydajność) są zgrupowane w tzw. gniazdach produkcyjnych. Czasy wykonywania operacji na maszynach z pewnych gniazd mogą być zależne od ilości zasobów (np. zasobami mogą być: energia elektryczna, tlen, koks, woda itp.) lub strumienia zasobów (np.: moc elektryczna, moc przerobowa, strumień gazu lub wody itp.) przydzielanych tym operacjom. Globalna ilość zasobu (lub ich strumień) do rozdziału w danym gnieździe zwykle jest ograniczona.

W innych gniazdach produkcyjnych czasy realizacji poszczególnych operacji są określone i zwykle różne dla różnych elementów i agregatów. W związku z tym powstaje problem określenia takiej kolejności wykonywania elementów na poszczególnych maszynach z zachowaniem określonego porządku technologicznego i takiego rozdziału ograniczonych zasobów na maszyny w poszczególnych gniazdach produkcyjnych, by uzyskać minimalny czas wykonania całego procesu produkcyjnego (wszystkich operacji). W niniejszej pracy przedstawiono model matematyczny tego problemu i przedstawiono schemat algorytmu rozwiązania tego problemu, opierający się na elementach teorii grafów dysjunktywnych i metodzie podziału i ograniczeń.

2. Model matematyczny ogólnego problemu kolejnościowego z rozdziałem zasobów

W paragrafie tym zostanie przedstawiony matematyczny model ogólnego problemu kolejnościowego z rozdziałem zasobów.

Niech

$$N = \{1,2,\ldots,n\}$$

będzie zbiorem zadań (operacji), które mają być wykonane za pomocą maszyn ze zbioru

$$B = \{1,2,\ldots,m\}.$$

Przez

$$Q = \{1,2,\ldots,q\}$$

będzie oznaczany zbiór różnych typów (rodzajów) maszyn. Każdemu $k \in Q$ odpowiada $B_k \subset B$, podzbiór maszyn tego samego typu (tzn. o tych samych możliwościach funkcjonalnych), które jednak mogą mieć różne parametry techniczne (np. wydajność) oraz podzbiór operacji $N_k \subset N$, które mają być wykonane przy użyciu maszyn typu k. Zakłada się, że zachodzą następujące zależności:

$$\bigcup_{k\in Q} N_k = N,\ N_k \cap N_l = \emptyset,\ k,l \in Q,\ k \neq l;$$

$$\bigcup_{k\in Q} B_k = B,\ B_k \cap B_l = \emptyset,\ k,l \in Q,\ k \neq l.$$

Niech

$$RT \subset N \times N$$

będzie relacją częściowego porządku, wyrażającą wymagania porządku technologicznego.

Maszyny k-tego typu tworzą k-te gniazdo produkcyjne. W niektórych gniazdach $k \in Q$ czasy wykonywania c_{jw} poszczególnych operacji $j \in N_k$ na poszczególnych maszynach $w \in B_k$, zależą od ilości zasobów u^k_{jw} przydzielanych tym operacjom; przy czym dysponowana do rozdziału ilość zasobów w gnieździe k-tym wynosi $U^k \geqslant 0$. Przez Q_1 oznaczany będzie zbiór tych gniazd produkcyjnych, w których czas wykonania operacji jest zależny od przydzielonego im zasobu, tzn.:

$$Q_1 = \left\{k \in Q : c_{jw} \triangleq c^k_{jw} = f^k_{jw}(u^k_{jw}),\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q\right\}.$$

A przez Q_2 oznaczany będzie zbiór tych gniazd produkcyjnych, w których czas wykonywania poszczególnych operacji na maszynach jest stały, tzn.:

$$Q_2 = \left\{k \in Q : c_{jw} = \mathrm{const},\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q\right\},$$

przy czym zachodzi:

$$Q_1 \cup Q_2 = Q \quad \text{i} \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset.$$

Funkcje $f^k_{jw} : R^+ \to R^+$, $k \in Q_1$, $j \in N_k$, $w \in B_k$ są funkcjami nierosnącymi i ciągłymi. Mogą to być np. funkcje hiperboliczne o postaci:

$$f^k_{jw}(u^k_{jw}) = \frac{a^k_{jw}}{u^k_{jw} - b^k_{jw}},$$

przy czym zakłada się, że $u^k_{jw} \geqslant b^k_{jw}$.

Często w praktyce występuje następujące ograniczenie na ilość zasobów: $\alpha^k_{jw} \leq u^k_{jw} \leq \beta^k_{jw}$, $0 \leq \alpha^k_{jw}, \beta^k_{jw} \leq \infty$, tzn., że chcąc zacząć realizować operację j-tą na maszynie w-tej w k-tym gnieździe należy przydzielić jej co najmniej α^k_{jw} zasobów, nie można także przydzielić ze względów technologicznych (lub ekonomicznych - występuje stan nasycenia) więcej niż β^k_{jw} zasobów, a modele operacji są liniowe (lub w przedziale $[\alpha^k_{jw}, \beta^k_{jw}]$ można je aproksymować linią prostą), tzn.:

$$f^k_{jw} = a^k_{jw} \cdot u^k_{jw} + b^k_{jw}, \text{ gdzie } a^k_{jw} < 0,\ b^k_{jw} > 0,\ \alpha^k_{jw} \leq u^k_{jw} \leq \beta^k_{jw} \leq -\frac{b^k_{jw}}{a^k_{jw}};$$
$$j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q_1.$$

Można także rozpatrywać dynamiczne modele operacji wyrażające zależność prędkości wykonywania operacji np. j-tej na w-tej maszynie w k-tym gnieździe, $k \in Q_1$, od ilości zasobów przydzielonej jej w każdej chwili czasu, przy czym zadany jest rozmiar (stan końcowy) operacji X^{*}_j, tzn.:

$$\dot{x}^k_{jw}(t) = g^k_{jw}(u^k_{jw}(t)),\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q_1,$$

przy czym $X^{*}_j = \int\limits_0^{T^k_{jw}} g^k_{jw}(u^k_{jw}(t))dt$, gdzie T^k_{jw} - czas wykonania j-tej operacji na w-tej maszynie w gnieździe k-tym, przy zużyciu $u^k_{jw}(t)$ iloś i zasobów, $u^k_{jw}(t) \leq U^k_t$. U^k_t - dysponowana do rozdziału w każdej chwili czasu w k-tym gnieździe, $k \in Q_1$, ilość zasobów, $U_t \geq 0$ dla $t \geq 0$. Tutaj funkcje $g^k_{jw}: R^+ \to R^+$ są funkcjami niemalejącymi, ciągłymi i $g^k_{jw}(0) = \hat{c}^k_{jw}$ (często $\hat{c}^k_{jw} = 0$). Modele takie rozpatrywano w zagadnieniach sterowania kompleksami operacji, np w [2]. Mogą być także zadane ograniczenia: $\alpha^k_{jw} \leq u^k_{jw} \leq \beta^k_{jw}$.

Ogólny problem kolejnościowy z rozdziałem zasobów polega na określeniu takiego przydziału maszyn operacjom, takiego rozdziału zasobów w gniazdach i wyznaczeniu takiej kolejności wykonywania operacji, aby zminimalizować łączny czas ich wykonania przy spełnieniu ograniczeń:

(i) każda operacja może być wykonana tylko na jednej maszynie z określonego dla niej typu;

(ii) żadna maszyna nie może wykonywać jednocześnie więcej niż jedną operację;

(iii) zachowany musi być technologiczny porządek wykonywania operacji;

(iv) wykonywanie żadnej operacji nie może być przerwane;

(v) muszą być spełnione ograniczenia zasobowe.

Wprowadzone zostaną dodatkowo następujące oznaczenia:

t_o - czas rozpoczęcia wszystkich operacji (bez straty ogólności można przyjąć $t_o = 0$),

t_z - czas zakończenia realizacji całego zadania produkcyjnego (wszystkich operacji),

t^x_j - czas rozpoczęcia j-tej operacji, $j \in N$,

t^y_j - czas zakończenia j-tej operacji, $j \in N$,

c_{jw} - czas wykonania j-tej operacji za pomocą w-tej maszyny ($c_{jw} > 0$, $j \in N_k$, $w \in B_k$, $k \in Q$; w przeciwnym przypadku, tzn., gdy $i \notin N_k$ lub $w \notin B_k$ dla $k \in Q$ przyjmuje się $c_{jw} = \infty$),

x_{jw} - zmienna decyzyjna określona następująco:

$$x_{jw} = \begin{cases} 1 & \text{- jeśli j-ta operacja jest wykonywana przy użyciu w-tej maszyny, } j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q, \\ 0 & \text{- w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Stosując powyższe oznaczenia, ogólny problem kolejnościowy z rozdziałem zasobów, dla statycznych modeli operacji, ma następującą postać:

Problem 1

Znaleźć wartości zmiennych:

t_z, t_j^x, t_j^y, x_{jw}, $j \in N_k$, $w \in B_k$, $k \in Q$, oraz u_{jw}^k, $j \in N_k$, $w \in B_k$, $k \in Q_1$,

które minimalizują funkcję celu:

$$Q \triangleq t_z$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{w \in B_k} x_{jw} = 1,\ t_j^y - t_j^x \geqslant \sum_{w \in B_k} x_{jw} \cdot c_{jw},\ j \in N_k,\ k \in Q; \tag{1}$$

$$((x_{jp}=1) \wedge (x_{ip}=1)) \Rightarrow ((t_j^x \geqslant t_i^y) \dot{\vee} (t_i^x \geqslant t_j^y)),\ p \in B_k,\ i,j \in N_k,\ i \neq j,\ k \in Q \tag{2}$$

$$t_j^x \geqslant t_i^y, \quad \langle i,j \rangle \in RT; \tag{3}$$

$$t_j^x \geqslant t_o, \quad j \in N; \tag{4}$$

$$t_z \geqslant t_i^y, \quad i \in N; \tag{5}$$

$$t_o,\ t_z,\ t_j^x,\ t_j^y \geqslant 0,\ j \in N,\ t_z < \infty; \tag{6}$$

$$x_{jw} \in \{0,1\},\ w \in B_k,\ j \in N_k,\ k \in Q; \tag{7}$$

$$c_{jw} \triangleq c_{jw}^k = f_{jw}^k(u_{jw}^k),\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q_1; \tag{8}$$

$$\sum_{j \in N_k} \sum_{w \in B_k} x_{jw} \cdot u_{jw}^k \leqslant U^k,\ k \in Q_1; \tag{9}$$

$$\alpha_{jw}^k \leqslant u_{jw}^k \leqslant \beta_{jw}^k,\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q_1; \tag{10}$$

Ograniczenia (1) są matematycznym zapisem ograniczeń (i) oraz (iv), ograniczenia (2) odpowiadają ograniczeniom (ii), a (3) są ograniczeniami porządku technologicznego RT - (iii). Ograniczenia (4)-(7) są oczywiste. Ograniczenia (8)-(10) realizują ograniczenia (v).

Jeśli w Problemie 1 w ograniczeniu (8) funkcje $f_{jw}^k(u_{jw}^k)$ są liniowe dla $j \in N_k$, $w \in B_k$, $k \in Q_1$, wówczas problem ten jest problemem programowania liniowego, częściowo całkowitoliczbowego, które jak dotychczas nie doczekało się efektywnych metod obliczeniowych.

3. Ogólna metoda rozwiązania

Ustalonemu Problemowi 1, a więc ustalonym zbiorom N, B, $Q = Q_1 \cup Q_2$, $\{N_k : k \in Q\}$, $\{B_k : k \in Q\}$, wartościom $\{c_{jw} : j \in N_k, w \in B_k, k \in Q_2\}$ oraz funkcjom $\{c_{jw} \triangleq c^k_{jw} = f^k_{jw}(u^k_{jw}) : j \in N_k, w \in B_k, k \in Q_1\}$, a także wartościom

$$\{U^k : k \in Q_1\}; \{\langle \alpha^k_{jw}, \beta^k_{jw} \rangle : j \in N_k, w \in B_k, k \in Q_1\}$$

przyporządkowuje się multidigraf dysjunktywny z obciążonymi łukami:

$$G = \langle A, U; V', V \rangle,$$

gdzie A jest zbiorem wierzchołków, a U, V', V-zbiorami łuków.

Zbiór wierzchołków A jest sumą rozłącznych zbiorów

$$A = X \cup Y \cup \{z_0\} \cup \{z_1\},$$

gdzie $X = \{x_i : i \in N\}$, $Y = \{y_i : i \in N\}$, a wierzchołki x_i, y_i, z_0, z_1 odpowiadają zdarzeniom t^x_i, t^y_i, t_o, t_z.

Zbiór łuków U składa się z łuków odpowiadających ograniczeniom (3)--(5), a więc (a) dla każdej pary $\langle i,j \rangle \in RT$ $\langle y_i, x_j \rangle \in U$, (b) $\langle z_0, x_j \rangle \in U$ dla każdego wierzchołka j, który nie ma żadnego poprzednika, (c) $\langle y_j, z_1 \rangle \in U$ dla każdego wierzchołka j, który nie ma żadnego następnika. Wszystkie łuki zbioru U obciążamy wagami 0.

Zbiór łuków V' odpowiada ograniczeniom (1), z których wynika, że każdej operacji $i \in N_k$ przyporządkowana jest dokładnie jedna maszyna z B_k. Dla każdej operacji $i \in N_k$ wprowadza się $|B_k|$ łuków $\langle x_i, y_i \rangle_w$, w = 1,2,... ...,$|B_k|$, o tych samych początkach i końcach, odpowiadających maszynom, na których może być wykonywana ta operacja. Tak zdefiniowany podzbiór łuków nazywany będzie i-tym zbiorem dysjunktywnym i będzie oznaczany przez V'_i. Kolejne łuki z V'_i obciążone są wagami c_{iw}, $w \in B_k$, gdzie k określone jest przez $i \in N_k$. V' zawiera podzbiory V'_i odpowiadające wszystkim operacjom, zatem:

$$V' = \{V'_i : i \in N\}.$$

Zgodnie z ograniczeniem (1) każdemu rozwiązaniu dopuszczalnemu w terminach teorii grafów odpowiada w zbiorze V' zbiór reprezentantów rodziny zbiorów $\{V'_i\}$.

Ograniczenia (2) powodują, że żadne dwie operacje nie mogą być jednocześnie wykonywane na tej samej maszynie z B_k, $k \in Q$, dlatego też dla każdej pary operacji $i,j \in N_k$, $\langle i,j \rangle \notin RT$, $k \in Q$, wprowadza się parę łuków $(\langle y_i, x_j \rangle, \langle y_j, x_i \rangle)$, zwaną parą łuków dysjunktywnych. V jest zbiorem wszystkich par łuków dysjunktywnych, tzn.:

$$V = \{(\langle y_i, x_j \rangle, \langle y_j, x_i \rangle) : i,j \in N_k, \langle i,j \rangle \notin RT, k \in Q\}.$$

Ograniczenia (2) powodują, że - w terminach teorii grafów - dowolnemu rozwiązaniu dopuszczalnemu problemu 1 odpowiada podzbiór łuków dysjunktywnych, który zawiera co najwyżej jeden łuk z każdej pary łuków dysjunktywnych.

Czynność zastępowania danego łuku należącego do zbioru V_i' na inny łuk należący do tego zbioru oraz czynność zastępowania danego łuku z pary dysjunktywnej na łuk przeciwny lub wyłączenie go w ogóle - nazywamy przełączaniem.

Niech

$$\bar{D} = \{D : D = \langle A, U \cup S' \cup S \rangle\}$$

będzie rodziną digrafów częściowych multigrafu dysjunktynwego G, takich, że S' jest dowolną reprezentacją zbiorów $\{V_i'\}_{i \in N}$, a S jest reprezentacją par łuków dysjunktywnych należących do V, dla której D jest digrafem bezkonturowym i spełnia warunek implikacyjny (2). Innymi słowy, $\bar{D}$ jest rodziną digrafów odpowiadających dopuszczalnym strukturom rozwiązania Problemu 1. Należy zauważyć, że dla ustalonego rozwiązania dopuszczalnego, tzn. dla ustalonej struktury dopuszczalnej rozwiązania Problemu 1 i dopuszczalnego rozdziału zasobów dla niej, t_z jest długością drogi krytycznej (tj. najdłuższej) w digrafie odpowiadającym temu rozwiązaniu. Digraf $D \in \bar{D}$, odpowiadający ustalonym reprezentacjom S_r' i S_p będzie oznaczany przez $D_{rp} = \langle A, U \cup S_r' \cup S_p \rangle$, a długość najdłuższej drogi w D_{rp} dla ustalonego dopuszczalnego rozdziału zasobów $\bar{u} \in \hat{U}$ ($\hat{U} = \langle \hat{U}^k : k \in Q_1 \rangle$, gdzie $\hat{U}^k$ - zbiór dopuszczalnych rozdziałów zasobów w k-tym gnieździe), będzie oznaczona przez L_{rp}.

Drogę krytyczną o długości L^*, gdzie

$$L^* = \min_{D_{rp} \in D} \min_{\bar{u} \in \hat{U}} L_{rp}(\bar{u})$$

nazywa się minimaksymalną w multigrafie dysjunktywnym G, a związane z nią reprezentacje S'^* i S^* oraz rozdział $\bar{u}^*$ nazywamy optymalnymi. Dla znalezienia digrafu D^* wykorzystuje się zmodyfikowaną metodę podziału i ograniczeń.

Algorytm

Krok 1 (testowanie). Obliczyć dolne ograniczenie LB wartości t_z dla następników digrafu D_{rp}. Jeżeli $LB \geqslant L^*$, gdzie L^* - najlepsze do tej pory znalezione rozwiązanie, to przejść do kroku 4. W przypadku przeciwnym przejść do kroku 2.

Krok 2 (rozwiązywanie). Dla digrafu D_{rp} znaleźć optymalny rozdział zasobów i wyznaczyć L_{rp}^*. Jeśli $L_{rp}^* < L^*$ to $L^* := L_{rp}^*$. Określić zbiór łuków dysjunktywnych do przełączenia. Jeśli zbiór ten jest pusty to przejść do kroku 4.

Krok 3 (rozgałęzienie). Wybrać łuk i dokonać przełączenia go otrzymując nowy digraf D_{sq} i nowe rozwiązanie. Przejść do kroku 1.

Krok 4 (cofanie). Jeśli nie ma poprzednika, do którego można by się cofnąć, to stop. L^* jest rozwiązaniem optymalnym. Inaczej wykonać operacje związane z aktualizacją zbiorów łuków dysjunktywnych. Przejść do kroku 3.

W związku z tym, że kroki 1, 3 i 4 są analogiczne do odpowiednich kroków rozwiązania problemu kolejnościowego bez rozdziału zasobów, tzn., gdy $Q_1 = \emptyset$ a $Q = Q_2$, rozpatrywanego np. w [1], dokładniej omówiony będzie krok 2 związany z optymalnym rozdziałem zasobów dla ustalonej dopuszczalnej struktury rozwiązania problemu 1, czyli np. dla $D_{rp} \in \bar{D}$. W digrafie dopuszczalnym D_{rp} wyznacza się wszystkie drogi, niech ich będzie s.

Niech $y_{jw}(i)$, $i = 1,2,\ldots,s$ będzie zmienną binarną o wartościach:

$$y_{jw}(i) = \begin{cases} 1, & \text{gdy łuk o obciążeniu } c_{jw},\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q, \\ & \text{należy do i-tej drogi w } D_{rp}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Problem znalezienia optymalnego rozdziału zasobów dającego minimalną drogę krytyczną L^{*}_{rp} w D_{rp} sprowadza się do następującego problemu:

Problem 2:

$$\min t_z, \text{ przy ograniczeniach :}$$

$$\sum_{k \in Q_1} y_{jw}(i) \cdot f^k_{jw}(u^k_{jw}) + \sum_{k \in Q_2} y_{jw}(i) \cdot c_{jw} \leqslant t_z,\ i=1,2,\ldots,s,\ j \in N_k,\ w \in B_k, \tag{11}$$

$$\sum_{j \in N_k} u^k_{jw_j} \leqslant U^k,\ k \in Q_1,\ \text{gdzie: } w_j = \left\{ w \in B_k : x_{jw} = 1 \right\}, \tag{12}$$

$$\alpha^k_{jw} \leqslant u^k_{jw} \leqslant \beta^k_{jw},\ j \in N_k,\ w \in B_k,\ k \in Q_1, \tag{13}$$

$$t_z \geqslant 0. \tag{14}$$

Ograniczenie (9) z problemu 1 sprowadza się tutaj do ograniczenia (12), ponieważ przy danej strukturze D_{rp} rozwiązania dopuszczalnego problemu 1 określone są już wartości zmiennych x_{jw}, $j \in N_k$, $w \in B_k$, $k \in Q$.

Ogólnie rzecz biorąc problem 2 jest problemem programowania nieliniowego, jeśli natomiast modele operacji f^k_{jw} byłyby liniowe to sprowadza się on do problemu programowania liniowego.

LITERATURA

[1] Grabowski J.: Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia kolejnościowego z równoległym wykorzystaniem maszyn. Archiwum Automatyki i Telemechaniki z. 1/2, 1978 ss. 91-113.

[2] Janiak A.: Time-optimal control of a sequence of complexes of independent operations with concave models. Systems Science IV/4, Wrocław 1978.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАЦИЙ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ РЕСУРСОВ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

В работе формулируется общая проблема последовательности операций с распределением ресурсов в отдельных производственных участках. Представлено алгоритм решения этой проблемы на базе элементов теории дизъюнктивных графов.

OPTIMIZATION OF THE OPERATION SEQUENCE WITH DISTRIBUTION OF RESOURCES IN DISCRETE PRODUCTION SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper a general optimization´s problem of the operation sequence with distribution of resources in separete production shops is considered. The algorithm of solving of this problem bases on the disjunctive graphs theory.