ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Jerzy Klamka,
Politechnika Śląska

# STEROWALNOŚĆ BILINIOWYCH PROCESÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie. W artykule sformułowano warunki konieczne i wystarczające sterowalności jednorodnych oraz niejednorodnych dyskretnych procesów biliniowych, wykorzystując kanoniczną postać Jordana tych procesów. W oparciu o te warunki podano szereg przykładów procesów sterowalnych oraz niesterowalnych.

## 1. Wstęp.

W ostatnich latach nastąpił szybki rozwój teorii procesów biliniowych, zarówno ciągłych, jak i dyskretnych [1 - 10]. Wiąże się to bezpośrednio z faktem, że dla coraz większej klasy procesów, szczególnie w biologii i ekonomii, a także astronautyce, opis liniowy okazuje się niewystarczający i zachodzi konieczność wykorzystywania w coraz szerszym zakresie modeli biliniowych. Liczne przykłady procesów biliniowych podane są w pracach [5], [6], [10]. Wraz ze wzrostem zainteresowania procesami biliniowymi, rozwijały się badania dotyczące zagadnień sterowalności takich procesów. W przypadku biliniowych procesów dyskretnych, w ostatnim okresie uzyskano nowe warunki konieczne i wystarczające sterowalności, zarówno dla procesów jednorodnych [2], jak i dla procesów niejednorodnych [3]. W niniejszym artykule, wykorzystując kanoniczną postać Jordana dyskretnych procesów biliniowych, uzyskano dla pewnej klasy procesów proste kryteria sterowalności. Kryteria te bazują na znajomości wartości własnych macierzy stanowiącej liniową część procesu biliniowego. Otrzymane rezultaty dotyczą zarówno jednorodnego, jak i niejednorodnego dyskretnego procesu biliniowego. Uzyskane wyniki są ilustrowane licznymi przykładami. W niniejszym artykule rozpatrzono jedynie pewną klasę dyskretnych procesów biliniowych, a mianowicie procesy, w których część liniowa procesu jest reprezentowana przez macierz symetryczną. Założenie to w znacznym stopniu upraszcza kryteria sterowalności. Pozostałe ograniczenia co do klasy rozpatrywanych procesów, są konsekwencją założeń umieszczonych w pracach [2], [3], [4], [5], [6]. Założenia te gwarantują istnienie rozwiązania problemu sterowalności i jak dotychczas brak prac dotyczących sterowalności szerszych klas biliniowych procesów dyskretnych. Problematyka sterowalności procesów biliniowych łączy się także ściśle z zagadnieniem sterowania optymalnego przy ustalonym stanie końcowym procesu.

## 2. Opis procesu i przegląd dotychczasowych wyników.

W teorii dyskretnych procesów biliniowych rozróżnia się dwa zasadnicze rodzaje procesów : procesy jednorodne oraz procesy niejednorodne.

Dyskretny jednorodny proces biliniowy opisuje następujące równanie [2]

$$y_{k+1} = \bar{A}\left(I + u_k\bar{B}\right)y_k \qquad k=0,1,2,\ldots, \qquad /2.1/$$

gdzie: $\bar{A}$ jest n x n-wymiarową macierzą nieosobliwą,

$I$ jest n x n-wymiarową macierzą jednostkową,

$\bar{B}$ jest n x n-wymiarową macierzą, przy czym rząd $\bar{B} = 1$,

$y_k \in R^n$, $k=0,1,2,\ldots$ jest wektorem stanu procesu,

$u_k \in R$, $k=0,1,2,\ldots$ jest skalarnym sterowaniem.

Ponieważ rząd $\bar{B} = 1$, więc macierz $\bar{B}$ może być przedstawiona w postaci [2]

$$\bar{B} = \bar{c}\bar{d}^T,$$

gdzie $\bar{c}$, $\bar{d}$ są n-wymiarowymi wektorami, natomiast symbol T oznacza transpozycję wektora/lub macierzy/.

Dyskretny niejednorodny proces biliniowy opisuje następujące równanie [3]

$$y_{k+1} = \bar{A}\left\{\left(I + u_k\bar{B}\right)y_k + \bar{c}u_k\right\} \qquad k=0,1,2,\ldots, \qquad /2.2/$$

przy czym zakłada się, że spełniony jest następujący warunek

$$\text{rząd}\left[\bar{B}, \bar{A}\bar{c}\right] = 1.$$

Dla procesów biliniowych wprowadza się następującą definicję sterowalności.

Definicja [2], [3]. Dyskretny niejednorodny /jednorodny / proces biliniowy nazywa się sterowalnym, jeżeli dla dowolnej pary stanów, początkowego i końcowego, $x_0$, $x_F \in R^n$, $/x_0, x_F \in R^n - \{0\}/$ istnieje liczba naturalna q oraz skończona sekwencja sterowań $\{u_k\}$, $k=0,1,2,\ldots,q-1$ taka, że odpowiadająca tej sekwencji trajektoria procesu, wychodząca ze stanu $x_0$, spełnia warunek

$$x_q = x\left(q, x_0, \{u_k\}_{k=0}^{k=q-1}\right) = x_F.$$

Wprowadza się następujące oznaczenia :

$J = \left\{j : \bar{d}^T\bar{A}^j\bar{c} \neq 0 \ , \ 0 < j \leqslant n^2\right\}$

r największy wspólny dzielnik wszystkich elementów zbioru J.

$W\left[\bar{A}, \bar{c}\right] = \left[\bar{c}, \bar{A}\bar{c}, \bar{A}^2\bar{c}, \ldots, \bar{A}^{n-1}\bar{c}\right]$

$W\left[\bar{A}, \bar{c}\right]$ jest n x n - wymiarową macierzą.

$1_n$ n - wymiarowy wektor złożony z samych jedynek.

Macierz $W\left[\bar{A}, \bar{c}\right]$, podobnie jak w przypadku procesów liniowych, nosi nazwę macierzy sterowalności.

Poniżej przytoczono znane z literatury warunki konieczne i wystarczające sterowalności dyskretnych procesów biliniowych, [2], [3].

Twierdzenie 2.1. Dyskretny jednorodny proces biliniowy jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, W\left[\bar{A}, \bar{c}\right] = \text{rząd}\, W\left[\bar{A}^T, \bar{d}\right]^T = n \qquad /2.3/$$

$$r = 1. \qquad /2.4/$$

Twierdzenie 2.2. Dyskretny niejednorody proces biliniowy jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rząd}\, W\left[\bar{A}, \bar{c}\right] = n \qquad /2.5/$$

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} 1 & \bar{d}^T \\ 1 & \bar{d}^T \bar{A}^r \\ 1 & \bar{d}^T \bar{A}^{2r} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & \bar{d}^T \bar{A}^{ar} \end{bmatrix} = a + 1, \qquad /2.6/$$

gdzie: $ar = m$ oraz $m = \text{rząd}\, W\left[\bar{A}^T, \bar{d}\right]^T$ , $m \leq n$ . /2.7/

## 3. Zastosowanie kanonicznej formy Jordana do badania sterowalności.

Do badania sterowalności procesów biliniowych, podobnie jak w przypadku procesów liniowych, można zastosować kanoniczną formę Jordana macierzy. Sprowadzenie procesu biliniowego do postaci kanonicznej Jordana daje jasny pogląd na jego strukturę wewnętrzną, ułatwia symulację cyfrową oraz upraszcza kryteria sterowalności. Przy generalnym założeniu, które obowiązywać będzie w całej dalszej części niniejszego artykułu, że macierz $\bar{A}$ jest macierzą symetryczną, można poprzez nieosobliwe przekształcenie $y_k = Qx_k$ , $\det Q \neq 0$ , $k=0,1,2,\ldots$ sprowadzić dyskretne procesy biliniowe /2.1/ oraz /2.2/ do następującej kanonicznej postaci Jordana.

$$x_{k+1} = A\left(I + u_k B\right)x_k = Ax_k + u_k ABx_k, \qquad /3.1/$$

$$x_{k+1} = A\left\{\left(I + u_k B\right)x_k + cu_k\right\} = A\left(I + u_k B\right)x_k + Acu_k, \qquad /3.2/$$

gdzie $A = Q^{-1}\bar{A}\,Q = \text{diag}\left[s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n\right]$ macierz diagonalna /3.3/

$s_i$ , $i=1,2,\ldots,n$ rzeczywiste wartości własne macierzy $\bar{A}$

$$B = Q^{-1}\bar{B}\,Q = Q^{-1}\overline{cd}^T Q = cd^T = \left[c_i d_j\right] = \left[b_{ij}\right] \qquad /3.4/$$

$$c = Q^{-1}\bar{c} = \left[c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n\right]^T \qquad /3.5/$$

$$d^T = \bar{d}^T Q = \left[d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots, d_n\right]. \qquad /3.6/$$

Ponieważ nieosobliwa transformacja układu współrzędnych nie wpływa na sterowalność procesu biliniowego, więc istnieje możliwość określania sterowalności procesów /2.1/ oraz /2.2/ na podstawie badania sterowalności ich kanonicznych form Jordana /3.1/ oraz /3.2/. Wykorzystując zamieszczone w paragrafie 2 warunki konieczne i wystarczające sterowalności, można sformułować następujące, równoważne kryteria sterowalności.

Twierdzenie 3.1. Dyskretny jednorodny proces biliniowy /2.1/ jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy

1) wartości własne $s_i$ $/i=1,2,\dots,n/$ są parami różne,

2) macierz B nie zawiera elementów zerowych,

3) największy wspólny dzielnik r dla wszystkich $j \in J = \left\{ j : \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j \neq 0, \; 0 < j \leq n^2 \right\}$, jest równy jeden.

Dowód. Ponieważ $A = \operatorname{diag}\left[s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n\right]$, więc zachodzą równości

$$A^p c = \left[c_1 s_1^p, c_2 s_2^p, \dots, c_i s_i^p, \dots, c_n s_n^p\right]^T \quad , \; p \in N \text{ zbiór liczb naturalnych.} \qquad /3.7/$$

Stąd, macierz $W\left[A, c\right]$ ma postać następującą

$$W\left[A\,,\,c\right] = \begin{bmatrix} c_1, & c_1 s_1 \dots c_1 s_1^p \dots c_1 s_1^{n-1} \\ c_2, & c_2 s_2 \dots c_2 s_2^p \dots c_2 s_2^{n-1} \\ \dots & \dots \\ c_i, & c_i s_i \dots c_i s_i^p \dots c_i s_i^{n-1} \\ \dots & \dots \\ c_n, & c_n s_n \dots c_n s_n^p \dots c_n s_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad /3.8/$$

Wykorzystując własności wyznacznika Vandermonde'a otrzymuje się, że rząd $W\left[A, c\right] = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i \neq s_j$ dla $i \neq j$ oraz $c_i \neq 0$ dla $i=1,2,\dots,n$. Podobnie uzyskuje się następujące równości

$$A^{T^p} d = \left[d_1 s_1, d_2 s_2 \dots d_i s_i^p \dots d_n s_n^p\right]^T \quad , \; p \in N. \qquad /3.9/$$

Zatem macierz $W\left[A^T, d\right]^T$ jest postaci następującej

$$W\left[A^T, d\right]^T = \begin{bmatrix} d_1 & , d_2 & \dots d_i & \dots d_n \\ d_1 s_1 & , d_2 s_2 & \dots d_i s_i & \dots d_n s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 s_1^p & , d_2 s_2^p & \dots d_i s_i^p & \dots d_n s_n^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 s_1^{n-1} & , d_2 s_2^{n-1} & \dots d_i s_i^{n-1} & \dots d_n s_n^{n-1} \end{bmatrix} \qquad /3.10/$$

Stąd rząd $W[A^T,d]^T = n$ ,wtedy i tylko wtedy,gdy $s_i \neq s_j$ ,dla $i \neq j$ ,oraz $d_i \neq 0$ ,dla $i=1,2,\dots n$ .Zatem warunek /2.3/ twierdzenia 2.1 jest spełniony wtedy i tylko wtedy,gdy $s_i \neq s_j$ ,dla $i \neq j$ oraz $c_i \neq 0$ , $d_i \neq 0$ ,dla $i = 1,2,\dots,n$ . Ponieważ $B = cd^T$ ,więc niezerowanie się elementów wektorów c oraz d jest równoważne warunkowi,że macierz B nie zawiera elementów zerowych.Ponadto zachodzą następujące równości

$$d^TA^jc = [d_1,d_2,\dots d_i,\dots d_n]\,\mathrm{diag}[s_1^j,s_2^j,\dots,s_i^j,\dots,s_n^j][c_1,c_2,\dots,c_i,\dots,c_n]^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} c_id_is_i^j = \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii}s_i^j \qquad 0 < j \leq n^2. \qquad /3.11/$$

$$\text{Zatem } J = \left\{j : d^TA^jc \neq 0 \ , \ 0<j\leq n^2\right\} = \left\{j : \sum_{i=1}^{i=n} b_{ii}s_i^j \neq 0 \ , \ 0<j\leq n^2\right\}.$$

Stąd warunek /2.4/ twierdzenia 2.1 jest równoważny warunkowi 3/ twierdzenia 3.1. Wykazano więc równoważność twierdzenia 2.1 oraz twierdzenia 3.1.

Twierdzenie 3.2. Dyskretny niejednorodny proces biliniowy jest sterowalny wtedy i tylko wtedy,gdy

1) wartości własne $s_i$ / $i=1,2,\dots n$/ są parami różne,
2) macierz B nie zawiera wierszy zerowych,
3) $s_i \neq 1$ , dla $i \in I = \{i : d_i \neq 0\}$.

Dowód. Ponieważ brak wierszy zerowych w macierzy B jest równoważny nierównościom $c_i \neq 0$ ,dla $i=1,2,\dots,n$ ,więc na podstawie dowodu twierdzenia 3.1 warunki 1) oraz 2) twierdzenia 3.2 są równoważne warunkowi /2.5/ twierdzenia 2.2.Wykorzystując zależności /3.9/ uzyskuje się następującą równość

$$\begin{bmatrix} 1, d^T \\ 1, d^TA^r \\ 1, d^TA^{2r} \\ \dots\dots \\ 1, d^TA^{ar} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, d_1, d_2 \dots d_i \dots d_n \\ 1, d_1s_1^r, d_2s_2^r \dots d_is_i^r \dots d_ns_n^r \\ 1, d_1s_1^{2r}, d_2s_2^{2r} \dots d_is_i^{2r} \dots d_ns_n^{2r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1, d_1s_1^{ar}, d_2s_2^{ar} \dots d_is_i^{ar} \dots d_ns_n^{ar} \end{bmatrix}. \qquad /3.12/$$

Ponieważ $ar = m =$ rząd $W[A^T , d]^T$ = ilość niezerowych elementów wektora d /dla przypadku gdy $s_i \neq s_j$ , $i \neq j$ /,więc rząd macierzy określonej równością /3.12/ będzie maksymalny,to znaczy równy $(a+1)$ ,wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek 3/ twierdzenia 3.2. Wynika to bezpośrednio z własności wyznacznika Vandermonde'a i podstawowych zależności dotyczących obliczania rzędów macierzy. Zatem udowodniono równoważność warunku /2.5/ twierdzenia 2.2 oraz warunku 3/ twierdzenia 3.2. Wykazano więc równoważność twierdzenia 2.2 oraz twierdzenia 3.2.

4. Przykłady.

1. Niech będzie dany dyskretny jednorodny proces biliniowy postaci /3.1/ o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0 \\ c_1 \neq 0 \ , \ c_2 \neq 0 \end{matrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad d^T = [1 \ \ 0].$$

Stąd otrzymuje się

$$\sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j = c_1 s_1^j \neq 0 \quad \text{dla} \quad 0 < j \leq n^2 = 4.$$

Zatem $J = \{1, 2, 3, 4\}$, czyli $r = 1$.

Ponieważ macierz B zawiera elementy zerowe, więc warunek 2/ twierdzenia 3.1 nie jest spełniony, a zatem rozpatrywany proces nie jest sterowalny. Niesterowalne stany początkowe procesu można wyznaczyć na podstawie analizy relacji /3.1/, skąd otrzymuje się następujące zależności

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_k \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + c_1 u_k & 0 \\ c_2 u_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 + s_1 c_1 u_k & 0 \\ s_2 c_2 u_k & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (s_1 + s_1 c_1 u_k) x_{1,k} \\ s_2 c_2 u_k x_{1,k} + s_2 x_{2,k} \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Zatem dla $x_0 = [0 \ \ x_{2,0}]^T$, /$x_{2,0}$ dowolne/ otrzymuje się równości

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2^{k+1} x_{2,0} \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Wynika stąd, że stany początkowe procesu postaci $x_0 = [0 \ \ x_{2,0}]^T$, /$x_{2,0}$ dowolne/, nie są sterowalne.

2. Niech będzie dany dyskretny jednorodny proces biliniowy postaci /3.1/ o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b & b \\ -b & -b \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix} \quad c = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix} \quad d^T = [1 \ \ 1].$$

Ponadto
$$\sum_{i=1}^{i=n} b_{ii} s_i^j = b_{11} s_1^j + b_{22} s_2^j = b s_1^j - b s_2^j = b\left(s_1^j - s_2^j\right).$$

Ponieważ $b(s_1 - s_2) \neq 0$, więc $r = 1$, a zatem proces jest sterowalny.

3. Niech będzie dany dyskretny niejednorodny proces biliniowy postaci /3.2/ o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0 \\ c_1 \neq 0 \ , \ c_2 \neq 0 \end{matrix} \quad d^T = [1 \ \ 0].$$

Warunki 1/ oraz 2/ twierdzenia 3.2 są więc spełnione.
Jeżeli $s_1 \neq 1$ oraz $s_2 \neq 1$ ,to również warunek 3/ twierdzenia 3.2 jest spełniony,a więc rozpatrywany proces jest sterowalny.
Jeżeli $s_1 = 1$ ,to ponieważ $d_1 = 1 \neq 0$ ,więc $I = \{i : d_i \neq 0\} = \{1\}$.
Zatem warunek 3/ twierdzenia 3.2 nie jest spełniony i rozpatrywany proces nie jest sterowalny.
Niesterowalne stany procesu można wyznaczyć na podstawie relacji /3.2/, skąd otrzymuje się następujące zależności dla $k = 0,1,2,\ldots$

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \left\{ \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + u_k \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u_k \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 + c_1 u_k & 0 \\ c_2 u_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} u_k \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} + c_1 u_k x_{1,k} + c_1 u_k \\ c_2 u_k x_{1,k} + x_{2,k} + c_2 u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k} + c_1 u_k x_{1,k} + c_1 u_k \\ s_2 \left( c_2 u_k x_{1,k} + x_{2,k} + c_2 u_k \right) \end{bmatrix}.$$

Zatem dla $x_0 = [-1 \ \ x_{2,0}]^T$ , / $x_{2,0}$ dowolne / , otrzymuje się równości

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ s_2 x_{2,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ s_2^{k+1} x_{2,0} \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Wynika stąd,że stany początkowe procesu postaci $x_0 = [-1 \ \ x_{2,0}]^T$ , / $x_{2,0}$ dowolne / nie są sterowalne.

4. Niech będzie dany dyskretny niejednorodny proces biliniowy postaci /3.2/ , o następujących macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad d^T = [0 \ \ 1] \quad \begin{matrix} c_1 \neq 0 \ , \ c_2 \neq 0 \\ s_2 \neq 0 \end{matrix}$$

Ponieważ $I = \{i : d_i \neq 0\} = \{2\}$ oraz $d_2 = 1 \neq 0$ , więc warunki 1/,2/,3/ twierdzenia 3.2 są spełnione, a zatem rozpatrywany proces jest sterowalny.

LITERATURA

[1] Chang G.S.J., Tarn T.J., Elliot D.L., "Controllability of bilinear systems", Variable Systems and Application to Economics and Biology, Editors : Ruberti A., Mohler R.R., Springer, New York, 1975, pp.83-100.

[2] Evans M.E., Murthy D.N.P., "Controllability of a class of discrete time bilinear systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-22, no. 1, 1977, pp. 78 - 83.

[3] Evans M.E., Murthy D.N.P., "Controllability of discrete time inhomogeneous bilinear systems", Automatica, vol.14, pp.147-151, 1978.

[4] Goka T., Tarn T.J., Zaborszky J., "On the controllability of a class of discrete bilinear systems", Automatica, vol.9, 1973, pp.615-622.

[5] Koch G., Bruni C., Dipillo G., "Bilinear systems: An appealing class of nearly linear systems in theory and applications", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-19, 1974, pp.334-348.

[6] Mohler R.R., "Bilinear Control Processes", Academic Press, New York, 1973.

[7] Mohler R.R., Ruberti A., "Theory and Applications of Variable Structure Systems", Academic Press, New York, 1972.

[8] Murthy D.N.P., Evans M.E., "Comments on : The controllability of discrete linear systems with output feedback", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-22, no.4, 1977, pp.672-673.

[9] Tarn T.J., Elliot D.L., Goka T., "Controllability of discrete bilinear systems with bounded control", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.AC-18, 1973, pp.298-301.

[10] Tzafestas S., "Distributed parameter nuclear reaktor optimal control", Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, 1977.

УПРАВЛЯЕМОСТЬ БИЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье сформулировано необходимые и достаточные условия управляемости однородных и неоднородных билинейных дискретных систем управления, используя каноническую формулу Жордана. Рассматриваются примеры управляемых и неуправляемых билинейных дискретных систем.

CONTROLLABILITY OF BILINEAR DISCRETE SYSTEMS

S u m m a r y

In this paper, using the Jordan canonical form of the systems, the necessary and sufficient conditions for the controllability of the homogeneous and nonhomogeneous bilinear discrete systems are being derived. On the base of these conditions, several illustrative examples are given. In these examples the controllable and the noncontrollable discrete bilinear systems are considered.