ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Ewa Skubalska, Józef Grabowski
Instytut Cybernetyki Technicznej
Politechniki Wrocławskiej

ZASTOSOWANIE ZAGADNIEŃ TRANSPORTOWYCH W OPTYMALIZACJI DYSKRETNYCH PROCESÓW

Streszczenie. W artykule przedstawiono przegląd zagadnień transportowych z punktu widzenia ich zastosowania do optymalizacji dyskretnych procesów. Poza tym przedstawiono dwa nowe zagadnienia o charakterze transportowym, związane z optymalizacją struktur sieci transportowych, a mianowicie: zagadnienie przepływu o maksymalnej wartości i zagadnienie przepływu o minimalnym koszcie w sieci o zmiennej strukturze.

1. Wstęp

Jedną z licznych grup zagadnień optymalizacji liniowej są zagadnienia typu transportowego. Posiadają one specjalną strukturę ograniczeń, która pozwala na konstruowanie wyspecjalizowanych algorytmów bardziej efektywnych niż ogólne metody rozwiązywania zagadnień programowania liniowego. Ponadto gwarantują one przy pewnych warunkach otrzymanie rozwiązań całkowitoliczbowych. Tak więc algorytmy rozwiązywania zagadnień typu transportowego mogą być stosowane w odniesieniu do pewnych problemów o charakterze dyskretnym.

2. Zagadnienia typu transportowego

W zagadnieniach typu transportowego ograniczenia mają postać:

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \cdot a_{ij} \; R_i \; g_i, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{1}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,N, \tag{2}$$

gdzie: R_i jest jedną z relacji $\geqslant$, $=$, $\leqslant$, a macierz $A = \left[a_{ij}\right]_{j=1,2,\ldots,N}^{i=1,2,\ldots,m}$ ma następujące własności:

1) a_{ij} jest równe -1, 0 lub 1, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,N$,

2) każda kolumna macierzy A ma co najwyżej dwa elementy różne od zera.

Macierz A jest macierzą totalnie unimodularną, to znaczy każdy minor macierzy A jest równy 1, -1 lub 0. Jeżeli liczby $g_i \in C$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, to z własności totalnej unimodularności macierzy A wynika, że każde rozwiązanie bazowe problemu jest całkowitoliczbowe, a więc istnieje co najmniej jedno rozwiązanie optymalne, które jest całkowitoliczbowe [6,7].

3. Zagadnienie transportowo-kosztowe (ZTK)

Klasycznym przykładem zagadnienia typu transportowego jest zagadnienie transportowo-kosztowe. Przypuśćmy, że mamy m producentów jednorodnego towaru i n jego odbiorców. Dla każdego producenta (o numerze i = = 1,2,...,m) i każdego odbiorcy (o numerze j = 1,2,...,n) zadane są następujące wielkości:

a_i - wielkość produkcji i-tego producenta (zasób),

b_j - wielkość zapotrzebowania j-tego odbiorcy,

c_{ij} - koszt przewozu jednostki towaru od i-tego producenta do j-tego odbiorcy.

Należy określić ilość towaru, jaką należy przewieźć od każdego z producentów do każdego z odbiorców tak, by całkowity koszt transportu był minimalny, a jednocześnie by zaspokoić potrzeby każdego z odbiorców i nie przekroczyć zasobów żadnego z producentów.

Zagadnieniu odpowiada model matematyczny postaci:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, c_{ij} \longrightarrow \min \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \qquad j = 1,2,\ldots,m; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m; \tag{5}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

Do ZTK sprowadzalne jest zagadnienie transportowo-produkcyjne [3]. W problemie tym poza kosztami transportu występują koszty produkcji towaru u producenta. Niech

h_i - oznacza koszt produkcji jednostki towaru u i-tego producenta.

Model matematyczny zagadnienia transportowo-produkcyjnego przedstawia się następująco:
przy warunkach (4-6), minimalizować

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + h_i)\, x_{ij}\,. \tag{7}$$

Jeżeli przyjmiemy $c'_{ij} = c_{ij} + h_i$ (i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n), to zagadnienie transportowo-produkcyjne zostanie sprowadzone do ZTK z macierzą kosztów c'_{ij} .

W przypadku transportu towarów niepodzielnych, to znaczy, jeśli zamiast warunku (6) występuje warunek

$$x_{ij} \in C_+ \cup \{0\}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \; j = 1,2,\ldots,n, \tag{8}$$

(ze względu na wspomniane już własności macierzy ograniczeń w zagadnieniach typu transportowego), algorytmy stosowane do rozwiązywania ZTK [2,7] dają rozwiązanie całkowitoliczbowe, jeśli tylko a_i $(i = 1,\ldots,m)$ i b_j $(j = 1,\ldots,n)$ są liczbami całkowitymi. Do ZTK można sprowadzić niektóre zagadnienia harmonogramowania czynności, jeśli dopuszczalne jest ich przerywanie w trakcie wykonywania [1].

4. Zagadnienie przydziału (ZP)

ZP jest szczególnym przypadkiem ZTK dla towarów niepodzielnych. Zagadnienie to odgrywa szczególnie istotną rolę w optymalizacji dyskretnych procesów przemysłowych - przede wszystkim jako rozwiązanie przybliżone dla bardzo wielu skomplikowanych problemów optymalizacyjnych.

Zazwyczaj ZP interpretuje się w sposób następujący. Do produkcji n detali można przeznaczyć m różnych maszyn. Dla każdego detalu $(j = 1,2,\ldots,n)$ i dla każdej maszyny $(i = 1,2,\ldots,m)$ określony jest czas produkcji detalu c_{ij}. Należy tak przydzielić maszyny detalom, by każdej maszynie odpowiadał dokładnie jeden detal i sumaryczny czas pracy był minimalny.

Przyjmując zmienną decyzyjną

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli i-ta maszyna została przydzielona j-temu detalowi,} \\ 0, & \text{jeżeli taki przydział nie nastąpił,} \end{cases}$$

otrzymujemy następujący model matematyczny ZP:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, c_{ij} \longrightarrow \min \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1, \quad i = 1,2,\ldots,m, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{11}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \; j=1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

ZP może służyć także do rozwiązania problemu przydziału pracowników do maszyn, przy czym liczby c_{ij} interpretuje się jako wydajność i-tego pracownika przydzielonego do j-tej maszyny.

5. Zagadnienia przepływowe w sieci transportowej

Ściśle związane z zagadnieniami typu transportowego są zagadnienia przepływu w sieci transportowej. Ograniczenia występujące w tych problemach można podzielić na dwie części. Pierwszą z nich stanowią ograniczenia typu transportowego, na drugą składają się ograniczenia, którym odpowiada macierz jednostkowa.

Można pokazać [6], że macierz ograniczeń występująca w ograniczeniach przepływowych jest macierzą totalnie unimodularną. W konsekwencji, wszystkie własności dotyczące całkowitoliczbowości rozwiązań zagadnień typu transportowego przenoszą się na zagadnienia przepływowe.

Niech $G = (N,U)$ oznacza sieć transportową, w której N jest zbiorem wierzchołków a U zbiorem łuków. Zbiór N ma postać: $N = \{s\} \cup R \cup \{t\}$, gdzie s i t są odpowiednio źródłem i odbiorem sieci. Dalej niech:

$c(x,y)$ - jest przepustowością łuku $(x,y) \in U$,

$f(x,y)$ - oznacza przepływ w łuku $(x,y) \in U$.

Funkcja f jest nazywana przepływem w sieci G, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\sum_{y \in A_x} f(x,y) - \sum_{y \in B_x} f(y,x) = \begin{cases} v, & x = s, \\ 0, & x \in R, \\ -v, & x = t, \end{cases} \tag{13}$$

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant c(x,y), \tag{14}$$

gdzie v oznacza wartość przepływu w sieci $G = (N,U)$, a B_x i A_x są odpowiednio - zbiorem wierzchołków poprzedzających bezpośrednio wierzchołek x w sieci G i zbiorem wierzchołków, które bezpośrednio poprzedza wierzchołek x.

5.1. Zagadnienie przepływu o maksymalnej wartości w sieci transportowej (ZMP)

Zagadnienie to można przedstawić w następującej postaci:

$$v \longrightarrow \max \tag{15}$$

przy ograniczeniach (13-14).

5.2. Zagadnienie przepływu o minimalnym koszcie w sieci transportowej (ZMK)

Model matematyczny ZMK formułuje się następująco:

$$\sum_{(x,y) \in U} k(x,y) \cdot f(x,y) \longrightarrow \min \tag{16}$$

przy ograniczeniach (13-14), przy czym v jest w tym przypadku pewną stałą, a nie zmienną, $v = v^{*} \geqslant 0$, a $k(x,y)$ oznacza jednostkowy koszt przepływu w łuku (x,y). Zagadnienie to jest równoważne ZTK [2]. To znaczy, że można je poprzez zmianę zmiennych sprowadzić do ZTK, a równocześnie ZTK jest szczególnym przypadkiem ZMK, gdzie $r^{*} = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

6. Zagadnienia przepływowe w sieci o zmiennej strukturze

Poza zagadnieniami transportowymi, których modele matematyczne są poszczególnymi przypadkami programowania liniowego lub, które ze względu na szczególne własności macierzy ograniczeń mogą być rozwiązywane jako zagadnienia programowania liniowego, występują w praktyce zagadnienia transportowe, które są rozszerzeniem klasycznych problemów - ZTK czy zagadnień przepływowych. W zagadnieniach tych należy dokonać wyboru jednej z możliwych struktur sieci transportowej, tak by wybrana struktura sieci dawała najlepszą możliwą wartość funkcji celu (maksymalny przepływ bądź minimalne sumaryczne koszty transportu).

W wielu dziedzinach gospodarki występuje problem optymalnej (z pewnego punktu widzenia) lokalizacji środków transportu (wybór tras). W zagadnieniach tego typu istnieje stała sieć transportowa oraz zbiór dodatkowych środków transportu, które w razie potrzeby mogą być wykorzystane do przewozu materiałów między określonymi punktami stałej sieci transportowej. Problem optymalizacyjny polega na takiej lokalizacji dodatkowych środków transportu, by przewieźć maksymalną ilość materiału (zagadnienie przepływu o maksymalnej wartości) bądź by przewieźć wymaganą ilość materiału przy jednoczesnej minimalizacji łącznych kosztów transportu (zagadnienie przepływu o minimalnym koszcie).

Przykładem zagadnienia przepływu o maksymalnej wartości w sieci o zmiennej strukturze może być problem optymalizacji systemu transportowego w kopalni węgla brunatnego. W tym przypadku stała sieć transportowa składa się z przenośników taśmowych, natomiast sieć zmienną tworzą przenośniki rewersyjne, które mogą być podłączane w różnych momentach czasu do różnych punktów odbioru (węgla lub nadkładu). Należy dokonać takiego usytuowania przenośników rewersyjnych w przestrzeni i w czasie, aby móc przewieźć w określonym przedziale czasowym maksymalną ilość węgla i nadkładu.

W celu rozwiązania przedstawionego problemu należy rzeczywistą sieć transportową zastąpić odpowiednią siecią dynamiczną - rozwiniętą na czas siecią, w której każdy węzeł odpowiada pewnemu węzłowi rzeczywistej sieci transportowej w określonym momencie czasu (metoda konstruowania sieci dynamicznej przedstawiona jest w pracy [2]). Następnie należy dokonać optymalizacji systemu transportowego w nowej sieci dynamicznej, traktując tę sieć jak sieć statyczną. Wszystkie metody optymalizacji dotyczące sieci statycznych mogą być stosowane (bez żadnych zmian i adaptacji) w odniesieniu do sieci dynamicznych. W konsekwencji, w przedstawionym dalej modelu matematycznym zagadnienia, można bez straty ogólności rozważać przepływ w sieci statycznej.

Zatem, niech $G = (N,U)$ oznacza stałą sieć transportową (odpowiadającą rozwiniętej na czas rzeczywistej sieci transportowej utworzonej z przenośników nierewersyjnych). Ponadto niech $Q = \{1,2,\ldots,q\}$ będzie zbiorem dodatkowych środków transportowych (przenośniki rewersyjne w kolejnych momentach czasu) i niech $V^k = \{(x_1^k,y_1^k),(x_2^k,y_2^k),\ldots,(x_{r_k}^k,y_{r_k}^k)\}$ będzie zbiorem łuków, które odpowiadają wszystkim możliwym lokalizacjom k-tego środka transportowego (wszystkim możliwym rewersjom przenośnika rewersyjnego w pewnym momencie czasowym). Lokalizacja k-tego środka transportowego w p-tym miejscu odpowiada dołączeniu do sieci transportowej łuku (x_p^k,y_p^k).

Niech

$$x_{kp} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli łuk } (x_p^k,y_p^k) \text{ jest dołączony do sieci,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zagadnienie przepływu o maksymalnej wartości w sieci o zmiennej strukturze (oznaczmy je przez P1) można przedstawić następująco:

$$v \longrightarrow \max \tag{17}$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{y\in A_x'} f(x,y) - \sum_{y\in B_x'} f(y,x) = \begin{cases} v, & x = s, \\ 0, & x \in R, \\ -v, & x = t, \end{cases} \tag{18}$$

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant c(x,y), \quad (x,y) \in U \tag{19}$$

$$0 \leqslant f(x_p^k,y_p^k) \cdot x_{kp} \leqslant c(x_p^k,y_p^k), \quad (x_p^k,y_p^k) \in V \tag{20}$$

$$\sum_{p=1}^{r_k} x_{kp} = 1, \quad k \in Q \tag{21}$$

$$x_{kp} \in \{0,1\}, \quad (x_p^k,y_p^k) \in V^k, \quad k \in Q, \tag{22}$$

gdzie B_x' (A_x') oznaczają zbiór węzłów poprzedzających węzeł x (które poprzedza węzeł x) w sieci transportowej $G' = (N, U \cup V)$. Wszystkie pozostałe oznaczenia są takie same, jak w modelach zagadnień przepływowych (ZMP, ZMK).

Model matematyczny zagadnienia przepływu o minimalnym koszcie w sieci o zmiennej strukturze (oznaczmy je przez P2) różni się od modelu zagadnienia P1 jedynie kryterium optymalizacji, które ma postać:

$$\sum_{(x,y)\in U \cup V} f(x,y)\ k(x,y) \longrightarrow \min, \tag{23}$$

a wartość przepływu v nie jest zmienną, lecz stałą $v = v^* \geqslant 0$ (podobnie jak w ZMK).

Zagadnienie P1 i P2 można rozwiązać przy użyciu teorii grafów dysjunktywnych. Algorytm rozwiązania zagadnienia P1 (wraz z wynikami eksperymentów obliczeniowych na m.c.) został przedstawiony w pracy [4], a zagadnienie P2 w pracy [5].

LITERATURA

[1]Coffman E.G. (red): Computer and job-shop scheduling theory, Wiley, New York 1976.

[2]Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach, PWN, Warszawa 1969.

[3]Gale D.: Teoria liniowych modeli ekonomicznych, PWN, Warszawa 1969.

[4]Grabowski J., Skubalska E.: The maximal flow problem in a network with a variable structure, Zastosowania Matematyki (w druku).

[5]Grabowski J., Skubalska E.: The minimum cost flow problem in a network with a variable structure, Matematyka Stosowana (w druku).

[6]Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa 1974.

[7]Simonnard M.: Programowanie liniowe, PWN, Warszawa 1967.

ПРИМЕНЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ В ОПТИМИЗАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р е з ю м е

В работе представлено анализ транспортных задач с точки зрения их применения к оптимизации дискретных процессов. Представлено две новые транспортные задачи: проблему максимального потока и проблему потока минимальной стоимости в цепи с переменной структурой.

AN APPLICATION OF TRANSPORTATION PROBLEMS TO DISCRETE PROCESSES´OPTIMIZATION

S u m m a r y

In the paper a review of transportation problems is considered from the point of view of their applications to discrete processes´optimization. Moreover, two new transportation problems i.e.: the maximal flow problem and the minimum cost flow problem in a network with a variable structure are presented.