ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Roman Słowiński

Politechnika Poznańska

OPTYMALNY ROZDZIAŁ ZASOBÓW RÓŻNYCH KATEGORII MIĘDZY OPERACJE NIEPODZIELNE

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób wyznaczania optymalnego sterowania rozdziałem zasobów odnawialnych, nieodnawialnych i podwójnie ograniczonych między operacje niepodzielne, tworzące sieć typu PERT. Każda operacja charakteryzuje się dyskretnym zapotrzebowaniem zasobowym, określającym wiele możliwych sposobów jej wykonania. Rozpatrzono czasowe i kosztowe kryteria optymalności sterowania.

1. Wstęp

W dotychczasowych pracach, dotyczących sterowania rozdziałem zasobów między operacje niepodzielne tworzące sieć typu PERT, rozważono jedynie zasoby, które z punktu widzenia ograniczeń zasobowych należą do tej samej kategorii [14] . Rozpatrywano więc kategorię zasobów odnawialnych, takich jak: siła robocza, moc, maszyny, dla których jedynie liczba jednostek w każdej chwili wykonywania zbioru operacji może być ograniczona, albo nieodnawialnych, takich jak: nakłady finansowe, energia, surowce, dla których jedynie zużycie w okresie wykonywania zbioru operacji może być ograniczone /por. prace przeglądowe [3,8]/. W praktyce spotykamy jednak zazwyczaj sytuacje, w których do wykonywania operacji potrzebne są zasoby odnawialne i nieodnawialne, a także zasoby zwane podwójnie ograniczonymi, dla których ograniczenia mogą dotyczyć zarówno liczby jednostek w każdej chwili, jak i zużycia w okresie wykonywania zbioru operacji. Przykładem tej ostatniej kategorii może być moc, w przypadku ograniczenia jej ilości i zużycie energii lub przepływ czynnika roboczego, w przypadku ograniczenia przepływu oraz objętości czynnika. Rozpatrywanie takich sytuacji stanowi aktualnie jeden z najważniejszych kierunków w zakresie sterowania rozdziałem zasobów, posiadający szczególnie istotne znaczenie praktyczne. Wyniki uzyskane dotychczas w ramach tego kierunku dotyczą w zasadzie wyłącznie operacji podzielnych; w [9,10] podano algorytmy sterowania jednoczesnym rozdziałem zasobów wszystkich trzech kategorii między operacje scharakteryzowane dowolnymi dyskretnymi zapotrzebowaniami zasobowymi określającymi wiele możliwych sposobów ich wykonywania oraz modelami matematycznymi w postaci czasów wykonywania poszczególnymi sposobami; w pracy [11] rozpatrzono dla tego przypadku problem optymalizacji wielokryterialnej, a w [15] rozwiązano problem minimalno-czasowego sterowania rozdziałem zasobów podwójnie ograniczonych, w którym modele matematyczne operacji mają postać funkcji: prędkość wykonywania – ilość zasobów.

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem optymalnego sterowania jednoczesnym rozdziałem zasobów wszystkich trzech kategorii dla przypadku operacji niepodzielnych, dowolnych dyskretnych zapotrzebowań zasobowych operacji /czyli wielu sposobów ich wykonywania/ i modeli matematycznych w postaci czasów wykonywania operacji poszczególnymi sposobami. Problem optymalizacyjny sformułowano w postaci zadania zero-jedynkowego /0-1/ programowania liniowego dla następujących kryteriów optymalności: /a/ czas wykonywania zbioru operacji, /b/ średnie ważone opóźnienie wykonania operacji, /c/ średni ważony czas obsługi operacji oraz /d/ łączne ważone zużycie zasobów nieodnawialnych i podwójnie ograniczonych. Zaproponowano metodę wyznaczania sterowania optymalnego opartą na algorytmie dedukcyjnego przeglądu. W rozdziale 2 wprowadzimy podstawowe definicje i oznaczenia, w rozdziale 3 sformułujemy zadanie 0-1 programowania liniowego dla poszczególnych kryteriów, a w rozdziale 4 scharakteryzujemy sposób jego rozwiązania.

2. Definicje i oznaczenia

Zbiór zasobów $\mathcal{R}$ złożony jest z trzech kategorii zasobów; w ramach każdej kategorii jednostki zasobów pogrupowane są w rodzaje zależnie od spełnianych funkcji. W szczególności zbiór $\mathcal{R}$ zawiera:

/a/ p rodzajów zasobów odnawialnych $\{R_1^o,\dots,R_p^o\}$ z ograniczeniem ilości dostępnej w każdej chwili do N_k jednostek, $k=1,\dots,p$,

/b/ v rodzajów zasobów nieodnawialnych $\{R_1^n,\dots,R_v^n\}$ z ograniczeniem zużycia do B_k jednostek, $k=1,\dots,v$.

/c/ u rodzajów zasobów podwójnie ograniczonych z ograniczeniem ilości do N_k^p jednostek i zużycia - do B_k^p jednostek, $k=1,\dots,u$.

Niech zbiór operacji $\mathcal{A}$ zawiera n operacji niepodzielnych $\{A_1,\dots,A_n\}$. W celu zdefiniowania sposobu wykonywania operacji $A_i \in \mathcal{A}$ wprowadzimy $h_i \times (p+v+u)$ - wymiarową macierz $S_i=[\bar{r}_{i1}^o\dots\bar{r}_{ip}^o\ \bar{r}_{i1}^n\dots\bar{r}_{iv}^n\bar{r}_{i1}^p\dots\bar{r}_{iu}^p]$, gdzie j-ty wiersz $[r_{ij1}^o\dots r_{ijp}^o r_{ij1}^n\dots r_{ijv}^n r_{ij1}^p\dots r_{iju}^p]$ złożony jest z dopuszczalnych liczb jednostek zasobów R_k^o, $k=1,\dots,p$, R_k^n, $k=1,\dots,v$ oraz R_k^p, $k=1,\dots,u$, które mogą jednocześnie brać udział w wykonywaniu operacji A_i, $j=1,\dots,h_i$; $i=1,\dots,n$. Wiersz j-ty macierzy S_i określa j-ty sposób wykonywania operacji A_i, $j=1,\dots,h_i$. Każda operacja może być wykonywana w każdej chwili tylko jednym z określonych dla niej sposobów. Dla j-tego sposobu wykonywania A_i znany jest czas wykonywania p_{ij}, $j=1,\dots,h_i$; $i=1,\dots,n$. Dodajmy, że w przypadku gdy jednostki zasobu R_k^o nie są identyczne, elementy r_{ijk}^o, zamiast liczby jednostek zasobów odnawialnych, mogą oznaczać indeksy tych jednostek; np. w przypadku maszyn jednego rodzaju o różnych wydajnościach pracy. Należy również zaznaczyć, że jednostki zasobów R_k^n i R_k^p są identyczne w ramach poszczególnych rodzajów oraz, że r_{ijk}^n wyrażone jest w jed -

nostkach zużycia, natomiast r^p_{ijk} określa liczbę jednostek R^p_k wykorzystywaną w każdej chwili wykonywania A_i j-tym sposobem, podczas gdy zużycie R^p_k w pewnym przedziale czasowym otrzymuje się przez pomnożenie r^p_{ijk} przez długość tego przedziału. Dla każdej operacji A_i określony jest moment gotowości a_i, przed którym nie można rozpocząć jej wykonywania oraz termin zakończenia wykonywania d_i, przed którym wykonywanie A_i powinno się zakończyć; jeżeli d_i jest terminem nieprzekraczalnym, to nazywa się linią krytyczną.

W zbiorze operacji określone są ograniczenia kolejnościowe w postaci sieci typu PERT.

Jako kryterium optymalności sterowania Q obierzemy albo kryterium o charakterze czasowym, takie jak: a) czas wykonywania zbioru $\mathcal{A}$, $T=\max_i[t_i]$, gdzie t_i jest momentem zakończenia wykonywania A_i, b) średnie ważone opóźnienie wykonania operacji, $\bar{L}=\frac{1}{n}\sum_i w_i(t_i-d_i)$, c) średni ważony czas obsługi operacji, $\bar{F}=\frac{1}{n}\sum_i w_i(t_i-a_i)$, gdzie w_i jest wagą przypisaną operacji A_i, albo kryterium o charakterze kosztowym, czyli d) łączne ważone zużycie zasobów nieodnawialnych i podwójnie ograniczonych, tzn. koszt wykonywania zbioru $\mathcal{A}$, $K=\sum_{k=1} c_k K_k + \sum_{k=1} c^p_k K^p_k$, gdzie c_k i c^p_k są kosztami jednostkowymi R^n_k i R^p_k, a K_k i K^p_k łącznym zużyciem, odpowiednio R^n_k i R^p_k.

Przydział / w czasie/ zasobów ze zbioru $\mathcal{R}$ do operacji ze zbioru $\mathcal{A}$, minimalizujący zadane kryterium Q przy spełnieniu nałożonych ograniczeń, nazwiemy sterowaniem optymalnym.

3. Sformułowanie zadania optymalizacyjnego

Zero-jedynkowe programowanie liniowe zastosowano już do problemu czaso-optymalnego rozdziału zasobów odnawialnych w przypadku jednego sposobu wykonywania każdej operacji [8] . W [4, s.173-183] stwierdzono, że dla przypadku wielu sposobów wykonywania operacji nie uzyskano dotąd zadowalających rezultatów. Obecnie rozszerzymy to podejście na przypadek zasobów różnych kategorii i wielu sposobów wykonywania operacji oraz na inne kryteria optymalności.

Niech T_h oznacza górną granicę czasu wykonywania zbioru $\mathcal{A}$, zwaną horyzontem czasowym. Przy wyznaczaniu T_h warto posłużyć się regułą heurystyczną, będącą prostym uogólnieniem jednej z reguł opisanych, np. w [8] dla przypadku zasobów odnawialnych i jednego sposobu wykonywania każdej operacji. Załóżmy, że T_h oraz czasy wykonywania operacji mają wartości całkowite. Jeżeli podzielimy horyzont czasowy na jednostkowe okresy, to możemy zdefiniować zmienną zero-jedynkową x_{it}, która w zależności od podejścia określa czy wykonywanie A_i ma miejsce w okresie t /Wiest [13] / , albo kończy się w okresie t /Pritsker i in. [7] /, czy też rozpoczyna się w okresie t /Elmaghraby [2,rozdz.2.1] /. Przyjęcie jednej z tych definicji ma istotny wpływ na rozmiar i strukturę zadania 0-1 programowania liniowego. Okazuje się, że wybór definicji x_{it} wyłącznie pod kątem minimalizacji rozmiaru zadania nie gwarantuje minimalnego czasu obliczeń [6], większe znaczenie ma bowiem struktura zadania. W dalszym ciągu przyjmiemy definicję Elmaghraby-ego, gdyż wynikająca z niej struktura zadania pozwala na wprowadzenie bardzo efektywnej techniki cięć do procedury dedukcyjnego przeglądu stosowanej przy wyznaczaniu rozwiązania optymalnego.

Założymy, że wierzchołki /zdarzenia czasowe/ sieci ograniczeń kolejnościowych są uporządkowane w ten sposób, że dla każdego łuku /operacji/, jego wierzchołek końcowy ma numer wyższy od numeru wierzchołka początkowego. Ponadto założymy bez utraty ogólności, że A_n jest jedyną operacją bez następników. Zdefiniujmy zmienną zadania optymalizacyjnego:

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli wykonywanie } A_i \text{ j-tym sposobem rozpoczyna się w okresie t,} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

oraz wprowadźmy następujące oznaczenia:

e_i - najwcześniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia wykonywania A_i,

l_i - najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia wykonywania A_i,

P_i - zbiór bezpośrednich poprzedników operacji A_i /ze względu na ograniczenia kolejnościowe/.

Dodajmy, że e_i oraz l_i wynikają ze znanej analizy ścieżki krytycznej przy założeniu, że wszystkie operacje wykonywane są swoimi najszybszymi sposobami oraz przy uwzględnieniu momentów gotowości i zadanych linii krytycznych d_i, czyli $e_i \geq a_i$ oraz $l_i \leq d_i$; jak łatwo zauważyć, $l_n = T_h - p_{nj*}$, gdzie p_{nj*} jest najkrótszym czasem wykonywania A_n.

Funkcja celu zadania optymalizacyjnego ma dla poszczególnych kryteriów następującą postać:

/a/ $$T = \sum_{j=1}^{h_n} \sum_{t=e_n}^{l_n} t\, x_{njt}\,, \tag{1}$$

/b/ $$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i \Big(\sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} t\, x_{ijt} - d_i \Big)\,, \tag{2}$$

/c/ $$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i \Big(\sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} t\, x_{ijt} - a_i \Big)\,, \tag{3}$$

/d/ $$K = \sum_{k=1}^{v} c_k K_k + \sum_{k=1}^{u} c_k^p K_k^p\,, \tag{4}$$

gdzie: $$K_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} r_{ijk}^n\, x_{ijt}\,, \quad k=1,\dots,v \quad \text{oraz}$$

$$K_k^p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} r_{ijk}^p\, p_{ij}\, x_{ijt}\,, \quad k=1,\dots,u.$$

Zbiór ograniczeń obejmuje następujące warunki :
- na wykonanie każdej operacji jednym sposobem

$$\sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} x_{ijt} = 1 \qquad i=1,\dots,n \qquad /5/$$

- na kolejność wykonywania operacji

$$\sum_{j=1}^{h_i} \sum_{t=e_i}^{l_i} t\, x_{ijt} - \sum_{j=1}^{h_f} \sum_{t=e_f}^{l_f} (t+p_{fj})\, x_{fjt} \geqslant 0 \qquad \forall f \in P_i;\ i=1,\dots,n \qquad /6/$$

- na dostępność zasobów
  + odnawialnych

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h_i} \sum_{q=\max[t-p_{ij}+1,\ 1]}^{t} r^o_{ijk}\, x_{ijq} \leqslant N_k \qquad t=1,\dots,T_h \quad k=1,\dots,p \qquad /7/$$

  + nieodnawialnych

$$K_k \leqslant B_k \qquad k=1,\dots,v \qquad /8/$$

  + podwójnie ograniczonych

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{h_i} \sum_{q=\max[t-p_{ij}+1,1]}^{t} r^p_{ijk}\, x_{ijq} \leqslant N^p_k \qquad t=1,\dots,T_h; \quad k=1,\dots,u \qquad /9/$$

$$K^p_k \leqslant B^p_k \qquad k=1,\dots,u \qquad /10/$$

Oczywiście $x_{ijt} \equiv 0$ dla $t<e_i$ lub $t>l_i$. Sterowanie optymalne jest zdefiniowane przez ciąg wartości $\{x_{ijt}\}^n_{i=1,j=1,t=e_i}$ minimalizujących zadaną funkcję celu /1/ - /4/ przy spełnieniu warunków /5/ - /10/.

Zauważmy, że decydując się na minimalizację jednego z kryteriów można ograniczyć wartość pozostałych kryteriów, np. przy minimalizacji K można wprowadzić ograniczenie na czas wykonywania zbioru $\mathcal{A}$, $T \leqslant T_h$.

4. Wyznaczanie sterowania optymalnego

Zero-jedynkowe programowanie liniowe zyskało na znaczeniu z chwilą opracowania przez Balasa [1] , a później rozwinięcia przez Geoffriona [5] algorytmu dedukcyjnego przeglądu, który w porównaniu z innymi znanymi technikami całoliczbowego programowania liniowego ma znacznie korzystniejsze własności obliczeniowe. Zastosujemy ten algorytm do wyznaczania sterowania optymalnego dla naszego problemu, czyli do rozwiązania zadania optymalizacyjnego, sformułowanego w rozdziale poprzednim. Warto w tym celu wykorzystać ideę algorytmu dedukcyjnego przeglądu opracowanego dla problemu sterowania rozdziałem zasobów odnawialnych, przy jednym sposobie wykonywania każdej operacji [6,12]. Jest on aktualnie najlepszym algorytmem dla tego przypadku. W celu zastosowania tego algorytmu do rozpatrywanego tu ogólnego problemu rozdziału zasobów należy uporządkować operacje w ten sposób, że jeżeli $i \in P_j$, to $i<j$. Ponieważ uporządkowanie takie jest w ogólności nie-niejednoznaczne , to można je wyznaczyć regułą heurystyczną, która przydziela niższy numer operacji o mniejszym luzie całkowitym. Następnie, należy uporządkować ograniczenia /7/ , /9/ na ilość zasobów odnawialnych i podwójnie ograniczonych w ten sposób, by ograniczenie dotyczące zasobu, na które łączne zapotrzebowanie jest w stosunku do ilości dostępnej maksymalne w dłuższym okresie czasu, otrzymało numer wyższy. Inn-ymi słowy, dla k-tego ograniczenia określa się parametr $J_k = \sum_i \sum_j I_{ijk}$, $k=1,\ldots,p+u$, gdzie $I_{ijk} = p_{ij}$ dla k maksymalizującego r^o_{ijk}/R^o_k lub r^p_{ijk}/R^p_k oraz $I_{ijk}=0$ dla innych k, a następnie porządkuje się te ograniczenia według malejących wartości J_k. Uporządkowanie to ma na celu jak najszybsze wykrycie niedopuszczalności zasobowej dla sterowania częściowego sprawdzanego w procesie dedukcyjnego przeglądu. Wynika stąd, że wzrost liczby zasobów i ściślejsze ograniczenia mają korzystny wpływ na efektywność algorytmu. Uporządkowaniu podlegają również sposoby wykonywania operacji, przy czym sposób tego uporządkowania zależy od charakteru kryterium. Mianowicie dla kryteriów czasowych sposoby wykonywania poszczególnych operacji należy uporządkować w kolejności rosnących czasów wykonywania p_{ij}, natomiast dla kryterium kosztowego, w kolejności rosnącego kosztu zużycia zasobów nieodnawialnych i podwójnie ograniczonych. Po tym uporządkowaniu, o istotnym znaczeniu dla efektywności dalszego ciągu procedury, można przystąpić do właściwego algorytmu dedukcyjnego przeglądu [1] , który systematycznie ulepsza początkowe sterowanie dopuszczalne na drodze przeszukiwania zbioru sterowań częściowych. W celu podwyższenia efektywności tej procedury celowe jest zastosowanie techniki cięć /fathoming/ [12] , która wykorzystując strukturę zadania optymalizacyjnego pozwala na rozpoznawanie w procesie przeglądu takich sterowań częściowych, które nie prowadzą do sterowań lepszych od aktualnie znanych i eliminacji ich z dalszych rozważań.

W rezultacie opisany sposób wyznaczania sterowania optymalnego, w porównaniu ze standardową procedurą rozwiązania zadania 0-1 programowania liniowego, charakteryzuje się krótszym czasem obliczeń i mniejszym zapotrzebowaniem na pamięć maszyny cyfrowej.

LITERATURA

[1] Balas, E., : An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables, Operations Res, vol.13, no.4, 1965.

[2] Bennington G.E., McGinnis L.F. : A Critique of Project Planning with Constrained Resources. Report no.81, Operations Research, North Carolina State University, Raleigh, 1972.

[3] Davis E.W. : Project scheduling under resource constraints - historical review and categorization of procedures, AIIE Transactions, vol.5, no.4, 1973.

[4] Elmaghraby S.E. : Activity Networks - Project Planning and Control by Network Models, J.Wiley, New York 1977.

[5] Geoffrion A.M. : Integer programming by implicit enumeration and Balas' method, SIAM Review, vol.9, no.2, 1967.

[6] Patterson J.H., Roth G.W. : Scheduling a project under multiple resource constraints : a zero-one programming approach, AIIE Transactions vol.8, no.4, 1976.

[7] Pritsker A.A.B., Watters L.J., Wolfe P.M.: Multiproject scheduling with limited resources : a zero-one programming approach, Management Sci. vol.16, no.1, 1969.

[8] Słowiński R., : Optimal and heuristic procedures for project scheduling with multiple constrained resources - a survey, Foundations of Control Engineering vol.2, no.1, 1977.

[9] Słowiński R. : Allocation de ressouces limitées parmi des tâches exécutées par un ensemble de machines indépendantes. W M.Pelegrin, J.Delmas /red./ : Comparison of Automatic Control and Operational Research Techniques Applied to Large Systems Analysis and Control, Pergamon Press, Oxford 1979.

[10] Słowiński R. : Two approaches to problems of resource allocation among project activities - a comparative study. Journal of the Operational Research Society /w druku/ 1980.

[11] Słowiński R.: Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and non-renewable resources. Proc. of the 6th INTERNET Congress, vol.2, VDI-Verlag GmbH , Düsseldorf 1979.

[12] Talbot F.B., Patterson J.H. : An efficient integer programming algorithm with network cuts for solving resource-constrained scheduling problem. Management Sci. vol.24, no.11, 1978.

[13] Wiest J.D. : The Scheduling of Large Projects with Limited Resources. Praca doktorska. Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh. 1963.

[14] Węglarz J. : New models and procedures for resource allocation problems. Proc. of the 6th INTERNET Congress, vol.2, VDI- Verlag GmbH, Düsseldorf 1979.

[15] Węglarz J. : Project scheduling with continuously divisible, doubly -constrained resources. Management Sci. /w druku/ 1980.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ РАЗНЫХ КАТЕГОРИЙ МЕЖДУ НЕРАЗДЕЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ

Р е з ю м е

В работе представлен алгоритм для оптимального распределения ограниченных обновляемых, необновляемых и двойственно-ограниченых ресурсов между нераздельные операции даные в виде сети ПЕРТ. Каждая операция характеризуется дискретными ресурсными потреблениями. Рассмотрены критерии времени и стоимости для оценки оптимальности управления.

OPTIMUM ALLOCATION OF RESOURCES OF DIFFERENT CATEGORIES AMONG NON-SPLITTABLE ACTIVITIES

S u m m a r y

The paper presents an algorithm of optimum control of the allocation of limited renewable, non-renewable and double-constrained resources among non-splittable activities presented in the form of an activity network. Each activity has discrete resource requirements defining multiple performing modes. The time-and the cost-optimum criterions are considered.