ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Krystyn Styczeń
Politechnika Wrocławska

CZASOWO-OPTYMALNE STEROWANIE KOMPLEKSEM NIEZALEŻNYCH OPERACJI DYNAMICZNYCH O CZASIE DYSKRETNYM

Streszczenie. W pracy rozważany jest problem czasowo-optymalnego rozdziału resursów w kompleksie niezależnych operacji dynamicznych, o czasie dyskretnym i o modelach wklęsłych. Przedstawiono metodę wyznaczania optymalnego rozdziału resursów, polegającą na sprowadzaniu do zera odległości między wektorem zadań w kompleksie operacji i stanem końcowym kompleksu.

1. Wstęp

W pracy [2] sformułowano problem czasowo-optymalnego rozdziału resursów w kompleksie niezależnych operacji dynamicznych o czasie dyskretnym. Problem ten stanowi dyskretny analog problemu czasowo-optymalnego rozdziału resursów w kompleksie niezależnych operacji dynamicznych o czasie ciągłym [1]. We wspomnianej pracy [2] przedstawiono metodę wyznaczania optymalnego rozdziału resursów w kompleksie operacji o modelach wklęsłych. Metoda ta polegała na wyznaczaniu odległości między punktem zadającym rozdział zadań w kompleksie i zbiorami stanów osiągalnych przez kompleks w poszczególnych momentach czasowych. Następnie określany był optymalny czas sterowania jako najmniejszy czas, dla którego wymieniona odległość jest równa zeru. Znajdowanie optymalnego sterowania /optymalnego rozdziału resursów/ sprowadzone zostało do rozwiązywania układu nieliniowych równań i nierówności. Poszukiwanie dopuszczalnego rozwiązania wspomnianego układu równań i nierówności proponowano przeprowadzać za pomocą metod numerycznych.

W prezentowanej pracy przedstawiono metodę wyznaczenia optymalnego rozdziału resursów wykorzystującą określoną uprzednio odległość między wektorem zadań w kompleksie operacji i zbiorem jego stanów osiągalnych. Metoda ta pozwala znaleźć optymalny rozdział resursów jako rozdział, dla którego odległość między wektorem zadań w kompleksie operacji i stanem końcowym kompleksu jest równa zeru, przy minimalnym czasie sterowania.

2. Sformułowanie problemu.

W pracy rozważany jest kompleks operacji dynamicznych opisanych za pomocą następujących równań:

$$x_{i,k+1} - x_{ik} = f_i(x_{ik},u_{ik}), \quad x_{io} = 0, \quad i=1,2,\ldots,n; \; k=0,1,2,\ldots \qquad /1/$$

gdzie x_{ik} oznacza stan i-tej operacji w momencie k-tym, u_{ik} - ilość resursów przydzielonych i-tej operacji w przedziale czasowym $[k,k+1)$, n - liczbę operacji w kompleksie.

Funkcje $f_i: R_o^2 \to R_o$, $i=1,\ldots,n$, spełniają następujące warunki /R_o oznacza tu zbiór nieujemnych liczb rzeczywistach/:

a) $f_i(x_{ik},u_{ik})$ - rosnąca ze względu na u_{ik} dla każdego ustalonego x_{ik} i niemalejąca ze względu na x_{ik} dla każdego ustalonego u_{ik}, /2/

b) $(f_i(x_{ik},u_{ik}) = 0) \Leftrightarrow (u_{ik} = 0)$, /3/

c) $f_i(x_{ik},u_{ik})$ - wklęsła i ciągła. /4/

Warunki /2/ i /3/ wynikają z faktu, że funkcje f_i opisują operacje, zaś warunek /4/ stanowi dodatkowe założenie.

Stan kompleksu operacji w momencie k-tym będzie dalej oznaczany jako $x_k = (x_{1k},\ldots,x_{nk})^T$, natomiast sterowanie dla kompleksu operacji w momencie k-tym /rozdział resursów w przedziale $[k,k+1)$/ - jako $u_k = (u_{1k},\ldots,u_{nk})^T$.

Sterowaniem dopuszczalnym dla kompleksu operacji będzie nazywany ciąg $u = (u_o,\ldots,u_k,\ldots,u_{K-1})$, spełniający następujące warunki:

a) $u_k \in U_k = \left\{(u_{1k},\ldots,u_{nk})^T \in R_o^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} u_{ik} \leqslant N_k,\; u_{ik} \geqslant 0,\; i=1,\ldots,n\right\}$, $k=0,1,\ldots,K-1$,

gdzie $N_k > 0$ oznacza zależną w ogólnym przypadku od czasu ilość resursów dostępną w kompleksie operacji w przedziale czasowym $[k,k+1)$,

b) ciąg u generuje poprzez układ równań /1/ trajektorię stanu $x = (x_o,\ldots,x_k,\ldots,x_K)$, dla której istnieją liczby naturalne K_i, $i=1,\ldots,n$, takie, że

$$K_i = \min\left\{k \in \{0,1,\ldots,K\} \,\middle|\, x_{ik} = s_i > 0\right\}, \quad i=1,\ldots,n; \quad K = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i,$$

c) $\bigwedge_{k \in \{0,1,\ldots,K\}} x_{ik} \leqslant s_i$, $i=1,\ldots,n$.

K_i oznacza tu czas realizacji i-tej operacji, wielkość s_i oznacza zadanie dla i-tej operacji, czyli jej stan końcowy, a K oznacza czas realizacji całego kompleksu operacji. Zbiór wszystkich sterowań dopuszczalnych kompleksu operacji oznaczany będzie jako U.

Problem czasowo-optymalnego rozdziału resursów w kompleksie operacji /1/ będzie polegać na wyznaczeniu takiego sterowania dopuszczalnego /rozdziału resursów/ $u \in U$, które minimalizuje kryterium

$$I(u) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i .$$

Tak sformułowany problem sterowania optymalnego kompleksem operacji /1/ będzie nazywany problemem podstawowym.

W pracy oprócz problemu podstawowego będzie rozważany problem zastępczy sformułowany następująco. Niech w kompleksie operacji /1/ sterowanie dopuszczalne będzie określone jako ciąg $u = (u_o,\ldots,u_k,\ldots,u_{K-1})$ spełniający następujące warunki:

a) $u_k \in U_k$, $k=0,1,\ldots,K-1$,

b) ciąg u generuje poprzez układ równań /1/ trajektorię stanu $x=(x_0,\ldots$
$\ldots,x_k,\ldots,x_K)$, dla której spełniony jest warunek

$$K = \min\{k \in \{0,1,\ldots,K\} \mid x_{ik}=s_i,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Zbiór wszystkich sterowań dopuszczalnych w problemie zastępczym oznaczany będzie jako V.

Problem zastępczy sterowania optymalnego kompleksem operacji /1/ polegać będzie na wyznaczeniu takiego sterowania dopuszczalnego $u \in V$, które minimalizuje kryterium

$$J(u) = K.$$

3. Wyznaczanie optymalnego rozdziału resursów poprzez sprowadzanie do zera odległości między wektorem zadań i stanem końcowym kompleksu przy minimalnym czasie sterowania

W pracy [2] wykazano, że sterowanie optymalne problemu zastępczego jest równocześnie sterowaniem optymalnym problemu podstawowego. Pozwala to, zamiast problemu podstawowego, rozważać jakościowo prostszy problem zastępczy. We wspomnianej pracy wykazano także, że odległość punktu $s=(s_1,\ldots,s_n)^T$ zadającego rozdział zadań w kompleksie operacji od zbioru X_k stanów osiągalnych przez kompleks w k-tym momencie czasowym wyraża się wzorem

$$\operatorname{dist}(s,X_k) = \max_{g \geq 0,\|g\| \leq 1} \left(g^T s - h(g)\right),$$

gdzie

$$h(g) = \max_{\substack{u_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{ij}=N_j}\ \ i=1,\ldots,n,\ j=0,\ldots,k-1} \sum_{i=1}^{n} g_i \sum_{j=0}^{k-1} f_i^j(u_{io},\ldots,u_{ij}), \qquad /5/$$

$$f_i^o(u_{io}) = f_i(0,u_{io}),\quad f_i^j(u_{io},\ldots,u_{ij}) = f_i\Big(\sum_{h=0}^{j-1} f_i^h(u_{io},\ldots,u_{ih}),u_{ij}\Big),$$
$$j=1,\ldots,k-1,$$

zaś $g \in R^n$.

W pracy [2] ustalono również, że optymalny czas sterowania K kompleksem operacji /1/ może być wyznaczony poprzez rozwiązanie problemu programowania całkowitoliczbowego postaci

$$K = \min\left\{k \in \{0,1,2,\ldots\} \mid d(k,s_1,\ldots,s_n,N_o,\ldots,N_{k-1}) \leq 1\right\},$$

gdzie

$$d(k,s_1,\ldots,s_n,N_o,\ldots,N_{k-1}) = \max_{g \geq 0,h(g)=1} g^T s = \Big(\min_{g \geq 0,g^T s=1} h(g)\Big)^{-1}. \qquad /6/$$

Wykażemy następujący

<u>Lemat 1.</u> Jeśli K jest optymalnym czasem sterowania dla kompleksu operacji /1/, to istnieje $\widetilde{N}_{K-1} \in (0, N_{K-1}]$ takie, że

$$d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, \widetilde{N}_{K-1}) = 1. \qquad /7/$$

<u>Dowód.</u> Jeśli $d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, N_{K-1}) = 1$, to teza lematu jest spełniona dla $\widetilde{N}_{K-1} = N_{K-1}$. Załóżmy więc, że $d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, N_{K-1}) < 1$. Funkcja $d(\cdot)$ może być wyrażona w postaci [2]

$$d(\cdot) = \max_{\substack{g \geq 0 \\ g \neq 0}} \frac{g^T s}{h(g, N_o, \ldots, N_{K-1})}. \qquad /8/$$

Dokonując podstawienia $u_{i,K-1} = N_{K-1} u'_{i,K-1}$, $i=1,\ldots,n$ do wyrażenia /5/ definiującego funkcję $h(g)$ uzyskuje się

$$h(g, N_o, \ldots, N_{K-1}) = \max_{\substack{u_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = N_j, \\ \sum_{i=1}^{n} u'_{i,K-1} = 1}} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=0,\ldots,K-2 \end{matrix} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i \Big(\sum_{j=0}^{K-2} f_i^j(u_{io}, \ldots, u_{ij}) + f_i^{K-1}(u_{io}, \ldots, u'_{i,K-1} N_{K-1}) \Big).$$

Ponieważ funkcja f_i^{K-1} jest ciągłą i rosnącą funkcją ze względu na wszystkie swoje argumenty, więc funkcja $h(g, N_o, \ldots, N_{K-1})$ jest rosnącą i ciągłą funkcją argumentu N_{K-1}. Funkcja $d(\cdot)$ zdefiniowana zależnością /8/ jest więc malejącą i ciągłą funkcją argumentu N_{K-1}. Załóżmy, że dla $N_{K-1}=0$ zachodzi $d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, 0) \leq 1$. Wówczas jednak, jak łatwo zauważyć, K nie jest optymalnym czasem sterowania. Musi więc zachodzić $d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, 0) > 1$. Ponieważ funkcja $d(\cdot)$ jest funkcją ciągłą argumentu N_{K-1}, więc przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, N_{K-1}), d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, 0)]$, również wartość $d(K, s_1, \ldots, s_n, N_o, \ldots, N_{K-2}, \widetilde{N}_{K-1}) = 1$ dla $\widetilde{N}_{K-1} \in (0, N_{K-1})$ ze względu na to, że funkcja $d(\cdot)$ jest monotonicznie malejącą funkcją argumentu N_{K-1}.

cbdo.

W oparciu o lemat 1 można udowodnić następujące

<u>Twierdzenie 1.</u> Sterowanie u^*_{ij}, $i=1,\ldots,n$; $j=0,\ldots,K-1$ będące optymalnym rozwiązaniem zadania optymalizacji

$$\max_{\substack{u_{ij} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{ij} = N_j, \\ \sum_{i=1}^{n} u_{i,K-1} = \widetilde{N}_{K-1}}} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} i=1,\ldots,n, \\ j=0,\ldots,K-2 \end{matrix} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i^* \sum_{j=0}^{K-1} f_i^j(u_{io}, \ldots, u_{ij}),$$

gdzie $g^* = (g_1^*, \ldots, g_n^*)$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania /6/, K jest optymalnym czasem sterowania, zaś $\widetilde{N}_{K-1}$ jest wielkością spełniającą równanie /7/, jest sterowaniem optymalnym dla problemu czasowo-optymalnego sterowania kompleksem operacji /1/.

Dowód. Z lematu 1 wynika, że dla sterowania u_{ij}^{*} spełniony jest warunek $d(K,s_1,\ldots,s_n,N_0,\ldots,N_{K-2},\widetilde{N}_{K-1})=(g^{*T}s / h(g^{*},N_0,\ldots,N_{K-2},\widetilde{N}_{K-1}))=1$, co na podstawie wzorów /10÷12/ pracy [2] można przepisać w postaci

$$0 = g^{*T}s - h(g^{*}) = \max_{g\geqslant 0,\|g\|\leqslant 1}(g^{T}s - h(g)) = \sum_{i=1}^{n}(s_i - x_{iK})^2 .$$

Oznacza to, że dla sterowania u_{ij}^{*} zachodzi $s_i = x_{iK}$, $i=1,\ldots,n$. Sterowanie u_{ij}^{*} pozwala więc zrealizować wszystkie zadania w kompleksie operacji w czasie minimalnym, czyli jest sterowaniem optymalnym.

cbdo.

Korzystając z twierdzenia 1 można zaproponowany w pracy [2] algorytm wyznaczania czasowo-optymalnego rozdziału resursów w kompleksie operacji /1/ uzupełnić w następujący sposób. Po wyznaczeniu funkcji $d(K,s_1,\ldots,s_n,N_0,\ldots,N_{K-1})$ należy wyznaczyć wielkość $\widetilde{N}_{K-1}$ rozwiązując równanie /7/ ze względu na argument N_{K-1}. Podstawiając następnie $K,\widetilde{N}_{K-1}$ oraz wartości g_i^{*}, $i=1,\ldots,n$ do wzoru na wielkości u_{ij} ekstremalizujące zadanie /5/, uzyskuje się sterowanie optymalne.

4. Przykład.

Przedstawione powyżej rozważania teoretyczne zostaną zilustrowane następującym przykładem. Niech w kompleksie operacji /1/ funkcje f_i będą określone następująco:

$$f_i(x_{ik},u_{ik}) = (a_i u_{ik}+c_i)^p - c_i^p,\quad a_i>0,\ c_i\geqslant 0,\quad 0<p<1,\ i=1,\ldots,n;\ k=0,1,2,\ldots .$$

Aby wyznaczyć funkcję $h(g)$, należy tu rozwiązać zadanie optymalizacji

$$\max_{\substack{u_{ij}\geqslant 0,\\ \sum_{i=1}^{n}u_{ij}=N_j,}\ \substack{i=1,\ldots,n,\\ j=0,\ldots,k-1}} \sum_{i=1}^{n} g_i \sum_{j=0}^{k-1}\left((a_i u_{ij}+c_i)^p - c_i^p\right).$$

W rezultacie rozwiązania tego zadania uzyskuje się

$$u_{ij} = \frac{\left(N_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right) g_i^{\frac{1}{1-p}}\, a_i^{\frac{p}{1-p}}}{\sum_{i=1}^{n} g_i^{\frac{1}{1-p}}\, a_i^{\frac{p}{1-p}}} - \frac{c_i}{a_i},\quad i=1,\ldots,n;\ j=0,\ldots,k-1,$$

oraz

$$h(g) = \sum_{j=0}^{k-1}\left(N_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^{\frac{1}{1-p}}\, a_i^{\frac{p}{1-p}}\right)^{1-p} - k\sum_{i=1}^{n} c_i^p g_i .$$

Dla wyznaczenia funkcji $d(\cdot)$ należy rozwiązać zadanie

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(N_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^{\frac{1}{1-p}}\, a_i^{\frac{p}{1-p}}\right)^{1-p} \longrightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(s_i + kc_i^p) = 1, \quad g_i \geqslant 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

Rozwiązanie powyższego zadania ma postać

$$g_i^* = \frac{1}{a_i}(s_i + kc_i^p)^{\frac{1-p}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}(s_i + kc_i^p)^{\frac{1}{p}}\right)^{-1}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Funkcja $d(\cdot)$ wyraża się tu wzorem

$$d(k,s_1,\ldots,s_n,N_0,\ldots,N_{k-1}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(s_i + kc_i^p)\right)^p}{\sum_{j=0}^{k-1}\left(N_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p}.$$

Optymalny czas sterowania K można obliczyć, rozwiązując zadanie

$$K = \min\left\{k \in \{0,1,2,\ldots\} \,\Big|\, \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(s_i + kc_i^p)\right)^p \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\left(N_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p\right\}.$$

Po wyznaczeniu optymalnego czasu sterowania można obliczyć wielkość $\tilde{N}_{K-1}$ z równania

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(s_i + Kc_i^p)\right)^p = \sum_{j=0}^{K-2}\left(N_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p + \left(\tilde{N}_{K-1} + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p.$$

Uzyskuje się stąd

$$\tilde{N}_{K-1} = \left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(s_i + Kc_i^p)\right)^p - \sum_{j=0}^{K-2}\left(N_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)^p\right\}^{\frac{1}{p}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}.$$

Sterowanie optymalne dla rozważanego kompleksu operacji przyjmie więc postać

$$u_{ij}^* = \left(\bar{N}_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{a_i}\right)\frac{1}{a_i}(s_i + Kc_i^p)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}(s_i + Kc_i^p)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{c_i}{a_i},$$

$$i=1,\ldots,n; \quad j=0,1,\ldots,K-1,$$

gdzie $\bar{N}_j = N_j$ dla $j=0,1,\ldots,K-2$ oraz $\bar{N}_{K-1} = \tilde{N}_{K-1}$.

LITERATURA

[1] Nowicki E. : Sterowanie czasowo-optymalne kompleksem niezależnych operacji dynamicznych. Archiwum Automatyki i Telemechaniki 1979 /w druku/.

[2] Styczeń K. : Time-optimal control of a complex of independent dynamic discrete-time operations with concave models. Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej PRE Nr 125, Wrocław 1979.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСОМ НЕЗАВИСИМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Р е з ю м е

В работе рассматривается проблема оптимального по быстродействию распределения ресурсов в комплексе независимых динамических операций с дискретным временем и с вогнутыми моделями. Представлен метод нахождения оптимального распределения ресурсов заключающийся в сведению к нулевому значению расстояния между вектором задач и конечным состоянием комплекса операций. Теоретические рассуждения иллюстрируются вычислительным примером.

THE TIME-OPTIMUM CONTROL OF A COMPLEX OF INDEPENDENT, DYNAMIC, DISCRETE-TIME OPERATIONS

S u m m a r y

The paper deals with the time-optimum problem of the resources allocation in a complex of independent dynamic discrete-time operations with concave models. A method of determination of the optimum resources allocation based on the reduction to zero of the value of a distance between the tasks vector and the terminal state of the complex of operations is being presented. The theoretical considerations are illistrated by the computational example.