ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 54 Nr kol. 650

Krzysztof Bacia
Konrad Wojciechowski
Politechnika Śląska

OPTYMALNE STEROWANIE DOCELOWE CIĄGIEM OPERACJI OPISANYCH PRZEZ DYNAMICZNY MODEL ROZMYTY

Streszczenie. W pracy rozpatruje się problem sterowania docelowego przy ograniczeniu na sterowanie, sformułowany w kategoriach teorii zbiorów rozmytych. Problem wtórny tego typu występuje np. w zagadnieniach sterowania dyskretnymi procesami przemysłowymi [3], [4].

1. Wprowadzenie

Rozpatrywany w pracy problem docelowego sterowania optymalnego na podstawie dynamicznego modelu rozmytego jest problemem wtórnym w wielu zagadnieniach sterowania dyskretnymi procesami produkcyjnymi.

W zakresie sformułowania odzwierciedla on takie cechy rzeczywistych procesów produkcyjnych, jak: dyskretność w czasie i w przestrzeni stanu skończony i znany horyzont sterowania, niepewność opisywaną w pojęciach teorii zbiorów rozmytych i ograniczenia na sterowanie. Ograniczenia na stan, istotne dla tego typu procesów są uwzględniane łącznie z niepewnością poprzez relację rozmytą opisującą model. Warto zauważyć, że tak rozumiany model jest pierwotny w stosunku do rzeczywistości.

Przyjęty w pracy wskaźnik jakości nie ma charakteru ogólnego i reprezentuje jedną z możliwości odpowiadającą np. zagadnieniu harmonogramowania.

2. Model dynamiczny rozmyty

Przyjęty do rozważań dyskretny dynamiczny model rozmyty jest opisany następującymi równaniami:

$$X_{n+1}(a_i) = F_n(a_i, a_j; u_n) \circ X_n(a_j),$$
$$Y_{n+1}(b_i) = H_{n+1}(b_i, a_j) \circ X_{n+1}(a_j), \qquad /1/$$

gdzie $X_n(a_j)$, $X_{n+1}(a_i)$ są zbiorami rozmytymi, określającymi stan modelu w chwilach n, $n+1$. Podobnie $Y_{n+1}(b_i)$ jest zbiorem rozmytym określającym wyjście modelu. Relacje rozmyte $F_n(a_i,a_j;u_n)$, $H_{n+1}(b_i,a_j)$ są dane przez odpowiednie zbiory rozmyte, określone na podzbiorach iloczynów kartezjańskich

$$A \times A\big|_{u_n}, \quad a_i,a_j \in A, \quad A \times B, \quad b_i \in B.$$

W zakresie zagadnień rozpatrywanych w pracy wystarczające są następujące definicje; zbioru rozmytego, relacji rozmytej i złożenie maksyminowego.

Def. 1. Zbiorem rozmytym określonym na nośniku A', będącym niepustym podzbiorem zbioru A, nazywamy funkcję

$$X(a) : A' \longrightarrow [0,1], \quad a \in A'.$$

W zagadnieniach rozpatrywanych w pracy zbiór A zawiera skończoną liczbę elementów, powstałych przykładowo w wyniku skwantowania fizycznej przestrzeni stanu. Jedynie dla uproszczenia zapisów zakładamy dalej, że sposób kwantowania jest niezależny od numeru etapu.

Def. 2. Relacją rozmytą pomiędzy elementami $a_i \in A$ a elementami $b_i \in B$ przy dyskretnym parametrze $c_i \in C$ nazywamy zbiór rozmyty określony na podzbiorze $(A \times B\big|_{c_i})'$ zbioru $A \times B\big|_{c_i}$, przy ustalonej wartości parametru c_i, tj.

$$R(a_i,b_i;c_i) : (A \times B\big|_{c_i})' \longrightarrow [0,1].$$

Zbiór rozmyty z Def. 1 może być rozpatrywany jako jednoargumentowa relacja rozmyta.

Def. 3. Złożeniem maksyminowym relacji rozmytych, przykładowo dwuargumentowych, $R_1(a,b)$, $R_2(b,d)$, nazywamy relację $R_3(a,d)$ określoną jak poniżej:

$$R_3(a,d) = R_1(a,b) \circ R_2(b,d) = \max_b \min\left[R_1(a,b),\ R_2(b,d)\right].$$

3. Sformułowanie problemu

Odpowiednio do rozpatrywanego problemu sterowania docelowego przyjęty do rozważań wskaźnik ma postać:

$$J = L_N(a_i) \circ X_N(a_i), \qquad /2/$$

gdzie N jest indeksem końcowego etapu rozpatrywanego horyzontu sterowania, $X_N(a_i)$ stanem rozmytym w chwili N-tej, zaś $L_N(a_i)$ zbiorem rozmytym, określającym zbiór docelowy. Zbiór rozmyty $L_N(a_i)$ może być również interpretowany jako zadany rozmyty stan docelowy $\bar{X}_N(a_i)$.

W przypadku szczególnym rozmyty stan docelowy może być określony następująco:

$$\bar{X}_N(a_i) = \begin{cases} 1 & i = \bar{I} \\ 0 & i \neq \bar{I} \end{cases} \qquad /3/$$

Mamy wtedy:

$$J = L_N(a_i) \circ X_N(a_i) = \bar{X}_N(a_i) \circ X_N(a_i) = X_N(a_{\bar{I}}). \qquad /4/$$

Mówimy, że wartość wskaźnika jest równa wartości jaką przyjmuje funkcja $X_N(a_i) : A \rightarrow [0,1]$ $a_i \in A$, w punkcie $a_{\bar{I}}$ nośnika.

W pracy zakłada się niewystępowanie jawnych ograniczeń na stany rozmyte w chwilach $n \in [1,...,N]$. Ograniczenia niejawne mogą być uwzględnione poprzez relację $F_n(a_i,a_j;u_n)$.

Ograniczenia na sterowanie nie wpływają w sposób istotny na metodę rozwiązania problemu.

Problem optymalnego sterowania docelowego można sformułować następująco:

1. Dany jest model dynamiczny rozmyty /1/, N-etapowy dyskretny w czasie wraz z rozmytym stanem początkowym $X_0(a_i)$.

2. Należy wyznaczyć ciąg odwzorowań $u_n^0[X_n(a_i)]$, $n = 0,...,N-1$ minimalizujący wskaźnik /2/ przy warunku

$$u_n^0(\cdot) = \min_i u_n^{0,i}(\cdot),$$

gdzie $u_n^{0,i}(\cdot)$, $n = 0,...,N-1$, $i = 1,...,I$ są odwzorowaniami równoważnymi ze względu na maksymalizację wskaźnika /2/.

W powyższym zapisie, jak również w dalszej części pracy zakłada się, że zbiór wartości, jakie mogą przyjmować sterowania, zawiera skończoną liczbę I, elementów.

4. Rozwiązanie problemu

Korzystając z tego, że dla każdej chwili n, sterowanie u_n decyduje jedynie o stanach rozmytych w chwilach późniejszych, tj. $n+1,\dots,N$, można maksymalizowany wskaźnik /2/ przedstawić następująco:

$$J = \max_{u_0,\dots,u_{N-1}} \left\{ L_N(a_i) \circ X_N(a_i) \right\} =$$

$$= \max_{u_0,\dots,u_{N-2}} \max_{u_{N-1}} \left\{ L_N(a_i) \underset{2}{\circ} \left[F_{N-1}(a_i,a_j;u_{N-1}) \underset{1}{\circ} X_{N-1}(a_j) \right] \right\}. \qquad /5/$$

Na podstawie łączności operacji składania problem maksymalizacji względem u_{N-1} można przedstawić jako:

$$\max_{u_{N-1}} \left\{ \left[L_N(a_i) \underset{1}{\circ} F_{N-1}(a_i,a_j;u_{N-1}) \right] \underset{2}{\circ} X_{N-1}(a_j) \right\}, \qquad /6/$$

gdzie indeksy 1, 2 określają kolejność wykonywania poszczególnych operacji składania.

Wprowadźmy jednoargumentową relację rozmytą, (zbiór rozmyty), określony następująco:

$$S_{N-1}(a_j) = L_N(a_i) \circ F^o_{N-1}\left[a_i,a_j;u^o_{N-1}(a_i,a_j) \right], \qquad /7/$$

gdzie

$$u^o_{N-1} \in \left\{ u^{o,i}_{N-1} : \max_{u_{N-1}} F_{N-1}(a_i,a_j;u_{N-1}) = F^o_{N-1}(a_i,a_j;u^{o,i}_{N-1}) \right\}$$

oraz dodatkowo odpowiednio do warunku 2 w formułowanym w p. 2 problemie optymalnego sterowania docelowego

$$u^o_{N-1} = \min_i \left\| u^{o,i}_{N-1} \right\|.$$

Wykorzystując fakt, że w wyniku wykonania złożenia występującego w /7/ jest znana wartość $a_{\bar{i}}$ nośnika, w której zachodzi odpowiednio do def. 3 $\max_{a_i} \min(L_N, F^o_{N-1})$ funkcję $u^o_{N-1}(a_i,a_j)$ można zredukować do postaci

$$u^o_{N-1}(a_{\bar{I}},a_j) = u^o_{N-1}(a_j).$$

<u>Uwaga 1</u>. Warunkiem jest, aby był znany zbiór rozmyty $L_N(a_i)$. W przypadku niespełnienia go, cel określa się dopiero w fazie sterowania lub

zmienia się, występuje konieczność pamiętania całej funkcji $u^{o}_{N-1}(a_i,a_j)$. W konsekwencji relacja S_{N-1} jest dwuargumentowa, o postaci $S_{N-1}(a_i,a_j)$. Przypadek taki nie jest dalej rozpatrywany.

Powracając do rozpatrywanego w /6/ problemu maksymalizacji względem u_{N-1}, otrzymujemy:

$$\max_{u_{N-1}}\left\{\left[L_N(a_i)\underset{1}{\circ}F_{N-1}(a_i,a_j;u_{N-1})\right]\underset{2}{\circ}X_{N-1}(a_j)\right\}=S_{N-1}(a_j)\circ X_{N-1}(a_j). \tag{/8/}$$

Stąd /5/ można obecnie zapisać w postaci:

$$J=\max_{u_o,\dots,u_{N-2}}\left[S_{N-1}(a_j)\circ X_{N-1}(a_j)\right]=$$
$$=\max_{u_o,\dots,u_{N-3}}\ \max_{u_{N-2}}\left\{S_{N-1}(a_j)\underset{2}{\circ}\left[F_{N-2}(a_j,a_k;u_{N-2})\underset{1}{\circ}X_{N-2}(a_k)\right]\right\}. \tag{/9/}$$

Występujący w /9/ problem maksymalizacji względem u_{N-2} jest analogiczny do już rozpatrzonego, odpowiednikiem rozmytego zbioru docelowego jest tu zbiór rozmyty $S_{N-1}(a_j)$, otrzymany z etapu poprzedniego.

Postępując podobnie dla sterowań $u_{N-3},\dots,u_o$ otrzymujemy w efekcie:

1. Ciąg zbiorów rozmytych $S_o(a_{(\cdot)}),\dots,S_{N-2}(a_k),\ S_{N-1}(a_j)$.

2. Ciąg funkcji $u^{o}_{o}(a_{(\cdot)}),\dots,u^{o}_{N-2}(a_k),\ u^{o}_{N-1}(a_j)$.

Ciąg funkcji 2 reprezentuje poszukiwane prawo sterowania. Wartości argumentów tych funkcji określa się przez wykonanie złożenia stanu rozmytego na danym etapie ze zbiorem rozmytym S odpowiadającym temu etapowi. Ten element a_i nośnika, dla którego zachodzi $\{\max\min S(a_i),\ X(a_i)\}$, określa wartość argumentu funkcji $u^{o}(a_i)$. Stąd można również mówić o funkcjach $u^{o}(a_i)$, jak o odwzorowaniach stanów rozmytych $X(a_i)$ w sterowania optymalne $u^{o}\ X(a_i)$.

Znalezione prawo sterowania pozwala na optymalne sterowanie docelowe w sprzężeniu od stanu.

W pracy nie omawia się sposobu określania, dla każdego z etapów, stanów rozmytych charakteryzujących proces. Jest to związane z problemem konstrukcji obserwatora dla procesu opisanego modelem rozmytym, odpowiednio do sformułowanego zadania sterowania.

5. Przykład

Dla zilustrowania opracowanego algorytmu sterowania przedstawia się poniżej przykład liczbowy.

Relacja rozmyta F nie zależy od chwili, (etapu) n. Określa ją poniższa tabela 1, gdzie zbiór sterowań U zawiera 4 elementy.

Tab. 1 $F(a_i,a_j;u)$

	u = -1				u = 0				u = 1				u = 2			
a_i \ a_j	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0,5	0,7	0,7	0,6	0,1	0,3	0,4	0,3	0,3	0,7	0,8	0,2	0,0	0,7	0,9	1,0
1	0,1	0,9	0,8	0,7	0,5	0,7	0,3	0,6	0,7	0,9	1,0	0,9	0,4	0,6	0,7	0,8
2	0,7	0,8	0,7	0,5	0,9	1,0	0,9	0,7	0,6	0,8	0,7	0,5	0,3	0,5	0,4	0,3
3	0,4	0,4	0,3	0,1	0,1	0,9	0,7	0,3	0,2	0,4	0,3	0,1	0,2	0,3	0,2	0,0

Rozmyty stan początkowy oraz stan docelowy mają postacie:

Tab. 2 X_o, $\bar{X}_4$

a_i	0	1	2	3
X_o	0,1	1,0	0,8	0,3
$\bar{X}_4$	0	0	1	0

Rozpatrujemy horyzont czteroetapowy. Normę sterowania przyjmujemy w postaci $\|u\| = |u|$. Obliczamy $F^o\left[a_i,a_j;u^o(a_i,a_j)\right]$. Otrzymujemy wyniki przedstawione w tabeli 4 i 3.

Tab. 3 $F^o(a_i,a_j;u^o)$

a_i \ a_j	0	1	2	3
0	0,5	0,7	0,9	1,0
1	1,0	0,9	1,0	0,9
2	0,9	1,0	0,9	0,7
3	0,4	0,8	0,9	0,3

Tab. 4 $u^o(a_i,a_j)$

a_i \ a_j	0	1	2	3
0	-1,1	-1,1	2	3
1	-1	-1,1	1	1
2	0	0	0	0
3	-1	0	0	0

$F^o(a_i,a_j;u)$, $u^o(a_i,a_j)$ wyznaczone w tab. 4 i 3 obowiązują ze względu na stacjonarność modelu we wszystkich etapach, stąd pominięto indeks numeru etapu.

Składając $F^o(a_i,a_j;u^o)$ z zadanym stanem docelowym $\bar{X}_4(a_j)$, otrzymujemy zbiór rozmyty S_3 oraz $u_3^o(a_i,a_j)\big|_{a_j=2}$. Element $a_j = 2$ jest tym, w którym zachodzi max min (F^o,X_4). Wyniki zamieszczone w tab. 5. Podobnie składając S_3 z F^o otrzymujemy S_2 oraz $u_2^o(a_i,a_j)\big|_{a_j=\bar{a}_j}$. Wyniki dla etapów n = 1,2,0 zamieszczono również w tab. 5.

Tab. 5

a_i	0	1	2	3	a_i	0	1	2	3
S_3	0,9	1,0	0,9	0,7	u_3^o	2	1	0	0
S_2	0,9	0,9	1,0	0,8	u_2^o	2	-1,1	0	0
S_1	0,8	1,0	0,9	0,8	u_1^o	1	1	1	1
S_o	0,9	0,9	0,9	0,8	u_i^o	2	-1,1	1	0

Określenie zbiorów rozmytych S_3, S_2, S_1, S_o oraz funkcji u_3^o, u_2^o, u_1^o, u_o^o kończy etap wyznaczania prawa sterowania.

Etap właściwego sterowania z braku obserwacji stanu rozmytego zilustrujemy wykorzystując stany rozmyte generowane przez model. Jest to równoważne sterowaniu w układzie otwartym. Wykorzystując dany stan początkowy X_o składamy go ze zbiorem S_o, wyznaczając jednocześnie ten element a_i, w którym zachodzi max min (S_o,X_o), determinuje to wartość sterowania $u^o(a_i)$. Otrzymywane kolejne stany rozmyte i odpowiadające im sterowania zamieszczono w tab. 6.

Tab. 6

a_i	0	1	2	3	4
X_o	0,1	1,0	0,8	0,3	-1
X_1	1,0	0,9	0,8	0,7	-1
X_2	0,7	0,9	0,8	0,7	-1
X_3	0,7	0,9	0,9	0,9	0
X_4	0,9	0,9	0,9	0,7	

Uwzględniając przyjęty rozmyty stan docelowy $\bar{X}_4$ i wykonując złożenie $\bar{X}_4 \circ X_4$ możemy obliczyć osiągniętą wartość wskaźnika (stopni trafienia). Wynosi ona 0,9 i osiągana jest dla elementu $a_i = 2$.

6. Wnioski

Sformułowany i rozwiązany w pracy problem sterowania docelowego na podstawie dynamicznego modelu rozmytego może być zastosowany w przypadkach, w których opis modelu dynamicznego jest dany w postaci tabelarycznej, a występująca niepewność nie ma charakteru probabilistycznego.

Pod względem teoretycznym rozwiązany problem jest ilustracją syntezy sterowania optymalnego na podstawie dynamicznego modelu rozmytego. W dalszych pracach z tego zakresu rozpatrzone będą bardziej złożone wskaźniki jakości, oceniające np. całą trajektorię rozmytą.

LITERATURA

1 Bacia K.: Praca dyplomowa. Politechnika Śląska, 1979.

2 Chang S.S.L., Zadeh L.A.: On Fuzzy Mapping and Control. IEEE. Trans. on SMC, Vol SMC-2, No 1 January 1972.

3 Gościński A.: Modelowanie złożonych dysktretnych procesów produkcyjnych. AAiT 1974.

4 Sawik T.: Operations Scheduling under Uncertainty as a stochastic Control Problem. Proceedings of SMC. Zakopane, October 8-13 1979.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ ПОСЛЕ ДОВАТЕЛНОСТИ ОПЕРАЦИИ ОПИСАННОЙ РАСПЛЫВЧАТУЮ ДИНАМИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬЮ

Р е з ю м е

В работе рассматривается в категориях расплывчатых множесть проблему оптимального управления конечным состоянием с учетом ограничений на управление. Вторичная задача такого типа выступает н.п. в управлении дискретными производственными процессами [3], [4].

OPTIMAL TARGET CONTROL FOR OPERATION SEQUENCE DESCRIBED BY A FUZZY DYNAMICAL MODEL

S u m m a r y

In the paper a target control problem with a control bound is discussed on the base of the fuzzy sets theory. A secondary problem of that type is considered e.g. in a control for discrete industrial processes [3] , [4] .