ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 35 Nr kol. 274

MACIEJ SIWCZYŃSKI

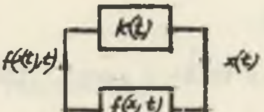
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O STABILNOŚCI PEWNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH OPISYWANYCH NIELINIOWYMI RÓWNANIAMI VOLTERRY

Streszczenie. Artykuł omawia problem stabilności drgań układów samowzbudnych i parametrycznych opisanych przy pomocy równań Volterry. Podano warunki wystarczające stabilności asymptotycznej rozwiązań równań Volterry.

1. Wstęp

Rozważany układ samowzbudny złożony z liniowego członu o impulsowej funkcji przejścia k(t) i nieliniowego, niestacjonarnego członu f(x,t), pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Układ ten może być opisany równaniem Volterry [1]

$$x(t) = \int_{t_x}^{t} k(t-s)f(x(s), s)ds. \tag{1}$$

Jeżeli k(t) jest ograniczona i całkowalna, natomiast f(x(t), t) spełnia warunek Lipschitza:

$$|f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)| \leqslant \alpha |x_1(t) - x_2(t)|; \alpha > 0,$$

to równanie całkowe (1) posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.
W stanie ustalonym układ opisany jest równaniem całkowym:

$$x(t) = \int_{a}^{\infty} k(s)f(x(t-s), t-s)\, ds. \tag{2}$$

2. Pojęcie stabilności dla równań całkowych

Parametryzując t_x w równaniu (1) otrzymujemy rodzinę rozwiązań.
Niech $\varepsilon > 0$ oraz $t_y = t_x + \varepsilon$

Niech $y(t) = x(t) + \xi(t)$ będzie rozwiązaniem równania:

$$y(t) = \int_{t_y}^{t} k(t-s) f(y(s), s) ds. \qquad (3)$$

Rozwiązanie $x(t)$ równania (1) będzie stabilne, jeżeli istnieje $\sigma > 0$ taka, że dla każdego $t > t_y$ spełniona jest nierówność:

$$|\xi(t)| \leqslant \sigma$$

Rozwiązanie $x(t)$ będzie asymptotycznie stabilne, jeżeli $\lim\limits_{t\to\infty} |\xi(t)| = 0$ oraz globalnie, asymptotycznie stabilne, jeżeli $\lim\limits_{t\to\infty}|\xi(t)| = 0$ niezależnie od ε.

3. Twierdzenie o stabilności rozwiązania równania (1)

Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (1).
Jeżeli

1) transmitancja $K(p) = \int_0^\infty k(t) e^{-pt} dt$ posiada bieguny tylko w lewej półpłaszczyźnie, czyli: $\left| \frac{1}{K(p)} \right|_{Re\{p\}>0} \neq 0.$

2) $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right)_{x=x(t)} \right| dt < N,$

gdzie $N > 0$ jest liczbą zależną tylko od impulsowej funkcji przejścia członu liniowego $k(t)$, to rozwiązanie $x(t)$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód:

Z punktu 1) założeń wynika, że można zawsze dobrać takie liczby $a > 0$; $c > 0$, że:

$$|k(t)| \leqslant c\, e^{-at} \tag{4}$$

Spełnione jest równanie całkowe (3):

$$x(t) + \xi(t) = \int_{t_y}^{t} k(t-s)\, f[x(s) + \xi(s), s]\, ds$$

albo

$$x(t) + \xi(t) = \int_{t_y}^{t} k(t-s)\Big[\Big(\frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\Big)_{x=x(s)} \xi(s) +$$

$$+ f(x(s),s) + q(x(s) + \xi(s),s)\Big]\, ds$$

widać, że

$$\lim_{|\xi(t)| \to 0} \frac{|q(x(t) + \xi(t),t)|}{|\xi(t)|} = 0 \tag{5}$$

Podstawiając:

$$\Big(\frac{\partial f(x,s)}{\partial x}\Big)_{x=x(s)} = P(s)$$

mamy

$x(t) + \xi(t) =$

$$= \int_{t_y}^{t} k(t-s)p(s)\xi(s)ds + \int_{t_x}^{t} k(t-s)f(x(s),s)ds +$$

$$+ \int_{t_y}^{t_x} k(t-s)f(x(s),s)ds + \int_{t_y}^{t} k(t-s)q(x(s) + \xi(s))ds$$

a stąd otrzymuje się

$$\xi(t) = \int_{t_y}^{t} k(t-s)p(s)\xi(s)ds + \int_{t_y}^{t} k(t-s)q(x(s)+\xi(s),s)ds +$$

$$+\int_{t_y}^{t_x} k(t-s)f(x(s),s)ds$$

Można teraz oszacować $|\xi(t)|$;

$$|\xi(t)| \leqslant c\int_{t_y}^{t_x} e^{-a(t-s)}|f(x(s),s)|ds +$$

$$+ c\int_{t_y}^{t} e^{-a(t-s)}\left(|p(s)| + \frac{|q(x(s)+\xi(s))|}{(s)}\right)|\xi(s)|ds,$$

stąd

$$e^{at}|\xi(t)| \leqslant c\int_{t_y}^{t_x} e^{as}|f(x(s),s)|ds + c\int_{t_y}^{t} e^{as}(|p(s)| + \varrho)|\xi(s)|ds,$$

gdyż przy $|\xi(s)| \leqslant R$; $R > 0$ zachodzi nierówność: (patrz (5))

$$\frac{|q(x(s)+\xi(s),s)|}{|\xi(s)|} \leqslant \varrho\ ; \quad \varrho > 0. \tag{6}$$

Prócz tego ze względu na ciągłość f(x,s) spełniona jest nierówność:

$$c\int_{t_y}^{t_x} e^{as} f(x(s),s)ds \leqslant M, \quad \text{gdzie} \quad M > 0$$

Wtedy otrzymuje się oszacowanie:

$$|\xi(t)|e^{at} \leqslant M + c\int_{t_y}^{t} e^{as}(|p(s)| + \varrho)|\xi(s)|ds$$

W oparciu o lemat Gronwalla [3] można napisać:

$$|\xi(t)| \leqslant M \exp\left[-ct\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{t}\int_{t_y}^{t} (|P(s)| + \varrho)\, ds\right)\right]$$

Jeżeli

$$\frac{a}{c} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_y}^{t} (|P(s)| + \varrho) ds =$$

$$= \frac{a}{c} - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |P(s)| ds - \lim_{t\to\infty} \varrho\,(t) > 0,$$

to $\lim\limits_{t\to\infty} |\xi\,(t)| = 0$

Wtedy na podstawie (5); (6); $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\,(t) = 0$,

czyli jeżeli

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |P(s)| ds < \frac{a}{c},$$

to $|\xi(t)| \to 0$ przy $t\to\infty$ co kończy dowód.

Bardzo często interesuje nas rozwiązanie ustalone, czyli rozwiązanie równania (2). Jeżeli f(x,t) jest okresowa po t o okresie $\vartheta = \frac{2\pi}{\omega}$, to można je przewidzieć w postaci szeregu:

$$x(t) = \sum_{n} \hat{x}_n e^{jn\omega t}$$

wtedy

$$u(t) = f(x(t),t) = f\left[\left(\sum_{n} \hat{x}_n e^{jn\omega t}\right), t\right] = \sum_{n} \hat{u}_n e^{jn\omega t}$$

oczywiście zachodzi: $\hat{x}_{-n} = \check{x}_n$; $\hat{u}_{-n} = \check{u}_n$

Wstawiając powyższe wyrażenia do równania (2) otrzymuje się:

$$\sum_n \hat{x}_n e^{jn\omega t} = \int_0^\infty k(s) \left(\sum_n \hat{u}_n e^{jn\omega(t-s)}\right) ds =$$

$$= \sum_n \hat{u}_n e^{jn\omega t} \int_0^\infty k(s) e^{-jn\omega s} ds = \sum_n \hat{u}_n K(jn\omega) e^{jn\omega t}$$

stąd otrzymuje się układ równań o nieskończenie wielkiej liczbie niewiadomych:

$$\hat{x}_n = K(jn\omega)\, \hat{u}_n \tag{7}$$

$$\sum_n \hat{u}_n e^{jn\omega t} = f\left[\left(\sum_n \hat{x}_n e^{jn\omega t}\right), t\right]$$

Jeżeli człon liniowy jest filtrem dolnoprzepustowym, to następuje silne osłabienie harmonicznych o wysokich numerach. Wtedy z pewnym przybliżeniem możemy układ równań (7) zamienić na układ o skończonej liczbie niewiadomych, pomijając numery harmonicznych o wyższych n.

Odnośnie stabilności rozwiązania układu (7) słuszne jest następujące twierdzenie:

Jeżeli:

1) transmitancja K(p) układu liniowego posiada bieguny tylko w lewej półpłaszczyźnie,

2) $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left|\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)}\right| dt < N,$

gdzie N jest zdefiniowane jak wyżej,
to rozwiązanie ustalone $x_u(t)$ (równania (2)) jest stabilne.

Dowód:

Określamy funkcję F(t):

$$F(t) = \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x(t)} - \left(\frac{\partial f\; x,t}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)},$$

gdzie $x_u(t)$ jest rozwiązaniem równania (2), natomiast $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (1).

Ponieważ $x_u(t)$ jest stanem ustalonym $x(t)$ zachodzi:

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0,$$

stąd otrzymuje się

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x(t)} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)} + F(t)\right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)} dt + \lim_{T\to\infty} F(T) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)} dt.$$

Zatem warunek stabilności $x_u(t)$ może być zapisany

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left|\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x_u(t)}\right| dt < N$$

co kończy dowód.

LITERATURA

1. KUDREWICZ J. - Częstotliwościowe metody w teorii nieliniowych układów dynamicznych. WNT 1970 r.
2. PISKOREK A. - Równania całkowe. WNT 1971 r.
3. HARTMANN P. - Ordinary differential equations. J. Wiley and Sons 1974.

Przyjęto do druku w styczniu 1972 r.

О СТАБИЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОПИСАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРЫ

Р е з ю м е

В статье обсуждается проблема стабильности колебаний самовозбуждающихся и параметрических систем описанных при помощи уравнений Вольтерры. Представлены условия асимптотической стабильности решений уравнений Вольтерры.

ON STABILITY OF SOME DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBABLE BY NON-LINEAR VOLTERRA EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper, the problem of stability of vibrations in self-inducing and parametrical systems, describable by the Volterra equations is discussed. Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions of the Volterra equations are given.