ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 35 Nr kol. 274

LESZEK CZARNECKI
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O LICZBIE NIEPOWTARZALNYCH REALIZACJI FUNKCJI REAKTANCYJNEJ

Streszczenie. W artykule wyprowadzono wzór rekurencyjny dla obliczenia liczby niepotwarzalnych, o minimalnej liczbie elementów, realizacji funkcji reaktancyjnej, otrzymywanych w procedurze stopniowej redukcji zer i biegunów.

1. Wstęp

Procedura syntezy dwójników reaktancyjnych, polegająca na redukcji funkcji reaktancyjnej przez rozkład funkcji lub jej odwrotności na ułamki proste, lub przez jej rozwinięcie w ułamki Stieltjesa względem zmiennej s lub $\frac{1}{s}$, prowadzi jak wiadomo do czterech kanonicznych struktur dwójnika. Nie są to oczywiście jedyne realizacje możliwe do otrzymania w procesie redukcji. Zmiany sposobu redukcji w trakcie stopniowej redukcji funkcji reaktancyjnej prowadzą do nowych realizacji, do dwójników pochodnych. Część realizacji jest jednak tylko powtórzeniem realizacji już istniejących. Celem artykułu jest podanie sposobu obliczania faktycznej liczby realizacji niepowtarzalnych.

2. Ustalenie pojęć

Zera i bieguny skrajne – zera i bieguny funkcji reaktancyjnej w punktach $\omega = 0$, $\omega \to \infty$

Zera i bieguny właściwe – pozostałe, poza skrajnymi, zera i bieguny.

- M_b – liczba właściwych i niewłaściwych biegunów funkcji,
- M_z – liczba właściwych i niewłaściwych zer funkcji,
- N – stopień funkcji reaktancyjnej – stopień wyższego stopniem wielomianu licznika bądź mianownika,
- S_N – liczba niepowtarzalnych realizacji funkcji reaktancyjnej N-tego stopnia.

Uwaga. Dla funkcji reaktancyjnej zachodzi zawsze:

$$M_Z + M_b = N + 1 \tag{1}$$

3. Zupełna redukcja biegunów

Redukcja biegunów funkcji reaktancyjnej F(s) jest redukcją zupełną, jeżeli po redukcji bieguna w nieskończoności:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\left[F(s) - a_1(s)\right] = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} R_1(s) = 0 \tag{2}$$

po redukcji bieguna w zerze:

$$\lim_{s\to 0} s\left[F(s) - \frac{a_2}{s}\right] = \lim_{s\to 0} s\, R_2(s) = 0 \tag{3}$$

po redukcji bieguna właściwego w punkcie $s = s_i$

$$\operatorname*{res}_{s=s_i}\left[F(s) - a_3 \frac{s}{s^2+s_i^2}\right] = \operatorname*{res}_{s=s_i} R_i(s) = 0. \tag{4}$$

Gdy natomiast prawe strony relacji (2); (3); (4); są większe od zera, redukcja biegunów nie jest redukcją zupełną.
Ponieważ funkcja F(s) posiadająca biegun w nieskończoności jest ilorazem wielomianów:

$$F(s) = \frac{W_l(s)}{W_m(s)} \tag{5}$$

takich, że $l = m + 1$; reszta z zupełnej redukcji bieguna, z uwagi na (2):

$$R_1(s) = F(s) - a_1 s = \frac{W_l(s) - a_1 s W_m(s)}{W_m(s)} = \frac{W_{l-2}(s)}{W_m(s)} \tag{6}$$

Redukcja bieguna w nieskończoności obniża więc stopień funkcji reaktancyjnej o jedność.

Ponieważ funkcja F(s) z biegunem w zerze musi posiadać w mianowniku s nieskracalne, tj.:

$$F(s) = \frac{W_l(s)}{s\, W_{m-1}(s)} \tag{7}$$

natomiast po redukcji tego bieguna, reszta nie może posiadać s nieskraoalnego, tj.:

$$R_2(s) = F(s) - \frac{a_2}{s} = \frac{W_l(s) - a\, W_{m-1}(s)}{s\, W_{m-1}(s)} = \frac{W_{l-1}(s)}{W_{m-1}(s)} \tag{8}$$

Wynika, że również redukcja zupełna bieguna w zerze obniża stopień funkcji reaktancyjnej o jedność.
Natomiast po redukcji zupełnej bieguna właściwego, reszta:

$$R_1(s) = F(s) - a_1 \frac{s}{s^2+s_1^2} = \frac{W_l(s)}{W_m\, s} - a_1 \frac{s}{s^2+s_1^2} =$$

$$= \frac{W_l(s) - a_1\, s\, W_{m-2}(s)}{(s^2+s_1^2)\, W_{m-2}(s)} \tag{9}$$

nie może posiadać bieguna w punkcie $s = s_1$, stąd:

$$R_1(s) = \frac{W_{l-2}(s)}{W_{m-2}(s)}. \tag{10}$$

Redukcja zupełna bieguna właściwego obniża stopień funkcji reaktancyjnej o dwa.

4. Zupełna redukcja zer

Redukcja zera funkcji jest redukcją zupełną, jeżeli po redukcji zera w nieskończoności:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s}\left[\frac{1}{F(s)} - a_1\, s\right] = \lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} R_1(s) = 0 \tag{11}$$

po redukcji zera w punkcie $s = 0$

$$\lim_{s \to \infty} s\left[\frac{1}{F(s)} - a_2 \frac{1}{s}\right] = \lim_{s \to \infty} s\, R_2(s) = 0 \tag{12}$$

oraz po redukcji zera właściwego w punkcie $s = s_n$

$$\operatorname*{res}_{s=s_n} \left[\frac{1}{F(s)} - a_n \frac{s}{s^2+s_n^2}\right] = \operatorname*{res}_{s=s_n} R_n(s) = 0. \tag{13}$$

Ponieważ stopnie funkcji F(s) i $\frac{1}{F(s)}$ są (z definicji) sobie równe, redukcja zer obniża stopień funkcji reaktancyjnej w sposób identyczny jak redukcja biegunów, tj. redukcja zera skrajnego obniża stopień funkcji o jedność, redukcja zera właściwego, o dwa.

5. Liczba elementów dwójnika

Liczba elementów niezbędnych dla realizacji zredukowanego zera lub bieguna funkcji, tj. jeden element dla realizacji zer i biegunów skrajnych, dwa elementy dla realizacji zer i biegunów właściwych, jest przy redukcji zupełnej równa rzędowi obniżenia stopnia funkcji reaktancyjnej. Minimalna liczba elementów niezbędnych dla realizacji funkcji w procesie redukcji zupełnej jest w związku z tym równa stopniowi funkcji i jest niezależna od sposobu redukcji.

Gdy redukcja pewnych zer lub biegunów nie jest zupełna, dwójnik zawiera elementy dodatkowe w liczbie równej sumie niezrealizowanych możliwości redukcji stopnia funkcji, tj. dwa dla każdej niezupełnej redukcji zera lub bieguna właściwego lub jeden, dla każdej niezupełnej redukcji zera lub bieguna skrajnego.

6. Liczba realizacji funkcji reaktancyjnej stopnia N + 1

Ponieważ liczba skrajnych i właściwych zer i biegunów funkcji jest o jeden większa od jej stopnia, funkcja stopnia N + 1 posiada N + 2 zer i biegunów, z których każde może być zredukowane w pierwszym etapie syntezy pozostawiając N + 2 różnych od siebie reszt. Dwie z pośród nich po redukcji zer i biegunów skrajnych są stopnia N, pozostałe N reszt, po redukcji zer i biegunów właściwych są stopnia N – 1. Stąd, liczba niepowtarzalnych realizacji:

$$S_{N+1} = 2\,S_N + N\,S_{N-1} - P_{N-1}; \tag{14}$$

gdzie S_N i S_{N-1} są liczbami realizacji bez powtórzeń każdej z reszt, zaś P_{N-1} jest liczbą powtórzeń.

Realizacje różniące się sposobem pierwszej redukcji będziemy dalej nazywać szeregami realizacji. Funkcja stopnia N + 1 posiada więc N + 2 takich szeregów. Żaden z szeregów nie zawiera realizacji powtórzonych należących do tego samego szeregu, gdyż liczby S_N i S_{N-1} realizacji reszt są liczbami realizacji bez powtórzeń. Realizacje powtórzone mogą należeć, co najwyżej, do różnych szeregów.

W celu wyznaczenia liczby powtórzeń zauważmy, że redukcja dowolnego bieguna nie zmienia residuów w pozostałych biegunach funkcji ani też nachylenia asymptoty funkcji gdy $s \to \infty$. Zmienia się jedynie położenie zer. Przy redukcji zer, to samo dotyczy położenia biegunów odwrotności funkcji.

Wynika stąd, że każda permutacja porządku kolejnej redukcji k spośród M_b biegunów lub każda permutacja porządku kolejnej redukcji k spośród M_z zer prowadzi jedynie do powtórzeń.

Ponieważ jednak żaden z szeregów realizacji nie zawiera powtórzeń, permutacje te mogą należeć jedynie do różnych szeregów. Lecz permutacje kolejności redukcji biegunów lub permutacje kolejności redukcji zer różnych szeregów są powtórzeniami wtedy tylko, gdy są permutacjami pierwszych k etapów redukcji.

Liczba niepowtarzalnych realizacji, w których w kolejnych k etapach, $k \neq M_b - 1$, redukuje się bieguny funkcji jest równa liczbie k – elementowych kombinacji spośród M_b biegunów, tj. $\binom{M_b}{k}$, przy czym każda z tych realizacji występuje w k szeregach rozpoczynających się redukcją jednego spośród k biegunów. Stąd, $(k-1)\binom{M_b}{k}$ realizacji jest realizacjami powtórzonymi, które należy wyeliminować. To samo dotyczy kolejnej redukcji k zer. Przypadek redukcji $k = M_b - 1$, biegunów musi być wyłączony, gdyż po redukcji takiej liczby biegunów, pozostałe etapy prowadzą do redukcji ostatniego bieguna funkcji. Realizacje otrzymane z redukcji $M_b - 1$ i M_b biegunów są więc nierozróżnialne.

Z tych samych powodów musi być wyłączony przypadek redukcji $k = M_z - 1$ zer.

Ogólna liczba powtórzeń wynosi więc:

$$P_{N+1} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq M_b - 1}}^{k=M_b} (k-1)\binom{M_b}{k} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq M_z - 1}}^{k=M_z} (k-1)\binom{M_z}{k} =$$

$$= N + \sum_{k=2}^{k=M_b-2} (k-1)\binom{M_b}{k} + \sum_{k=2}^{k=M_z-2} (k-1)\binom{M_z}{k} \qquad (15)$$

i ostatecznie:

$$S_{N+1} = 2\,S_N + N\,S_{N-1} - N - \sum_{k=2}^{M_b-2} (k-1)\binom{M_b}{k} - \sum_{k=2}^{M_z-2} (k-1)\binom{M_z}{k}, \qquad (16)$$

przy czym przyjmujemy: $S_0 = 0 \quad S_1 = 1$.

Wzór ten pozwala obliczyć w sposób rekurencyjny liczbę niepowtarzalnych realizacji funkcji reaktancyjnej stopnia N+1, przy dowolnych zmianach w procedurze redukcji zupełnej zer i biegunów funkcji.

Dla kilku pierwszych stopni otrzymamy np.

$S_2 = 1;$

$S_3 = 2;$

$S_4 = 4;$

$S_5 = 12;$

$S_6 = 33;$

$S_7 = 120.$

....

LITERAURA

1. GUILLEMIN F.A. – Synthesis of Passive Networks. New York 1957.
2. TUTTLE D. – Network Synthesis. New York 1958.

Przyjęto do druku w lutym 1972 r.

ЧИСЛО НЕПОВТОРИМЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ РЕАКТАНЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Р е з ю м е

В статье выведена реккурентная формула для вычисления числа неповторимых, с минимальным числом элементов реализации реактанционной функции полученных в процедуре постепенного приведения нулей и полюсов.

ON NUMBER OF UNREPEATED REALIZATIONS OF A REACTANCE FUNCTION

S u m m a r y

In the paper, a recurrence formula for calculating the number of unrepeated realizations of reactance function characterized by a minimum of number elements, obtained in the procedure of gradual elimanation of zeroes and poles was derived.