Seria: ELEKTRYKA z. 35 Nr kol. 274

MACIEJ SIWCZYŃSKI
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O ISTNIENIU DRGAŃ PRAWIE OKRESOWYCH W UKŁADACH SYNCHRONIZACJI

Streszczenie. W artykule omówiono możliwość występowania drgań prawie okresowych w układach samowzbudnych na skutek "zerwania" synchronizacji zewnętrznej.

1. Wstęp

Bardzo często badanie układów drgających, synchronizowanych zewnętrznie słabym sygnałem okresowym prowadzi do układu:

$$\frac{dy}{dt} = A\,y + \mu G(y,t,\mu), \tag{1}$$

gdzie y jest wektorem w przestrzeni n-wymiarowej $G(y,t,\mu)$ jest ciągłą funkcją wektorową, okresową po t o okresie T, μ jest małym parametrem, natomiast układ liniowy:

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

posiada rozwiązanie okresowe o okresie T.
Kładąc $y(t) = Y(t)x$, gdzie $Y(t)$ spełnia warunki:

$$\frac{dY}{dt} = AY; \qquad Y(o) = I^{x)}$$

otrzymujemy równanie:

$$\frac{dx}{dt} = \mu f(x,t,\mu) \tag{2}$$

x) I oznacza macierz jednostkową.

gdzie: $f(x,t,\mu) = Y^{-1}(t)G(Y(t)x,t,\mu)$ jest funkcją ciągłą i okresową po t o okresie T.

Zgodnie z metodą Bogolubowa-Mitropolskiego [2] wprowadzamy układ uśredniony:

$$\frac{dx}{dt} = \mu F(x), \tag{3}$$

gdzie

$$F(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x,t,o)\,dt.$$

Wiadomo, że trajektorie układów (2) i (3), wychodzące z tego samego punktu dla dostatecznie małego μ, leżą dostatecznie blisko siebie przez skończony czas t.

Dalej wiadomo, że [2] słuszne jest następujące twierdzenie: Jeżeli równanie (3) posiada stabilny punkt osobliwy o współrzędnych "a", to równanie (2) posiada rozwiązanie okresowe o okresie T dążące do "a" przy $\mu \to 0$ Wtedy także równanie (1) posiada stabilne rozwiązanie okresowe o okresie T.

Twierdzenie powyższe bardzo często może służyć jako kryterium synchronizacji drgań.

2. Warunek istnienia drgań prawie okresowych w układach synchronizowanych zewnętrznie

Może się zdarzyć, że założenie stabilności punktu osobliwego układu (3) nie będzie spełnione. Nie oznacza to jednak wcale, że układ (2) nie posiada stabilnych rozwiązań.

Słuszne jest następujące twierdzenie:

Jeżeli równanie (3) posiada cykl graniczny o okresie θ, to równanie (2) posiada stabilne, wolnozmienne rozwiązanie przy dostatecznie małym μ.

Należy zauważyć, że jeżeli równanie $\frac{dx}{dt} = F(x)$ (niezawierające μ) posiada cykl graniczny o okresie ϑ, to równanie $\frac{dx}{dt} = \mu F(x)$ ma cykl graniczny o okresie $\theta = \frac{\vartheta}{\mu}$.

Dowód twierdzenia:

Niech x(t) będzie rozwiązaniem równania (2). Jest ono stabilne, jeżeli dla $t \to \infty$ $\|y(t)\| \to o$, gdzie y(t) jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{dy}{dt} = \mu \mathcal{X}(x(t),t,\mu)y, \tag{4}$$

gdzie

$$\pi(x(t),t,\mu) = \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)_{x=x(t)}.$$

Niech dalej $\tilde{x}(t)$ będzie rozwiązaniem okresowym równania (3), takim, że $\tilde{x}(0) = x(0) = x_0$.
Jeżeli $\mu \to 0$, to $\tilde{x}(t) \to x(t) \to b$ przy $t > 0$, gdzie b jest stałym wektorem.

Wprowadza się macierz S(t):

$$S(t) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right)_{x=\tilde{x}(t)} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau,0)d\tau\right]_{x=\tilde{x}(t)} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial f(x,\tau,0)}{\partial x}\right)_{x=\tilde{x}(t)} d\tau$$

Macierz S(t) jest okresowa o okresie Θ
Podstawia się:

$$P(\tilde{x}(t),\tau) = \left(\frac{\partial f(x,\tau,0)}{\partial x}\right)_{x=\tilde{x}(t)}$$

Macierz $P(\tilde{x}(t),\tau)$ jest okresowa po τ o okresie T i okreso a po t o okresie Θ
Zachodzi:

$$S(t) = \frac{1}{T}\int_0^T P(\tilde{x},(t),\tau)\, d\tau$$

Jeżeli $\mu \to 0$, to $\pi(x(t),t,\mu) \to P(b,t)$.

Przez H(t) oznacza się macierz:

$$H(t) = \int_0^t \left[P(\tilde{x}(t),\tau) - S(t)\right] d\tau$$

Macierz H(t) ma następującą własność:

$$H(0) = 0$$

$$H(n\,T) = \int_0^{nT} P(\tilde{x}(n\,T),\tau)\,d\tau - n\,T\,S(nT) = n\int_0^{T} P(\tilde{x}(nT),\tau)\,d\tau -$$

$$- nT\,S(nT) = 0$$

Ze względu na ciągłość macierzy $H(t)$ wnioskujemy, że norma $\|H(t)\|$ jest ograniczona dla dowolnego $t > 0$

Zachodzi:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \int_0^{t} \frac{\partial P(\tilde{x}(t),\tau)}{\partial t}\,d\tau + P(\tilde{x}(t),t) - S(t) - t\,\frac{dS(t)}{dt}$$

Jeżeli oznaczymy:

$$M(t) = \int_0^{t} \frac{\partial P(\tilde{x}(t),\tau)}{\partial t}\,d\tau$$

$$N(t) = \frac{dS}{dt},$$

to otrzymamy:

$$\frac{dH(t)}{dt} = P(\tilde{x}(t),t) - S(t) + M(t) - N(t)$$

widać, że dla $\mu \to 0$ $\quad S(t) \to \left(\frac{\partial \pi(x)}{\partial x}\right)_{x=b}$; $\quad M(t) \to 0$; $\quad N(t) \to 0$

Równanie (4) można przepisać w postaci:

$$(I - \mu H)\frac{dy}{dt} = \mu\,(I - \mu H)\pi y,$$

stąd otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}(I - \mu H)y = -\mu\,(P - S + M - N)y + \mu\,(I - \mu H)\pi y =$$

$$= \mu\,S(I - \mu H)y + \mu\left[\pi - P - M + N + \mu\,(SH - H\pi)\right]y$$

kładąc $z = (I - \mu H)y$ oraz $\hat{t} = \mu\,t$ otrzymuje się:

$$\frac{dz}{dt} = SZ + BZ, \tag{4}$$

gdzie:

$$B = \left[\alpha - P - M + N + \mu(SH - H\alpha)\right](I - \mu H)^{-1}$$

Widać, że:

$$\|z\| \to 0 \Longleftrightarrow \|y\| \to 0 \quad \text{dla} \quad t \to \infty$$

Wprowadzamy funkcję:

$$\sigma(\mu) = \sup_{t > 0} \|B(\hat{t})\| \quad \text{ciągłą po } \mu \quad \mu < \sigma, \ \sigma > 0$$

przy $\mu \to 0$ $\sigma(\mu) \to 0$, czyli dla dostatecznie małego μ funkcję $\sigma(\mu)$ można uczynić dostatecznie małą.

Jeżeli $\tilde{x}(t)$ jest stabilne (założenie), to stosując zwykłą metodę badania stabilności orbitalnej wnioskujemy, że:

$$\|\xi\| \to 0 \quad \text{przy} \quad t \to \infty,$$

gdzie ξ spełnia równanie wariacyjne:

$$\frac{d\xi}{dt} = S(\hat{t})\xi$$

Czyli przy dostatecznie małym $\|B\|$ również [1] $\|z\| \to 0$, co kończy dowód.

LITERATURA

1. STRUBLE R. - Równania różniczkowe nieliniowe. WNT 1965.
2. BOGOLUBOW N.N., MITROPOLSKIJ J.A. - Asimptoticzeskije metody w tieorii nieliniejnych kolebanij. Gostiechizdat 1955.

Przyjęto do druku w styczniu 1972 r.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
В СИСТЕМАХ СИНХРОНИЗАЦИИ

Р е з ю м е

В статье обсуждается возможность появления почти периодических колебаний в самовозбуждающихся системах в результате "обрыва" линейной синхронизации.

ON THE EXISTENCE OF NEARLY PERIODICAL VIBRATIONS IN SYNCHRONIZING SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper, the possibility of the occurrence of nearly periodical vibrations in self-inducing systems as a result of "break off" of the outer synchronization is discussed.