

ZYGMUNT NOWOMIEJSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

MOC W UKŁADACH ELEKTRYCZNYCH O PRZEBIEGACH NIEOKRESOWYCH

Streszczenie. W pracy zostały podane definicje wartości skutecznych oraz mocy czynnej i biernej dla układów o dowolnych, na ogół nieokresowych przebiegach. Wyprowadzono nowe zależności dla mocy czynnej i biernej i podano ich fizyczne interpretacje w odniesieniu do układów liniowych.

Niech $f(t)$ będzie funkcją przebiegu rzeczywistego. Przez wartość skuteczną F przebiegu $f(t)$ rozumiemy wielkość:

$$F = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t)]^2 dt.} \quad (1)$$

Dla wartości skutecznej F może zachodzić:

1. $F = 0$
2. $F = \text{constans} > 0$
3. $F \rightarrow \infty$

Z punktu widzenia prowadzonych rozważań wszystkie przebiegi mogące wystąpić w dowolnym obwodzie elektrycznym zostaną podzielone na dwie klasy. Do klasy pierwszej (I) zostaną zaklasyfikowane przebiegi, których wartość skuteczna $F = 0$ a do drugiej (II) przebiegi, dla których $0 < F < \infty$. Przebiegi, dla których $F \rightarrow \infty$ nie mogą wystąpić w układach rzeczywistych i zostaną pominięte w dalszych rozważaniach.

Ogólnie biorąc, przebiegi $f(t)$ mogą zawierać impulsy Diraca $\delta(t)$. Kwadrat impulsu Diraca jest niezdefiniowany i dlatego pojęcie wartości skutecznej dla tego typu przebiegów nie posiada znaczenia. W naszych rozważaniach przyjmujemy jednak zaklasyfikowanie do klasy (I) lub (II) przebiegu w postaci:

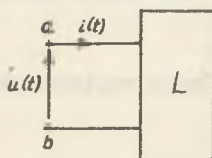
$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta(t - \tau_k); \quad k: |\tau_k| < T \quad (2)$$

w zależności od wartości granicy:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varepsilon_k|^2 \quad (3)$$

Do klasy (I) należą przebiegi o skończonej wartości energii, w szczególności funkcje przejścia układów liniowych i pasywnych.

Do klasy (II) należą wszystkie przebiegi okresowe oraz duża klasa przebiegów nieokresowych. Między innymi przebiegi prawie okresowe występujące w układach rezonansowych i samowzbudnych oraz przebiegi wielookresowe i modulowane.



Rys. 1

W dalszych rozważaniach zajmiemy się układem L skupionym między zaciskami (a,b), między którymi występują przebiegi: napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$ należące do klasy (II) (por. rys. 1). Oznacza to, że na zaciskach (a,b) układu L określone są wartości skuteczne (por. (1)):

$$U = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [u(t)]^2 dt} \quad (4)$$

$$I = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [i(t)]^2 dt}$$

oraz moc modułowa (por. [1]):

$$P_m = U I. \quad (5)$$

Moc czynną P pobieraną przez układ L definiujemy przy pomocy relacji:

$$P = \frac{df}{dt} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i(t) dt, \quad (6)$$

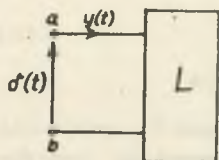
a moc bierną Q przy pomocy relacji:

$$Q = \frac{d^2f}{dt^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \{i(t)\} dt, \quad (7)$$

gdzie $H\{i(t)\}$ oznacza transformatę Hilberta funkcji $i(t)$ i zachodzi (por. [2]):

$$H\{i(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\tau) d\tau}{\tau - t}.$$

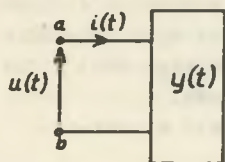
Niech $y(t)$ jest odpowiedzią układu liniowego, czasowo niezmienniczego (aktywnego lub pasywnego) zawartego między zaciskami (a,b) na napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$ (por. rys. 2). Dla układu tego zachodzi (por. rys. 3):



Rys. 2

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

stąd dla mocy czynnej (por. (6)):



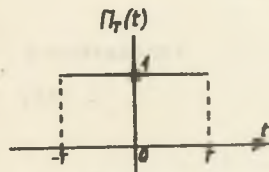
Rys. 3

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] dt \quad (8)$$

Położymy (por. rys. 4):

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } -T < t < T \\ 0, & \text{gdy } t < -T \text{ oraz } t > T. \end{cases}$$

Wykorzystując funkcję $\Pi_T(t)$ do zapisu reacji (8), otrzymamy:



Rys. 4

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \Pi_T(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau \right] dt$$

Zakładając, że dopuszczalna jest zmiana kolejności całkowania, otrzymamy:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) u(t-\tau) dt \right] d\tau. \quad (9)$$

Wielkość:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) u(t-\tau) dt. \quad (10)$$

jest (na podstawie definicji) funkcją autokorelacji przebiegu napięcia $u(t)$.

Jest ona funkcją parzystą:

$$\varphi(t) = \varphi(-t)$$

i dlatego niezależną od przesunięcia fazowego.

Po wprowadzeniu (10) do relacji (9), otrzymamy:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) y(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Z relacji (11) wynika twierdzenie orzekające, że moc czynna P pobierana przez układ L nie jest bezpośrednio zależna od funkcji przebiegu przyłożonego napięcia $u(t)$, lecz od autokorelacji tego przebiegu. Oznacza to, że jeżeli różne napięcia posiadające tę samą autokorelację zostaną przyłożone do tego samego układu liniowego L , to pobór mocy czynnej P w każdym przypadku będzie ten sam. Należy także zauważyć, że na ogół znacznie łatwiej z wyników pomiaru odtworzyć funkcję $\varphi(t)$ od przebiegu $u(t)$ i dla tego wzór (11) może posiadać istotne znaczenie obliczeniowe.

Stosując transformację Fouriera, wzór (11) można przedstawić w postaci:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) y^*(\omega) d\omega$$

$$= \left\{ \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_u(\omega) y^*(\omega) d\omega \right\}. \quad (12)$$

(Wzór (12) wynika z bezpośredniego zastosowania twierdzenia Parsevala do wzoru (11)).

Uwaga: Uzyskane stosunkowo proste i łatwe w obróbie numerycznej relacje (11) oraz (12) ważne są tylko w odniesieniu do układów liniowych. W przypadku, gdy między zaciskami (a, b) skupiony jest obwód nieliniowy moc czynną P można obliczyć tylko bezpośrednio z wzoru (6).

W odniesieniu do układów liniowych dla mocy biernej Q (por. (7)) zachodzą:

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) H(u(t-\tau)) d\tau \right] dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \Pi_T(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) H(u(t-\tau)) d\tau \right] dt.$$

Stąd przyjmując, że dopuszczalna jest zmiana kolejności całkowania:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) H(u(t-\tau)) dt \right] d\tau.$$

Mamy:

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) H(u(t-\tau)) dt = \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_T(t) u(t) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) dx}{x-t+\tau} \right] dt \\ & = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_T(t) u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\lambda - \tau + t) d\lambda}{\lambda} \right] dt \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) u[t - (\tau - \lambda)] dt \right] d\lambda \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau - \lambda) d\lambda}{\lambda} = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha - \tau} = - H\{\varphi(\tau)\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$Q = - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) H\{\varphi(\tau)\} d\tau. \quad (13)$$

Z relacji (13) wynika twierdzenie orzekające, że moc bierna Q pobierana przez układ liniowy nie jest bezpośrednio zależna od przyłożonego napięcia $u(t)$, lecz od transformaty Hilberta funkcji autokorelacji $\varphi(t)$.

Dla $H\{\varphi(t)\}$ zachodzi:

$$\begin{aligned} H\{\varphi(-t)\} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau + t} = - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(-\tau) d\tau}{-\tau - t} \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha - t} = - H\{\varphi(t)\}. \end{aligned}$$

Czyli

$$\{H \varphi(-t)\} = -H\{\varphi(t)\}. \quad (14)$$

Tak więc funkcja $H\{\varphi(t)\}$ jest funkcją nieparzystą. Stosując transformację Fouriera do relacji (13) otrzymamy:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega S_u(\omega) Y^*(\omega) d\omega \\ &= -\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{j} \int_0^{\infty} S_u(\omega) Y^*(\omega) d\omega \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Współczynnik mocy λ jest na ogół zdefiniowany przy pomocy relacji:

$$\lambda = \frac{P}{U^2 I}.$$

Położmy:

$$\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i(t) i(t-\tau) dt. \quad (16)$$

Na podstawie wzorów (4) otrzymamy:

$$U = \sqrt{\psi(0)}, \quad I = \sqrt{\psi(0)}$$

i stąd dla układów liniowych:

$$\lambda = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) \varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{\psi(0) \varphi(0)}}. \quad (17)$$

LITERATURA

1. NOWOMIEJSKI Z.J.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. "Elektryka" z. 15.
2. NOWOMIEJSKI Z.J.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalformigen Vorgängen. "Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik" 8, s. 244-254, 1967.

МОЩНОСТЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ТЕЧЕНИЕМ

Резюме

В работе поданы определения действующих значений а также активной и реактивной мощностей для систем с произвольным, вообще непериодическим течением. Выведены новые зависимости для активной и реактивной мощностей и поданы их физикальные интерпретации относительно линейных систем.

POWER RATING IN NON-PERIODICAL ELECTRIC SYSTEMS

Summary

In the paper definitions of effective values, active and reactive power of systems of arbitrary, generally non-periodical characteristics, are given.

New relationships for the active and reactive power are derived and their physical interpretation related to linear are presented.