

ZOFIA CICHOWSKA

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i EnergoelektronikiTRANSFORMATA FUNKCJI OBCIĘTEJ I JEJ ZASTOSOWANIE
W ANALIZIE OBWODÓW ELEKTRYCZNYCH

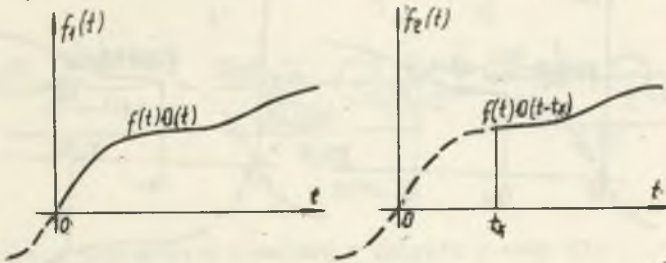
Streszczenie. Przeanalizowano zmianę warunków pracy obwodu elektrycznego w czasie trwania stanu nieustalonego przy wykorzystaniu transformaty Laplace'a funkcji i pochodnej funkcji obciętej jednostronnie oraz funkcji obciętej dwustronnie.

1. Wstęp

Rozważmy funkcję transformowalną $f_1(t) = f(t) \mathbb{1}(t)$ przedstawioną na rys. 1a, (funkcja pierwotna).

Transformata Laplace'a tej funkcji

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \mathbb{1}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F_1(p). \quad (1)$$



Rys. 1

Niech $f_2(t)$ będzie funkcją powstałą przez jednostronne obcięcie funkcji $f_1(t)$ dla czasów $t < t_x$ (rys. 1b), czyli $f_2(t) = f(t) \mathbb{1}(t - t_x)$.

Transformata Laplace'a funkcji $f_2(t)$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \mathbb{1}(t - t_x) e^{-pt} dt = \int_{t_x}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F_2(p) \quad (2)$$

Transformata funkcji obciętej $F_2(p)$ różni się od transformaty funkcji pierwotnej $F_1(p)$.

Rozpatrzmy z kolei transformatę pochodnej funkcji jednostronnie obciętej $\frac{df_2(t)}{dt}$, przy czym wartość funkcji dla czasu t_x wynosi $f(t_x)$.

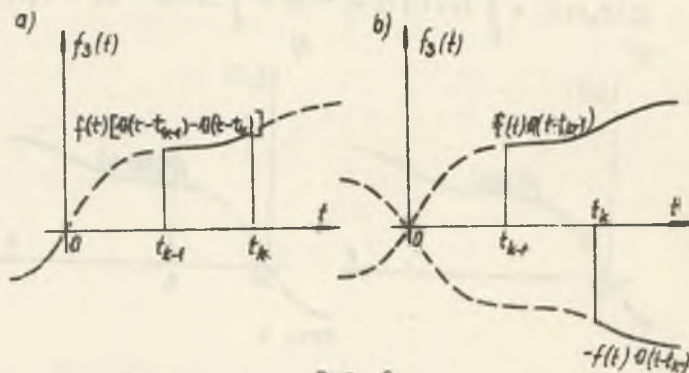
$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df_2(t)}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [f(t) \mathbb{1}(t-t_x)] e^{-pt} dt = \int_{t_x}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt$$

wykonując całkowanie przez części, otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{df_2(t)}{dt} \right\} &= p \int_{t_x}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - f(t_x) e^{-pt_x} \\ &= pF_2(p) - f(t_x) e^{-pt_x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Rozważmy teraz funkcję $f_3(t)$ powstałą przez dwustronne obcięcie funkcji $f_1(t)$ dla czasów $t < t_{k-1}$ oraz $t > t_k$ (rys. 2a), którą można przedstawić jako różnicę dwóch funkcji obciętych jednostronnie (rys. 2b)

$$f_3(t) = f(t) \mathbb{1}(t-t_{k-1}) - f(t) \mathbb{1}(t-t_k). \quad (4)$$



Rys. 2

Transformata funkcji obciętej dwustronnie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ f_3(t) \} &= \int_{t_{k-1}}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt - \int_{t_k}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F_{k-1}(p) - \\ &= F_k(p) = F_3(p) \end{aligned} \quad (5)$$

Zachodzi oczywiście

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-pt} dt = F_3(p) \quad (6)$$

Transformata pochodnej funkcji obciętej dwustronnie na podstawie twierdzenia o liniowości przekształcenia może być wyznaczona jako różnica transformat pochodnych funkcji obciętych jednostronnie.

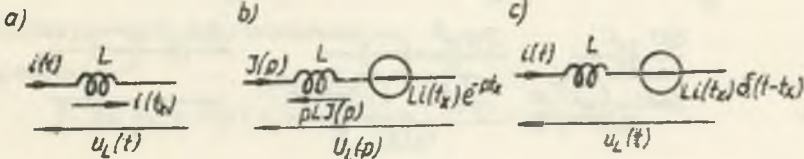
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{df_3(t)}{dt}\right\} &= pF_{k-1}(p) - f(t_{k-1}^+)e^{-pt_{k-1}} - [pF_k(p) - f(t_k^+)e^{-pt_k}] = \\ &= pF_3(p) - f(t_{k-1}^+)e^{-pt_{k-1}} + f(t_k^+)e^{-pt_k} \end{aligned} \quad (7)$$

2. Analiza zmiany warunków pracy dla elementów obwodu elektrycznego

Rozważmy przebiegi prądu i napięcia w cewce (rys. 3a), dla której w chwili $t = t_x$ następuje zmiana warunków pracy przy czym dla $t = t_x$, $i = i(t_{x+})$. Ze względu na warunek ciągłości prądu w cewce można napisać $i(t_x)$ zamiast $i(t_{x+})$.

Interesuje nas przedział czasu $t_x < t < \infty$, czyli w którym

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} [i(t) \delta(t-t_x)]. \quad (8)$$



Rys. 3

Na podstawie poprzednich rozważań w oparciu o wzór (3)

$$U_L(p) = pL J(p) - Li(t_x)e^{-pt_x}. \quad (9)$$

Równaniu (9) można przyporządkować schemat zastępczy opisany wielkościami operatorowymi (rys. 3b), a będący połączeniem szeregowym cewki pustej i SEM reprezentującej warunek brzegowy. Schemat przedstawiony na rys.3b można również opisać wielkościami czasowymi (rys. 3c), przy czym warunek brze-

gowej reprezentuje SEM impulsowa przesunięta. Wyrażenia $Li(t_x)\delta(t-t_x)$ nie wprowadza się do równania czasowego.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, gdy zmiana warunków pracy cewki następuje w dwóch chwilach czasu t_{k-1} oraz t_k będących granicami przedziału, przy czym $i(t_{k-1})$ oraz $i(t_k)$ są to wartości brzegowe prądu płynącego przez cewkę.

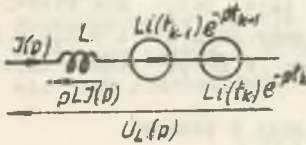
Interesuje nas przedział czasu $t_{k-1} < t < t_k$, w którym

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} [i(t) \mathbb{1}(t-t_{k-1}) - i(t) \mathbb{1}(t-t_k)]. \quad (10)$$

Na podstawie wzoru (7)

$$U_L(p) = pL J(p) - Li(t_{k-1})e^{-pt_{k-1}} + Li(t_k)e^{-pt_k}. \quad (11)$$

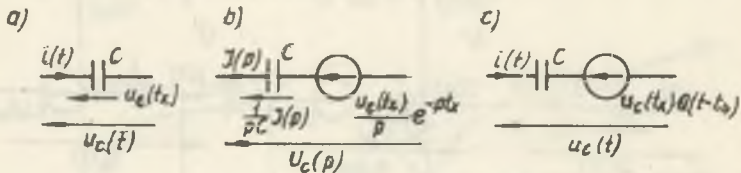
Na podstawie równania (11) do schematu zastępczego można wprowadzić obydwa warunki brzegowe (rys. 4).



Rys. 4

Należy zwrócić uwagę, że wyrażenie $Li(t_k)e^{-pt_k}$ nie ma wpływu na przebieg prądu i napięcia w rozpatrywanym przedziale czasu $t_{k-1} < t < t_k$, a jedynie zapewnia zerowanie przebiegów poza tym przedziałem dla czasu $t > t_k$.

Z kolei rozpatrzmy przebiegi prądu i napięcia w kondensatorze (rys. 5a), dla którego w chwili



Rys. 5

li $t = t_x$ następuje zmiana warunków pracy, przy czym dla $t=t_x$, $u_C = u_C(t_x+)$. Ze względu na warunek ciągłości napięcia na kondensatorze można pisać $u_C(t_x)$ zamiast $u_C(t_x+)$.

Interesuje nas przedział czasu $t_x < t < \infty$, w którym

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [u_C(t) \mathbb{1}(t-t_x)]. \quad (12)$$

Na podstawie wzoru (3)

$$J(p) = pCu_C(p) - Cu_C(t_x)e^{-pt_x}. \quad (13)$$

Przekształcając wzór (13) otrzymamy

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} J(p) + \frac{u_C(t_x)}{p} e^{-pt_x} \quad (14)$$

Równaniu (14) można przyporządkować schemat zastępczy opisany wielkościami operatorowymi (rys. 5b), a będący połączeniem szeregowym kondensatora pustego i SEM reprezentującej warunek brzegowy. Podobnie jak poprzednio schemat przedstawiony na rys. 5b można opisać wielkościami czasowymi (rys. 5c), przy czym warunek brzegowy reprezentuje SEM skokowa przesunięta. Wyrażenie $u_C(t_x) \mathbb{1}(t-t_x)$ można wprowadzić do równania czasowego napięcia

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_x}^{\infty} i(t) dt + u_C(t_x) \mathbb{1}(t-t_x) \quad (15)$$

W drugim przypadku zmiana warunków pracy kondensatora następuje w dwóch chwilaach czasu t_{k-1} oraz t_k będących granicami przedziału, przy czym $u_C(t_{k-1})$ oraz $u_C(t_k)$ są to wartości brzegowe napięcia na kondensatorze. W interesującym nas przedziale czasu $t_{k-1} < t < t_k$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} [u_C(t) \mathbb{1}(t-t_{k-1}) - u_C(t) \mathbb{1}(t-t_k)] \quad (16)$$

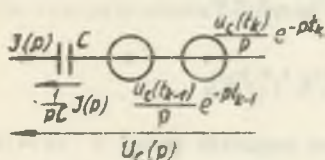
Na podstawie wzoru (7)

$$J(p) = pC U_C(p) - C u_C(t_{k-1}) e^{-pt_{k-1}} - C u_C(t_k) e^{-pt_k} \quad (17)$$

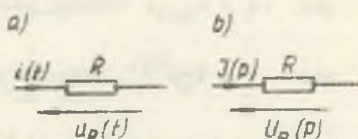
Przekształcając wzór (17) otrzymamy

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} J(p) + \frac{u_C(t_{k-1})}{p} e^{-pt_{k-1}} - \frac{u_C(t_k)}{p} e^{-pt_k} \quad (18)$$

Na podstawie równania (18) do schematu zastępczego można wprowadzić obydwa warunki brzegowe (rys. 6).



Rys. 6



Rys. 7

Podobnie jak poprzednio wyrażenie $u_C(t_k)e^{-pt_k}$ nie ma wpływu na przebieg prądu i napięcia w rozpatrywanym przedziale czasu $t_{k-1} < t < t_k$, a jedynie zapewnia zerowanie przebiegów poza tym przedziałem dla czasu $t > t_k$. Rozpatrując przebiegi prądu i napięcia dla oporu (rys. 7) otrzymamy w przypadku zmiany warunków pracy w chwili t_x

$$u_R(t) = Ri(t) \mathbb{1}(t-t_x) \quad (19)$$

oraz

$$U_R(p) = R J(p). \quad (20)$$

W przypadku zmiany warunków pracy w chwili t_{k-1} oraz t_k

$$U_R(t) = Ri(t) [\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)] \quad (21)$$

oraz

$$U_R(p) = R J(p). \quad (22)$$

3. Zastosowanie transformat funkcji obojętých w metodzie linearyzacji wieloodcinkowej

Rozpatrzmy elementy R, L, C o nieliniowych charakterystykach $u_R = f(i)$, $\psi = f(i)$ oraz $q = f(u)$ pracujące w prostych obwodach o wymuszeniu stałym.

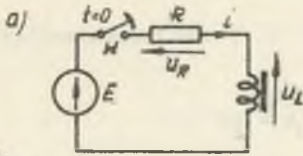
Wyznaczenie przebiegów w tych obwodach przeprowadzimy metodą linearyzacji wieloodcinkowej analizując kolejno przedziały zmienności wielkości związanych z charakterystyką nieliniową.

a. Obwód R, $\psi(i)$ (rys. 8a) o zerowym warunku początkowym $i(0) = 0$. Rys. 8b przedstawia nieliniową charakterystykę $\psi = f(i)$ dla cewki oraz linearyzację k-tego przedziału. Warunki brzegowe przedziału są następujące:

$$\text{dla } t = t_{k-1}; \quad i(t_{k-1}) = i_{k-1}; \quad \psi(t_{k-1}) = \psi_{k-1}$$

$$\text{dla } t = t_k; \quad i(t_k) = i_k; \quad \psi(t_k) = \psi_k$$

Czas t_k , w którym następuje kolejno zmiana warunków pracy i przejście do następnego k+1 przedziału zostanie obliczony po wyznaczeniu przebiegów w k-tym przedziale.



Równanie różniczkowe w k-tym przedziale dla funkcji obciętych dwustronnie, a więc pomnożonych przez $[\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)]$ jest następujące:

$$u_R(t) + u_L(t) = Ri(t) + \frac{dv(t)}{dt} = E [\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)]. \quad (23)$$

Zależność $v = f(i)$ w k-tym przedziale

$$v(t) = v_{k-1} + \frac{v_k - v_{k-1}}{i_k - i_{k-1}} [i(t) - i_{k-1}]. \quad (24)$$

Oznaczając przez L_{dk} indukcyjność dynamiczną dla k-tego przedziału

$$L_{dk} = \frac{v_k - v_{k-1}}{i_k - i_{k-1}} \quad (25)$$

mamy

$$v(t) = v_{k-1} - L_{dk} \dot{i}_{k-1} + L_{dk} \dot{i}(t) \quad (26)$$

oraz

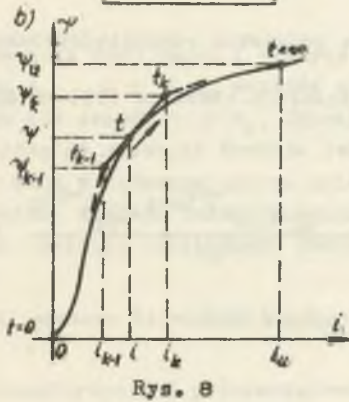
$$u_L(t) = \frac{dv(t)}{dt} = L_{dk} \frac{di(t)}{dt}. \quad (27)$$

Wprowadzając zależność (27) do równania (23) otrzymamy

$$Ri(t) + L_{dk} \frac{di(t)}{dt} = E [\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)]. \quad (28)$$

Po transformacji równanie (28) przybiera postać

$$R J(p) + pL_{dk} J(p) - L_{dk} i_{k-1} e^{-pt_{k-1}} + L_{dk} i_k e^{-pt_k} = E(p), \quad (29)$$

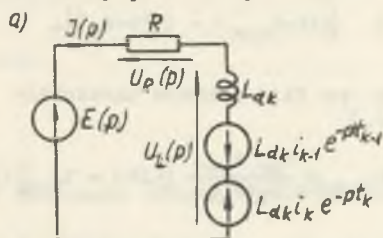


Rys. 8

gdzie

$$E(p) = \frac{E}{p}(e^{-pt_{k-1}} - e^{-pt_k}).$$

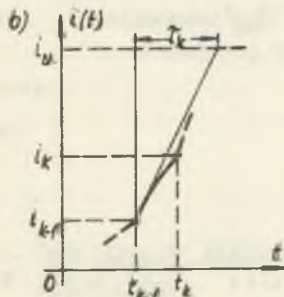
Schemat zastępczy dla k-tego przedziału (na podstawie równania (29)) przedstawiony jest na rys. 9a.



Po przekształceniu równania (29) otrzymamy

$$J(p) = \frac{E(p) + L_{dk}i_{k-1}e^{-pt_{k-1}} - L_{dk}i_k e^{-pt_k}}{R + pL_{dk}} \quad (30)$$

oraz po przejściu na postać czasową (rys. 9b)



Rys. 9

$$i(t) = i_u \left(1 - e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau_k}}\right) \mathbb{1}(t-t_{k-1}) - i_u \left(1 - e^{-\frac{t-t_k}{\tau_k}}\right) \mathbb{1}(t-t_k) + \quad (31)$$

$$+ i_{k-1} e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau_k}} \mathbb{1}(t-t_{k-1}) - i_k e^{-\frac{t-t_k}{\tau_k}} \mathbb{1}(t-t_k),$$

gdzie stała czasowa

$$\tau_k = \frac{L_{dk}}{R} \quad (32)$$

prąd ustalony

$$i_u = \frac{E}{R}.$$

Obliczając lewostronną wartość wyrażenia (31) dla czasu t_k , uwzględniając warunki brzegowe, otrzymamy

$$i_k = i_u - (i_u - i_{k-1}) e^{-\frac{t_k - t_{k-1}}{\tau_k}}, \quad (33)$$

a po przekształceniach

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \ln \frac{1 - i_{k-1}}{1 - i_k} \quad (34)$$

W równaniu (31) drugi i czwarty składnik mają w rozpatrywanym przedziale czasu $t_{k-1} < t < t_k$ wartość równą zero, ale zapewniają zerowanie przebiegu dla czasów $t > t_k$. Identyczny rezultat jak poprzednio można otrzymać również stosując funkcje jednostronnie obciążone dla czasów $t < t_{k-1}$, przy czym w końcowym wyniku należy obciążyć przebieg dla czasów $t > t_k$ odpowiednią funkcją jednostkową przesuniętą. W tym drugim wariancie rozwiązania równanie różniczkowe obwodu ma postać

$$Ri(t) + L_{dk} \frac{di(t)}{dt} = E \mathbb{1}(t - t_{k-1}) \quad (35)$$

Po transformacji i przekształceniach równania (35) otrzymamy

$$J(p) = \left[\frac{E}{p(R + pL_{dk})} + \frac{L_{dk} i_{k-1}}{R + pL_{dk}} \right] e^{-pt_{k-1}}, \quad (36)$$

a po przejściu na postać czasową i obciążeniu funkcją $\mathbb{1}(t - t_k)$

$$i(t) = \left[i_u - (i_u - i_{k-1}) e^{-\frac{t - t_{k-1}}{\tau_k}} \right] \left[\mathbb{1}(t - t_{k-1}) - \mathbb{1}(t - t_k) \right] \quad (37)$$

Wyrażenie (37) można przekształcić do postaci (31) uwzględniając związek (33).

Drugi wariant rozwiązania wymaga mniejszej ilości obliczeń i zostanie zastosowany do analizy następujących przypadków.

b. Obwód R, q(u) (rys. 10a) o zerowym warunku początkowym $u_C(0) = 0$

Rys. 10b przedstawia nieliniową charakterystykę $q = f(u)$ dla kondensatora oraz linearyzację k-tego przedziału.

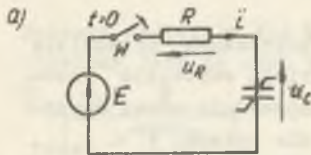
Warunki brzegowe przedziału są następujące:

$$\text{dla } t = t_{k-1}: \quad u_C(t_{k-1}) = u_{C,k-1}, \quad q(t_{k-1}) = q_{k-1}$$

$$\text{dla } t = t_k: \quad u_C(t_k) = u_{C,k}, \quad q(t_k) = q_k$$

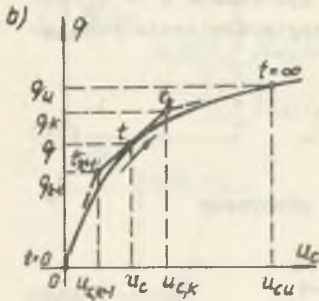
Dla funkcji jednostronnie obciążonych równanie obwodu ma postać

$$u_R(t) + u_C(t) = R \frac{dq(t)}{dt} + u_C(t) = E \mathbb{1}(t-t_{k-1}). \quad (38)$$



Zależność $q = f(u_C)$ w k -tym przedziale

$$q(t) = q_{k-1} + \frac{q_k - q_{k-1}}{u_{C,k} - u_{C,k-1}} [u_C(t) - u_{C,k-1}]. \quad (39)$$



Oznaczając przez C_{dk} pojemność dynamiczną dla k -tego przedziału

$$C_{dk} = \frac{q_k - q_{k-1}}{u_{C,k} - u_{C,k-1}} \quad (40)$$

mamy

$$q(t) = q_{k-1} - C_{dk} u_{C,k-1} + C_{dk} u_C(t) \quad (41)$$

Rys. 10

oraz

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C_{dk} \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (42)$$

Wprowadzając zależność (42) do równania (38) otrzymamy

$$R C_{dk} \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E \mathbb{1}(t-t_{k-1}). \quad (43)$$

Po transformacji i przekształceniach równania (43) otrzymamy

$$U_C(p) = \left[\frac{E}{p(1+pC_{dk}R)} + \frac{C_{dk}R u_{C,k-1}}{1+pC_{dk}R} \right] e^{-pt_{k-1}}, \quad (44)$$

a po przejściu na postać czasową i obciążeniu funkcją $\mathbb{1}(t-t_k)$

$$u_C(t) = \left[E - (E - u_{C,k-1}) e^{-\frac{t-t_{k-1}}{T_k}} \right] [\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)], \quad (45)$$

gdzie

stała czasowa $\tau_k = RC_{dk}$ (46)

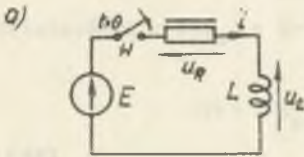
napięcie ustalone $u_{Cu} = E$.

Na podstawie równania (45) przy uwzględnieniu warunków brzegowych

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \ln \frac{E - u_{C,k-1}}{E - u_{C,k}} \quad (47)$$

o. Obwód L, $u_R(i)$ (rys. 11a) o zerowym warunku początkowym $i(0) = 0$

Rys. 11b przedstawia nieliniową charakterystykę $u_R = f(i)$ dla opornika oraz linearyzację k-tego przedziału. Warunki brzegowe przedziału są następujące:

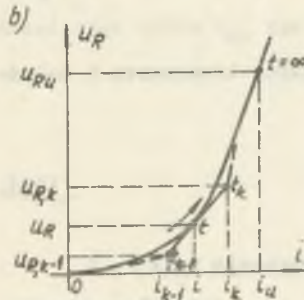


dla $t = t_{k-1}$; $i(t_{k-1}) = i_{k-1}$

$u_R(t_{k-1}) = u_{R,k-1}$

dla $t = t_k$; $i(t_k) = i_k$

$u_R(t_k) = u_{R,k}$



Dla funkcji jednostronnie obciętych równanie obwodu ma postać

$$u_R(t) + u_L(t) = u_R(t) + L \frac{di(t)}{dt} = E \quad (48)$$

$= E \quad (t - t_{k-1})$.

Zależność $u_R = f(i)$ w k-tym przedziale

$$u_R(t) = u_{R,k-1} + \frac{u_{R,k} - u_{R,k-1}}{i_k - i_{k-1}} [i(t) - i_{k-1}] \quad (49)$$

Oznaczając przez R_{dk} oporność dynamiczną dla k-tego przedziału

$$R_{dk} = \frac{u_{R,k} - u_{R,k-1}}{i_k - i_{k-1}} \quad (50)$$

mamy

$$u_R(t) = u_{R,k-1} - R_{dk} i_{k-1} + R_{dk} i(t). \quad (51)$$

Wprowadzając zależność (51) do równania (48) otrzymamy

$$R_{dk} i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = (E + R_{dk} i_{k-1} - u_{R,k-1}) \mathcal{U}(t - t_{k-1}) \quad (52)$$

Po transformacji i przekształceniach równania (52) otrzymamy

$$J(p) = \left[\frac{E + R_{dk} i_{k-1} - u_{R,k-1}}{p(R_{dk} + pL)} + \frac{L i_{k-1}}{R_{dk} + pL} \right] e^{-pt_{k-1}}, \quad (53)$$

a po przejściu na postać ozasową i obcięciu funkcją $\mathcal{U}(t - t_k)$

$$i(t) = \left[i_{k-1} + \frac{E - u_{R,k-1}}{R_{dk}} \left(1 - e^{-\frac{t - t_{k-1}}{\tau_k}} \right) \right] [\mathcal{U}(t - t_{k-1}) - \mathcal{U}(t - t_k)], \quad (54)$$

gdzie

$$\text{stała ozasowa} \quad \tau_k = \frac{L}{R_{dk}}$$

(55)

napięcie ustalone $\tau_R = E$

Na podstawie równania (54) przy uwzględnieniu warunków brzegowych i zależności (50) otrzymamy

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \ln \frac{E - u_{R,k-1}}{E - u_{R,k}} \quad (56)$$

d. Obwód $C, u_R(i)$ (rys. 12a) o zerowym warunku początkowym $u_C(0) = 0$

Rys. 12b przedstawia nieliniową charakterystykę $u_R = f(i)$ dla opornika oraz linearyzując k -tego przedziału.

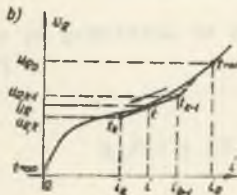
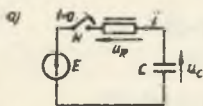
Warunki brzegowe przedziału są następujące:

$$\text{dla } t = t_{k-1}, \quad i(t_{k-1}) = i_{k-1},$$

$$u_R(t_{k-1}) = u_{R,k-1}$$

$$\text{dla } t = t_k, \quad i(t_k) = i_k,$$

$$u_R(t_k) = u_{R,k}$$



Rys. 12

W odróżnieniu od przypadków analizowanych poprzednio punkt pracy prze-
suwa się po charakterystyce w kierunku do początku układu współrzędnych.

Dla funkcji jednostronnie obciętych równanie obwodu ma postać

$$u_R(t) + u_C(t) = u_R(t) + \frac{1}{C} \int_{t_{k-1}}^t i(t) dt +$$

$$+ u_{C,k-1} \mathbb{1}(t-t_{k-1}) = E \mathbb{1}(t-t_{k-1}). \quad (57)$$

Po zróżniczkowaniu równanie (57) przybierze postać

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0. \quad (58)$$

Zależność $i = f(u_R)$ w k -tym przedziale

$$i(t) = i_{k-1} - \frac{i_{k-1} - i_k}{u_{R,k-1} - u_{R,k}} [u_{R,k-1} - u_R(t)]. \quad (59)$$

Oznaczając przez R_{dk} oporność dynamiczną dla k -tego przedziału

$$R_{dk} = \frac{u_{R,k-1} - u_{R,k}}{i_{k-1} - i_k} \quad (60)$$

mamy

$$i(t) = i_{k-1} - \frac{1}{R_{dk}} u_{R,k-1} + \frac{1}{R_{dk}} u_R(t). \quad (61)$$

Wprowadzając zależność (61) do równania (58) otrzymamy

$$R_{dk} C \frac{du_R(t)}{dt} + u_R(t) = (u_{R,k-1} - R_{dk} i_{k-1}) \mathbb{1}(t-t_{k-1}). \quad (62)$$

Po transformacji i przekształceniach równania (62) otrzymamy

$$U_R(p) = \left[\frac{u_{R,k-1} - R_{dk} i_{k-1}}{p(1+pCR_{dk})} + \frac{R_{dk} C u_{R,k-1}}{1+pCR_{dk}} \right] e^{-pt_{k-1}}, \quad (63)$$

a po przejściu na postać ozasową i obciążeniu funkcją $\mathbb{1}(t-t_k)$

$$u_R(t) = (u_{R,k-1} - R_{dk} i_{k-1} + R_{dk} i_{k-1} e^{-\frac{t-t_{k-1}}{\tau_k}}) [\mathbb{1}(t-t_{k-1}) - \mathbb{1}(t-t_k)], \quad (64)$$

gdzie

$$\text{stała ozasowa} \quad \tau_k = R_{dk} C \quad (65)$$

$$\text{wartość początkowa} \quad u_{R0} = E.$$

Na podstawie równania (64) przy uwzględnieniu warunków brzegowych i zależności (60) otrzymamy

$$t_k = t_{k-1} + \tau_k \ln \frac{i_{k-1}}{i_k}. \quad (66)$$

Zakończenie

We wszystkich czterech rozpatrywanych przypadkach rozważano obwód szeregowy, przy napięciowym wymuszeniu stałym o zerowych warunkach początkowych w cewkach i kondensatorach. Wymienione warunki nie są konieczne. Podobnie można rozważać obwody równoległe o wymuszeniu prądowym, obwody o niezerowych warunkach początkowych oraz obwody o innych wymuszeniach. Przypadek niezerowych warunków początkowych oraz przypadek innych wymuszeń wymagają szerszej analizy.

LITERATURA

1. CHOLEWICKI T.: Elektrotechnika teoretyczna, tom II. WNT, Warszawa 1971 r.
2. DOETSCH G.: Praktyka przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1964 r.
3. OSIOWSKI J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965 r.

Przyjęto do druku w listopadzie 1971 r.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ОТРЕЗНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ
В АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

Проанализировано изменение условий работы электрической цепи во время продолжительности неустановленного состояния при использовании изображений Лапласа функции и производной функции отрезной односторонно а. также функции отрезной обустронно.

TRANSFORM OF A CUT-OFF FUNCTION AND ITS APPLICATION
IN TREATING ELECTRIC CIRCUITS

S u m m a r y

Changes of operating conditions in an electric circuit during its transient state were analysed by the use of Laplace transforms of a function and those of derivatives of the function as cut on one-side and on both sides.