ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 36 Nr kol. 343

KRYSTYNA STEC
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

REALIZACJA ZER TRANSMITANCJI W WYBRANYM SEKTORZE PRAWEJ PÓŁPŁASZCZYZNY

Streszczenie. Artykuł omawia problem realizacji zer transmitancji w prawej półpłaszczyźnie. Wprowadzenie sekcji zerowych czwartego stopnia pozwoliło na realizację zer w sektorze określonym przy pomocy nierówności:

$$|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{4}$$

Definicje użytych pojęć:

2 – drzewo – para oddzielnych podgrafów nie zawierających oczek (każdy z podgrafów jest spójny), które razem wzięte zawierają wszystkie węzły układu. Jeden z podgrafów (lub obydwa) może składać się z pojedynczego izolowanego węzła,

3 – drzewo – zbiór trzech oddzielnych podgrafów (każdy z podgrafów jest spójny), które razem wzięte zawierają wszystkie węzły układu lecz nie tworzą oczek,

$W_{ab,cd}$ – suma iloczynów admitancji 2 drzew. Indeksy u dołu oznaczają węzły. Przecinek dzieli węzły na grupy należące do różnych podgrafów,

$U_{a,b,cd}$ – suma iloczynów admitancji 3 drzew. Indeksy u dołu oznaczają węzły. Przecinki dzielą węzły na grupy należące do różnych podgrafów,

odłączenie – a) części bieguna funkcji $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$

b) bieguna funkcji $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$

c) więcej niż bieguna funkcji $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$

definiują następujące zależności

$F_1(s) = F(s) - \frac{\gamma k_1 s}{s+\sigma_{\gamma k}}$ gdy $F(s)$ reprezentuje admitancję

$$F_2(s) = F(s) - \frac{\xi k_2}{s+\delta_k} \text{ gdy } F(s) \text{ reprezentuje impedancję,}$$

gdzie

$s = -\delta_k$ jest biegunem funkcji $F(s)$

$$k_1 = \operatorname{res} \left.\frac{F(s)}{s}\right|_{s=-\delta_k}$$

$$k_2 = \operatorname{res} F(s)_{s=-\delta_k},$$

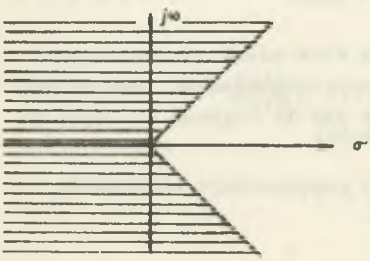
wówczas

$$\left.\begin{array}{l} \text{ad a) zachodzi gdy } \xi < 1 \\ \text{ad b) zachodzi gdy } \xi = 1 \\ \text{ad c) zachodzi gdy } \xi > 1 \end{array}\right\} \text{ rzeczywiste}$$

Problemem realizacji zer transmitancji zajmowali się B.J. Dasher [1] oraz S.L. Hakimi i S. Seshu [2].
Dasher rozwiązał problem realizacji zer transmitancji leżących na ujemnej półosi rzeczywistej. Zastosował metodę rozwijania funkcji wejściowej w układ drabinkowy przez kolejne odłączanie części tej admitancji. Zaproponował użycie sekcji zerowych typu Π, w których zera admitancji gałęzi poziomej są zerami parametru y_{12} macierzy admitancyjnej sekcji zerowej, a więc także zerami transmitancji całego układu.
Dasher wprowadził również sekcje realizujące parę zer urojonych. S.L.Hakimi i S. Seshu rozszerzyli metodę Dashera, tak aby uzyskać realizację zer zespolonych.
Wprowadzili pojęcie odłączenia więcej niż bieguna. Przedstawili realizację zespolonych zer transmitancji leżących w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s oraz realizację zer znajdujących się w sektorze $|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{3}$

Przedmiotem rozważań w niniejszym artykule jest rozszerzenie metody realizacji zespolonych zer transmitancji, wprowadzonej przez S.L. Hakimi i S. Seshu [2], na sektor prawej półpłaszczyzny określony przy pomocy zależności

$$|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{4}.$$



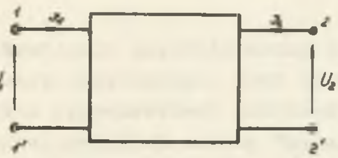
Rys. 1

Zagadnienie sprowadza się do realizacji parametru y_{12} macierzy admitancyjnej sekcji zerowej, mającej postać czwórnika typu Π. Przy wyznaczeniu y_{12} dogodnie jest posłużyć się odpowiednimi formułami topologicznymi [3]

$$y_{12} = \left.\frac{J_1}{U_2}\right|_{U_1=0} = -\frac{W_{12,1'2'} - W_{12',1'2}}{\sum U}, \qquad (1)$$

gdzie

$$\sum U = U_{12',1',2} + U_{1,2,1'2'} + U_{12,1',2'} + U_{1,2',1'2}$$



Rys. 2

Jeżeli mamy do czynienia z czwórnikiem o jednym wspólnym zacisku wejściowo-wyjściowym, to wówczas wzór (1) przyjmuje postać:

$$y_{12} = -\frac{W_{12,1'2'}}{\sum U} . \qquad (1a)$$

Jeżeli y_{12} jest parametrem macierzy admitancyjnej układu pasywnego, to wielomian $W_{12,1'2'}$ nie posiada współczynników ujemnych.
Wiadomo, [2] że wielomian stopnia n o współczynnikach nieujemnych, nie może mieć zer w sektorze

$$|\arg s| < \frac{\pi}{n}.$$

Jeżeli więc chcemy zrealizować zera w regionie

$$|\arg s| < \frac{\pi}{4}$$

przy pomocy pasywnego czwórnika RC o jednym wspólnym zacisku wejściowo-wyjściowym, to $W_{12,1'2'}$ musi być wielomianem stopnia czwartego.

Przyjmijmy, że żądane zero znajduje się w punkcie

$$s = \alpha + j\beta,$$

gdzie

$$\left.\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \text{i} \\ \beta > 0 \end{matrix}\right\} \text{rzeczywiste}$$

Będziemy więc realizować parę zer sprzężonych

$$s = \alpha \pm j\beta$$

Wielomian $W_{12,1'2'}$ będzie miał następującą postać:

$$W_{12,1'2'} = k(s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2) f(s) \qquad (2)$$

przy czym f(s) musi być wielomianem stopnia drugiego.

Przyjmujemy:

$$f(s) = (s + \sigma_a)(s + \sigma_b), \tag{2a}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_a > 0 \\ \text{i}\quad &\\ &\sigma_b > 0 \end{aligned}\right\} \text{rzeczywiste}$$

stąd

$$\begin{aligned} W_{12,1'2'} = &\, k\, s^4 + k\left[\sigma_a + \sigma_b - 2\alpha\right]s^3 + \\ &+ k\left[\sigma_a\sigma_b - 2\alpha(\sigma_a + \sigma_b) + \alpha^2 + \beta^2\right]s^2 + \\ &+ k\left[(\sigma_a + \sigma_b)(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\,\sigma_a\sigma_b\right]s \\ &+ k(\alpha^2 + \beta^2)\sigma_a\sigma_b, \end{aligned} \tag{3}$$

Ażeby współczynniki wielomianu $W_{12,1'2'}$ były nieujemne, muszą być spełnione następujące nierówności:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_a + \sigma_b \geqslant 2\alpha \\ &\sigma_a\sigma_b \geqslant 3\alpha^2 - \beta^2 \\ &\sigma_a + \sigma_b \leqslant 2\,\frac{\alpha^3 + \beta^2\alpha}{3\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{jeżeli} \quad 3\alpha^2 > \beta^2 \\ &\sigma_a + \sigma_b \geqslant 2\,\frac{\alpha^3 + \beta^2\alpha}{3\alpha^2 - \beta^2} \quad \text{jeżeli} \quad 3\alpha^2 < \beta^2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Jak widać z wyrażeń (2) i (2a), realizacja pary zer sprzężonych leżących w prawej półpłaszczyźnie w żądanym sektorze, wiąże się z koniecznością realizacji dwóch dodatkowych zer znajdujących się na ujemnej półosi rzeczywistej.

Obliczamy obecnie sekcję zerową typu $\mathfrak{T}$.

Zakładamy parametry macierzy admitancyjnej

$$y_{11} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{(admitancja RC)}$$

oraz

$$y_{12} = \frac{(s+\delta_a)(s+\delta_b)(s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2)f(s)}{(s+\delta_2)(s+\delta_4)(s+\delta_6)M_1(s)} .$$

Następnie przemieszczamy tak zera i bieguny y_{11}, by umożliwić realizację zera zespolonego, przy czym $y_{11}^{(1)}$ otrzymane na skutek tych działań musi nadal reprezentować admitancję RC. Zaczynamy od realizacji dodatkowych zer rzeczywistych metodą Dashera [1].
Przyjmujemy, że $-\delta_2$, $-\delta_4$ i $-\delta_6$ są odpowiadającymi nam biegunami funkcji $y_{11}^{(1)}$. Przez k_1 oznaczamy residuum funkcji $\frac{y_{11}^{(1)}}{s}$ w punkcie $-\delta_1$.
W celu otrzymania funkcji posiadającej żądane zera rzeczywiste odłączamy od $y_{11}^{(1)}$ część bieguna $-\delta_2$, a następnie $-\delta_4$ w sposób pokazany poniżej:

$$y_{11}^{(2)} = y_{11}^{(1)} - \frac{\gamma_2 k_2 s}{s+\delta_2}\Bigg|_{s=-\delta_a} = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$\gamma_2 < 1$$

$$y_{11}^{(3)} = y_{11}^{(2)} - \frac{\gamma_4 k_4 s}{s+\delta_4}\Bigg|_{s=-\delta_b} = y_{11}^{(1)} - \frac{\gamma_2 k_2 s}{s+\delta_2} - \frac{\gamma_4 k_4 s}{s+\delta_4}\Bigg|_{s=-\delta_b} = 0, \tag{6}$$

gdzie

$$\gamma_4 < 1$$

oczywiście γ_2 i γ_4 dobieramy tak, aby spełnione były zależności (5) i (6).
Jeżeli od funkcji $y_{11}^{(3)}$ odłączymy [2] więcej niż biegun, to możemy w efekcie zrealizować żądane zero zespolone

$$y_{11}^{(4)} = y_{11}^{(3)} - \frac{\gamma_6 k_6 s}{s+\delta_6}\Bigg|_{s=\alpha+j\beta} = y_{11}^{(1)} - \frac{\gamma_2 k_2 s}{s+\delta_2} - \frac{\gamma_4 k_4 s}{s+\delta_4} - \frac{\gamma_6 k_6 s}{s+\delta_6}\Bigg|_{s=\alpha+j\beta} = 0, \tag{7}$$

gdzie

$$\gamma_6 > 1$$

Ażeby mogła zachodzić równość (7), spełniony być musi dodatkowo następujący warunek [2]:

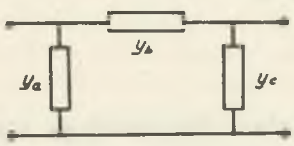
$$\left[\sum_{i=1}^{n} \arg(s+\delta_{2i-1}) - \sum_{i=1}^{n'} \arg(s+\delta_{2i}) - \arg s\right]_{s=\alpha+j\beta} = \pm 2k\pi, \qquad (8)$$

gdzie

$k = 1,2 \ldots\ldots$

δ_{2i-1} – zera $y_{11}^{(4)}$

δ_{2i} – bieguny $y_{11}^{(4)}$



Rys. 3

Spełnienie zależności (8) można uzyskać przez przesunięcie jednego wybranego zera funkcji $y_{11}^{(4)}$ przy niezmienionym położeniu reszty zer i biegunów.
Takie przesunięcie zera jest możliwe [2]. Jest ono równoznaczne z przesunięciem zera $y_{11}^{(1)}$.

Suma wyrażeń odejmowanych we wzorze (7) od admitancji $y_{11}^{(1)}$ jest funkcją realizowaną jako admitancja dwójnika RC i przedstawia gałąź y_a czwórnika pokazanego na rys. 3.

Rozpatrzmy funkcję

$$z_{11}^{(4)} = \frac{1}{y_{11}^{(4)}},$$

która posiada bieguny w punktach

$$s_1 = \alpha + j\beta$$

$$s_2 = \alpha - j\beta$$

$$s_3 = -\delta_a$$

$$s_4 = -\delta_b.$$

Oznaczmy residua funkcji $Z_{11}^{(4)}$ w punktach s_1, s_2, s_3 i s_4 odpowiednio przez: $\delta_1 + j\delta_2$, $\delta_1 - j\delta_2$, k_a i k_b.

Od $Z_{11}^{(4)}$ odejmujemy

$$Z_b = \frac{\delta_1+j\delta_2}{s-\alpha-j\beta} + \frac{\delta_1-j\delta_2}{s-\alpha+j\beta} + \frac{k_a}{s+\sigma_a} + \frac{k_b}{s+\sigma_b}.$$

$Z_b = \frac{1}{y_b}$ przedstawia szeregową gałąź czwórnika (rys. 3).

Równocześnie należy zaznaczyć, że funkcja Z_b nie jest realizowalna jako impedancja dwójnika RC.

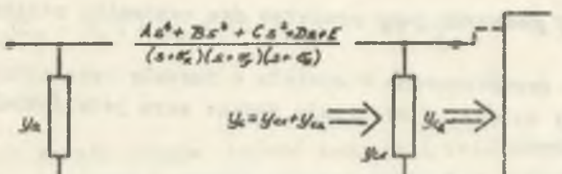
Pozostaje do rozpatrzenia funkcja

$$Z_{11}^{(5)} = Z_{11}^{(4)} - Z_b$$

Odpowiada ona gałęzi $y_0 = \frac{1}{Z_{11}^{(5)}}$ czwórnika z rys. 3.

Ponieważ odłączenie "więcej niż bieguna" powoduje powstanie co najwyżej jednej pary zer sprzężonych, można stwierdzić [2], że $Z_{11}^{(5)}$ jest realizowalna jako impedancja dwójnika RC jeżeli tylko $\gamma_6 k_6 < y_{11}^{(3)}(\infty)$. Dalsze zera funkcji y_{12} realizujemy tą samą metodą rozdzielająo odpowiednio y_0 na ramię pionowe czwórnika i admitancję wejśoiową następnej sekcji.

W ten sposób otrzymaliśmy czwórnik typu Π, nierealizowalny jako układ RC (rys. 4).



Rys. 4

gdzie

$$A = k$$

$$B = k(\sigma_a + \sigma_b - 2\alpha)$$

$$C = k\left[\sigma_a\sigma_b - 2\alpha(\sigma_a+\sigma_b) + \alpha^2 + \beta^2\right]$$

$$D = k\left[(\sigma_a+\sigma_b)(\alpha^2+\beta^2) - 2\alpha\sigma_a\sigma_b\right]$$

$$E = k(\alpha^2+\beta^2)\sigma_a\sigma_b.$$

Nierealizowalną sekcję typu Π zastępujemy realizowalnym pasywnym ozwórnikiem RC.
Jest to możliwe wtedy, gdy wszystkie funkcje reprezentujące admitancje gałęzi ozwórnika typu Π pokazanego na rys. 4 posiadają te same bieguny.
Konsekwencją tego są dodatkowe warunki

$$\left.\begin{aligned} Z_b(-\sigma_2) &= 0 \\ Z_b(-\sigma_4) &= 0 \\ Z_b(-\sigma_6) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

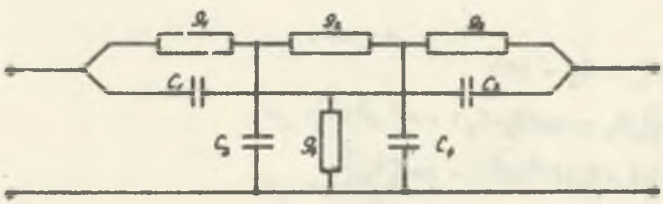
Z (9) wynikają następujące zależności na σ_2, σ_4 i σ_6

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5 &= \frac{2\left[\delta_1(\sigma_a+\sigma_b)+\delta_2\beta-\delta_1\alpha-\alpha(k_a+k_b)\right]+k_a\sigma_b+k_b\sigma_a}{2\delta_1+k_a+k_b} \\ \sigma_2\sigma_4+\sigma_2\sigma_6+\sigma_4\sigma_6 &= \frac{2\left[\delta_1\sigma_a\sigma_b-\alpha(k_a\sigma_b+k_b\sigma_a)+(\delta_2\beta-\delta_1\alpha)(\sigma_a+\sigma_b)\right]+(\alpha^2+\beta^2)(k_a+k_b)}{2\delta_1+k_a+k_b} \\ \sigma_2\sigma_4\sigma_6 &= \frac{(\alpha^2+\beta^2)(k_a\sigma_b+k_b\sigma_a)+2(\delta_2\beta-\delta_1\alpha)\sigma_a\sigma_b}{2\delta_1+k_a+k_b} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Na rys. 4 i 5 pokazano jako przykład dwa ozwórniki realizujące zadany parametr y_{12}.
Czwórniki te skonstruowano w oparciu o formułę topologiczną (1). Czwórnik przedstawiony na rys. 5 realizuje żądane zera jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$A = C_1\, C_2\, C_3\, C_4$$

$$B = C_1\, C_2\left[C_3(g_2+g_3) + C_4(g_1+g_2)\right]$$

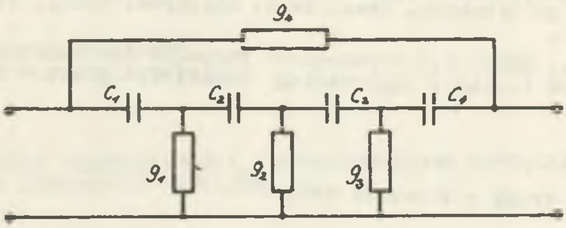


Rys. 5

$$C = C_1 C_2 \left[g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_1 g_3\right]$$

$$D = g_1 g_2 g_3 (C_1 + C_2)$$

$$E = g_1 g_2 g_3 g_4.$$



Rys. 6

Natomiast układ pokazany na rys. 6 realizuje te same zera, gdy spełnione są następujące zależności

$$A = C_1 C_2 C_3 C_4$$

$$B = g_4 (C_1 C_2 C_3 + C_1 C_2 C_4 + C_1 C_3 C_4 + C_2 C_3 C_4)$$

$$C = g_4 \left[g_1 (C_2 C_3 + C_3 C_4 + C_2 C_4) + g_2 (C_1 C_4 + C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_2 C_4)\right] +$$

$$+ g_4 g_3 (C_2 C_3 + C_1 C_2 + C_1 C_3)$$

$$D = g_4 \left[g_1 g_2 (C_3 + C_4) + g_2 g_3 (C_1 + C_2) + g_1 g_3 (C_2 + C_3)\right]$$

$$E = g_1 g_2 g_3 g_4.$$

Otrzymane w ten sposób sekcje zerowe pozwalają realizować żądaną parę zer sprzężonych, leżących w prawej półpłaszczyźnie w sektorze określonym przy pomocy nierówności:

$$|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{4}.$$

LITERATURA

1. DASHER B.J.: Synthesis of RC Transfer Funotions as Unbalanoed Two Terminal - pair Networks. I.R.E. Trans. Cirouit Theory, December, 1954, vol. CT-1, No.4, pp.20-34.
2. HAKIMI S.L., SESHU S.: Realization of Complex Zeros of Transmission by Means of RC Networks. Proc. Natl. Eleotron. Conf., 1957, No 13,' pp. 1013-1025.
3. MAYEDA W., SESHU S.: Topologioal Formulas for Network Funotions. University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin No. 446. 1957.

Przyjęto do druku w styozniu 1972 r.

РЕАЛИЗАЦИЯ НУЛЕЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИИ В ИЗБРАННЫМ СЕКТОРЕ ПРАВОЙ S-ПОЛУПЛОСКОСТИ

Р е з ю м е

Здесь обсуждается проблему реализации нулей передаточных функции в правой s-полуплоскости.

Введение нулевых секции четвертой степени позволило на реализацию нулей в секторе правой s - полуплоскости определённым при помощи неравенства:

$$|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{4}$$

REALIZATION OF COMPLEX ZEROS OF TRANSMISSION IN A SELECTED SECTOR OF THE RIGHT HALF PLANE

S u m m a r y

The report deals with the problems of realization of complex zeros of transmission in the right half plane. The fourth degree passive RC seotions are introduoed to realize zeros in a seotor of the right half plane defined by

$$|\arg s| \geqslant \frac{\pi}{4}$$