

Jerzy Nowak  
Wyższa Szkoła Pedagogiczna  
w Rzeszowie  
Katedra Technologii

## UWAGA W ZWIĄZKU Z TWIERDZENIEM VAN DER PAUW

**Streszczenie.** W artykule zwraca się uwagę na fakt, że znane w pomiarach rezystywności elementów cienkowarstwowych twierdzenie Van der Pauw może być stosowane tylko w odniesieniu do obszarów ograniczonych krzywą gładką. Na przykładzie prostokąta wykazuje się, że omawiane twierdzenie pozostaje słuszne tylko w takim przypadku, gdy elektrody zlokalizowane są w narożach prostokąta.

W pozycji [1] została przedstawiona metoda pomiaru rezystywności warstw cienkich, która stanowi jeden z wariantów metody czteroelektrodowej znanej już wcześniej w technice pomiarów rezystywności gruntów. Istota omawianej metody została ujęta w formie twierdzenia, w myśl którego w przypadku rozmieszczenia elektrod zarówno prądowych, jak i napięciowych na brzegu jednorodnej próbki o jednolitej grubości i dowolnego kształtu oraz przy dwukrotnym pomiarze prądu i napięcia z kolejną zmianą ról elektrod (rys. 1) zachodzi następująca relacja:

$$\exp(-\sqrt{\rho} R_{AB,CD} \frac{d}{g}) + \exp(-\sqrt{\rho} R_{BC,DA} \frac{d}{g}) = 1, \quad (1)$$

gdzie

$$R_{AB,CD} = \frac{U_{CD}}{I_{AB}} - \text{rezystancja otrzymana w wyniku pomiaru 1}$$

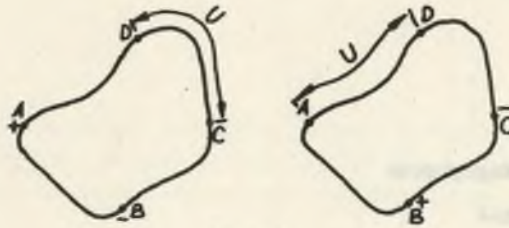
$$R_{BC,DA} = \frac{U_{DA}}{I_{BC}} - \text{rezystancja otrzymana w wyniku pomiaru 2,}$$

$d$  - grubość warstwy (próbki),

$g$  - rezystywność materiału próbki.

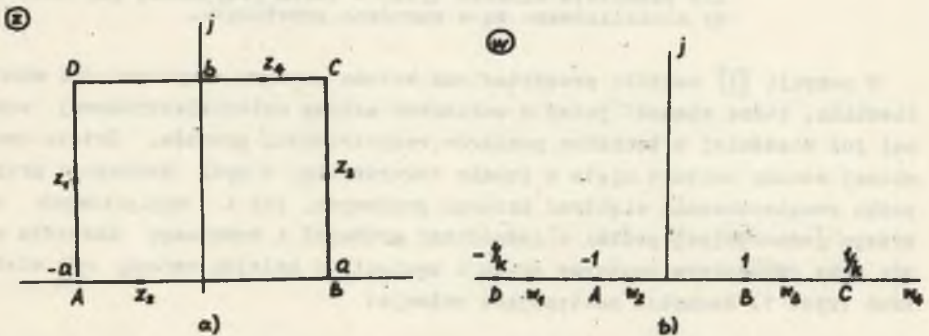
Dokonując obu pomiarów przy tej samej wartości jednostkowej prądu, wartości rezystancji będą proporcjonalne do wartości zmierzonych napięć. Rozwiązując równanie (1) otrzyma się wartość rezystywności badanej próbki.

W związku z przytoczonym twierdzeniem oraz w konfrontacji z praktyką produkcji rezystorów cienkowarstwowych, które przeważnie wykonuje się jako prostokątne lub kawałkami prostokątne [2] należy wprowadzić pewne uzu-



Rys. 1

pełnienie do założeń omawianego twierdzenia. W tym celu określimy rezystywności prostokątnego elementu cienkowarstwowego, na brzegu którego zostały rozmieszczone styki czterech elektrod - dwóch prądowych i dwóch napięciowych (rys. 2), po uprzednim zbadaniu rozkładu potencjału w obszarze powiedzmy "z" tegoż elementu. Korzystając z warunków płaskorównoległości pola, zastosujemy metodę odwzorowań konforemnych.



Rys. 2

Za pomocą funkcji eliptycznej zmiennej zespolonej

$$w = \operatorname{sn} \lambda z, \tag{2}$$

gdzie

$$\lambda = \frac{K}{a} = \frac{K'}{b}$$

odwzorujemy obszar "z" prostokąta na półpłaszczyznę  $\operatorname{Im}(w) \geq 0$  (rys. 2b). W wyniku tego punkty  $z_k$  odpowiadające stykom elektrod prądowych przejdą w punkty brzegowe  $w_k$  obszaru "w". Jak łatwo wykazać, wyrażenie na potencjał zespolony w pewnym punkcie w tego obszaru, pochodzący od prądów  $+I$  (wpływający) oraz  $-I$  (wypływający) ma postać:

$$W = A \ln \frac{w - w_k^-}{w - w_k^+} + C. \tag{3}$$

Ponieważ natężenie pola w próbce:

$$\vec{E} = -j\vec{W}' = \frac{A}{|w - w_k|} \cdot e^{j\theta}$$

a jego moduł

$$E = \frac{A}{|w - w_k|}$$

więc obliczona w oparciu o twierdzenie Gaussa w postaci zespolonej, zgodnie z którym

$$I = \frac{1}{g} \operatorname{Re} \oint_1 W'(w) dw$$

stała A wynosi

$$A = \frac{I g}{\pi d} \tag{4}$$

Założmy, że elektrody prądowe rozmieszczone są w punktach:

$$z^{(+)} = z_1 \quad \text{i} \quad z^{(-)} = z_2$$

Różnicę potencjałów między punktami 3 i 4 w obszarze "w" określa zatem wyrażenie:

$$U_{34} = W_3 - W_4 = \frac{I_{12} g}{\pi d} \ln \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \cdot \frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} \tag{5}$$

lub

$$U_{34} = \frac{I_{12} g}{\pi d} \ln \frac{\operatorname{sn} \lambda z_3 - \operatorname{sn} \lambda z_2}{\operatorname{sn} \lambda z_3 - \operatorname{sn} \lambda z_1} \cdot \frac{\operatorname{sn} \lambda z_4 - \operatorname{sn} \lambda z_1}{\operatorname{sn} \lambda z_4 - \operatorname{sn} \lambda z_2}$$

Jak wynika choćby z rys. 2b, wyrażenie (5) jest już właściwie funkcją zmiennej rzeczywistej. W tym wypadku zmienną tą jest moduł k funkcji eliptycznej oraz moduł dopełniający k'. Nie umniejszając ogólności rozważań przyjmijmy, że punkty odpowiadające stykom elektrod w obszarze "z" mają współrzędne:

$$z_1 = -a + j \frac{b}{2}, \quad z_2 = -\frac{a}{2}, \quad z_3 = a + j \frac{b}{2}, \quad z_4 = \frac{a}{2} + jb \tag{6}$$

W wyniku odwzorowania punkty te przechodzą odpowiednio w punkty obszaru "w" o współrzędnych:

$$w_1 = \operatorname{sn} \left( -K + j \frac{K'}{2} \right) = -\frac{\sqrt{k}}{k}; \quad w_2 = \operatorname{sn} \left( -\frac{K}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{1+k'}} \tag{7}$$

$$w_3 = \operatorname{sn} \left( K + j \frac{K'}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad w_4 = \operatorname{sn} \left( \frac{K}{2} + jK' \right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości (7) do równania (5), otrzymamy:

$$U_{34} = \frac{I_{12} g}{\pi d} \ln \frac{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}{\sqrt{k'} (\sqrt{1+k'} + \sqrt{k}) (\sqrt{1-k'} + \sqrt{k})}. \quad (8)$$

Stąd rezystancja:

$$R_{12,34} = \frac{g}{\pi d} \ln \frac{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}{\sqrt{k'} (\sqrt{1+k'} + \sqrt{k}) (\sqrt{1-k'} + \sqrt{k})}. \quad (9)$$

Po zamianie elektrod miejscami, tak że

$$z^{(+)} = z_2 \quad \text{i} \quad z^{(-)} = z_3,$$

określamy w sposób analogiczny różnicę potencjałów między punktami  $z_1$  i  $z_4$  oraz wynikającą z niej rezystancję. Otrzymamy odpowiednio:

$$U_{14} = \frac{I_{23} g}{\pi d} \ln \frac{\sqrt{k} (\sqrt{1+k'} - \sqrt{k}) (\sqrt{k-1} - \sqrt{k'})}{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}, \quad (10)$$

$$R_{23,14} = \frac{g}{\pi d} \ln \frac{\sqrt{k} (\sqrt{1+k'} - \sqrt{k}) (\sqrt{k-1} - \sqrt{k'})}{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}. \quad (11)$$

Z kolei przekształcamy wyrażenia (9) i (10) do postaci wykładniczej:

$$\exp \left( - \frac{\pi d}{g} R_{12,34} \right) = \frac{\sqrt{k} (\sqrt{1+k'} + \sqrt{k}) (\sqrt{1-k'} + \sqrt{k})}{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}, \quad (12)$$

$$\exp \left( - \frac{\pi d}{g} R_{23,14} \right) = \frac{2k (\sqrt{1+k'} + \sqrt{1-k'})}{k (\sqrt{1+k'} - \sqrt{k}) (\sqrt{k-1} - \sqrt{k'})}. \quad (13)$$

Suma dwóch ostatnich równań nie równa się 1 tak jak w równaniu (1), lecz jest funkcją modułu  $k$  całki eliptycznej:

$$\exp \left( - \frac{\pi d}{g} R_{12,34} \right) + \exp \left( - \frac{\pi d}{g} R_{23,14} \right) = f(k) \quad (14)$$

W tym przypadku będzie ona równa jedności przy  $k \approx 0,2837$  lub  $k \approx 2,5510$ .

Okazuje się natomiast, że w przypadku lokalizacji elektrod w narożach prostokąta, tzn. gdy  $w^{(+)} = w_A = -1$  i  $w^{(-)} = w_B = 1$ , różnica potencjałów między punktami D i C oraz wynikająca z niej rezystancja wynoszą:

$$U_{DC} = \frac{I_{AB} g}{\pi d} \ln \frac{(1+k)^2}{(1-k)^2}, \quad (15)$$

$$R_{AB,DC} = \frac{g}{\pi d} \ln \frac{(1+k)^2}{(1-k)^2}.$$



Po zamianie miejscami punktów pomiarowych, tzn. gdy  $w^{(+)} = w_B = 1$  i  $w^{(-)} = w_C = \frac{1}{k}$ , mamy:

$$U_{DA} = \frac{I_{BC} g}{\pi d} \ln \frac{(1+k)^2}{4k}$$

$$R_{BC,DA} = \frac{g}{\pi d} \ln \frac{(1+k)^2}{4k}.$$

W tym wypadku suma odwrotności wyrażeń pod znakiem logarytmu w (15) i (16) wynosi 1 i równość Van der Pauw jest spełniona. Gdy ponadto badana próbka jest kwadratem, to wartości rezystancji otrzymane z obu pomiarów są sobie równe i równanie (1) upraszcza się do postaci:

$$2 \exp \left( - \frac{\pi d}{g} R \right) = 1. \quad (17)$$

Z powyższych rozważań wynika, że wynikająca z metody (lub twierdzenia) Van der Pauw równość pozostaje słuszna, jedynie w odniesieniu do elementów cienkowarstwowych ograniczonych krzywą gładką oraz w przypadku elementów prostokątnych pod warunkiem jednak, że elektrody pomiarowe są zlokalizowane w narożach próbki.

#### LITERATURA

1. Van der Pauw L.J.: "A Method of Measuring Specific Resistivity and Hall Effect of Discs of Arbitrary Shape" - Philips Research Reports, 1958: 13
2. Martiuszow K.J., Zajcev J.B., Tichonow A.J.: "Metody rasčeta resistorow". Izd. "Energia", Moskwa 1971.
3. Oberhettinger F., Magnus W.: "Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice". Wyd. PWN, Warszawa 1963.

#### ОТМЕТКА О ТЕОРЕМЕ ВАН ДЕР ПАУВА

#### Резюме

В настоящей статье обращается внимание на то, что хорошо известная в измерениях удельного сопротивления тонких пленок теорема Ван дер Паува может применяться только в таких случаях, когда область пленки ограничена гладкой кривой. На примере прямоугольника доказывается, что выше упомянутая теорема применима только тогда, когда электроды помещены в его вершинах.

## NOTICE ABOUT VAN DER PAUW THEOREME

## S u m m a r y

In the presented paper, the author calls attention to the fact that well known in sheet resistivity measurements Van der Pauws theorem is applicable only to the areas which are limited by the regular curve. It is proved on the example of a rectangle that mentioned above theorem is true only in the case when elektrodas are located in rectangle corners.