

Jerzy Nowak

Wyższa Szkoła Pedagogiczna
w Rzeszowie
Katedra Technologii

ZASTOSOWANIE METODY CZTEROELEKTRODOWEJ DO POMIARÓW KONDUKTYWNOŚCI ELEKTROLITÓW W WANNIE ELEKTROLITYCZNEJ

Streszczenie. Treścią niniejszego artykułu są wyprowadzenia charakterystyk funkcjonalnych układów czterech elektrod w zastosowaniu do pomiarów konduktywności elektrolitów bezpośrednio w wannach elektrolitycznych w zależności od ich kształtu oraz sposobu rozmieszczenia elektrod. Zastosowano w tym celu metodę odwzorowań konforemnych oraz potencjału zespolonego.

1. Wstęp

Jednym z zastosowań wanny elektrolitycznej jako modelu matematycznego pola elektromagnetycznego jest możliwość analizowania za jej pomocą wyników pomiarów rezystywności gruntów w zależności od wzajemnych odległości między elektrodami, sposobu ich rozmieszczenia, wymiarów elektrod itp. W praktyce wspomnianych pomiarów znane są dwie metody: pomiar rezystywności za pomocą sondy prętowej [1], której pewna wersja została opracowana przez G. Weyla [2] pod kątem stosowalności w badaniach geofizycznych oraz dużo starsza od niej, czteroelektrodowa metoda F. Wennera. Ponieważ w trakcie analizy wyników pomiarów rezystywności gruntu za pomocą wanny elektrolitycznej wymagana jest znajomość konduktywności elektrolitu, która jednak zmienna jest w zależności od różnych czynników, dlatego też najwygodniej jest mierzyć ją bezpośrednio w wannie elektrolitycznej, stosując do tego celu metodę czteroelektrodową, której dodatkową zaletą jest to, że unika się wpływu na wynik pomiaru polaryzacji elektrod prądowych. Za pomocą tych elektrod bowiem wzbudza się w elektrolicie pole przepływowe, a dwie pozostałe elektrody - napięciowe, służą do pomiaru różnicy potencjałów między dwoma dowolnymi punktami pola. Jako elektrolitu używa się zwykle wodnego roztworu soli. Obliczona jednak na podstawie zmierzonych wartości prądu i napięcia rezystancja zależy od rozmieszczenia elektrod oraz od konduktywności elektrolitu. Zależność tą będzie się określać mianem charakterystyki funkcjonalnej przez analogię do podobnej zależności jaka występuje w miernictwie rezystywności oporników warstwowych.

W przypadku, gdy elektrolit jest jednorodny (jednowartościowy), to wzbudzone w nim pole przepływowo spełnia równanie Laplace'a [3], [5]:

$$\nabla^2 U = 0.$$

Ponieważ na ogół wanny elektrolityczne wykonuje się ze szkła organicznego [4], zatem przez zanurzenie elektrod na całkowitą głębokość można spowodować, że wzbudzone w elektrolicie pole będzie polem dwuwymiarowym. Z warunku brzegowego dla wektora gęstości prądu

$$\frac{j_{1t}}{j_{2t}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

wynika, że wektor gęstości prądu jest normalny do powierzchni elektrod, szczególnie gdy przewodność ich wielokrotnie przewyższa przewodność elektrolitu. Powierzchnia elektrod jest więc powierzchnią ekwipotencjalną [5].

Wykorzystując możliwość uzyskania w elektrolicie, w sposób wyżej opisanego pola dwuwymiarowego, charakterystykę funkcjonalną układu elektrod można określić przy zastosowaniu metody odwzorowań konforemnych oraz potencjału zespolonego. Niżej wyprowadza się wspomniane charakterystyki oraz odpowiednie wzory potrzebne do obliczenia konduktywności elektrolitu dla dwóch przypadków rozmieszczenia elektrod pomiarowych w wannie prostokątnej oraz dla jednego przypadku w wannie o podstawie w kształcie kwadratu.

2. Wanna o podstawie prostokątnej

Niech rys. 1 przedstawia rzut poziomy wanny elektrolitycznej a punkty E, F, G i H będą śladami elektrod, odpowiednio - prądowych i napięciowych. Za pomocą funkcji

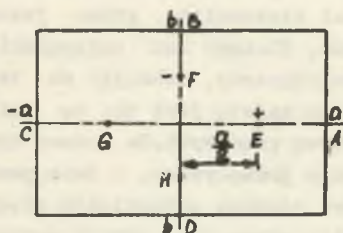
$$\omega = \frac{\operatorname{sn} 2\lambda z}{1 + \operatorname{cn} 2\lambda z} \quad (1)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{K}{2a} = \frac{K'}{2b}$$

obszar "z" prostokąta odwzorowuje się na obszar "ω" koła jednostkowego, przy czym punkty o współrzędnych:

$$z_E = \frac{a}{2}, \quad z_F = j \frac{b}{2}, \quad z_G = -\frac{a}{2}, \quad z_H = -j \frac{b}{2}$$



Rys. 1

przechodzą w obszarze "ω" w punkty o współrzędnych:

$$\omega_E = \frac{1}{\sqrt{1+k'} + \sqrt{k'}}; \quad \omega_F = \frac{1}{\sqrt{1+k'} + \sqrt{k'}} \quad (2)$$

$$\omega_G = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2} + \sqrt{k}}; \quad \omega_H = -\frac{j}{\sqrt{1+k^2} + \sqrt{k}}$$

gdzie

k - moduł funkcji eliptycznej sn λ z,

k' - moduł dopełniający.

Następnie obszar " ω " koła jednostkowego odwzorowujemy w półpłaszczyznę $\text{Im}(w) \geq 0$ obszaru " w " za pomocą funkcji:

$$w = j \frac{1-\omega}{1+\omega} \quad (3)$$

W celu określenia różnicy potencjałów między punktami umieszczenia elektrod napięciowych zastosujemy z kolei metodę odbicia zwierciadlanego w obszarze " w " względem osi rzeczywistej oraz odpowiednie wyrażenie potencjału zespolonego, które dla jednej elektrody prądowej ma postać:

$$W = \frac{I}{2\pi\sigma h} \ln \frac{w - \bar{w}_0}{w - w_0} + C, \quad (4)$$

gdzie

I - natężenie prądu,

σ - konduktywność,

h - poziom elektrolitu w wannie,

w_0 - punkt odpowiadający położeniu elektrody prądowej,

C - stała addytywna.

Ponieważ dalsze przekształcenia będą prowadzić do określenia różnicy potencjałów i człony wynikające z uwzględnienia stałej upraszczają się, zatem stałą tą będzie się pomijać. Różnicę potencjałów, w tym wypadku między punktami H i G , określimy jako:

$$U_{HG} = (\text{Re } (W_H - W_G)) = \frac{I}{2\pi\sigma h} \ln |w|. \quad (5)$$

Potencjał zespolony w punkcie H obliczymy jako wynik superpozycji potencjałów pochodzących od elektrod prądowych umieszczonych w punktach E i F :

$$W_H = \frac{I_{EF}}{2\pi\sigma h} \ln \frac{(w_H - \bar{w}_E)(w_H - w_F)}{(w_H - w_E)(w_H - \bar{w}_F)}. \quad (6)$$

Podobnie, potencjał w punkcie G :

$$W_G = \frac{I_{EF}}{2\pi\sigma h} \ln \frac{(w_G - \bar{w}_E)(w_G - w_F)}{(w_G - w_E)(w_G - \bar{w}_F)}. \quad (7)$$

Różnica określonych w ten sposób potencjałów zespolonych wynosi:

$$W_H - W_G = \frac{I_{EF}}{2\pi\sigma h} \ln \frac{(w_H - \bar{w}_E)(w_H - w_F)(w_G - w_E)(w_G - \bar{w}_F)}{(w_H - \bar{w}_F)(w_H - w_E)(w_G - \bar{w}_E)(w_G - w_F)}. \quad (8) \quad [$$

Podstawiając do ostatniego wyrażenia funkcję (3), otrzymamy:

$$\varphi_H - \varphi_G = A \ln \frac{(1 - \omega_H \bar{\omega}_E) (\omega_F - \omega_H) (1 - \omega_G \bar{\omega}_F) (\omega_E - \omega_G)}{(1 - \omega_H \bar{\omega}_F) (\omega_E - \omega_H) (\omega_G - \omega_G \bar{\omega}_E) (\omega_F - \omega_G)}, \quad (9)$$

gdzie

$$A = \frac{I_{EF}}{2\pi\sigma h}.$$

Z kolei do (9) podstawiamy odpowiednie wyrażenia (2), przyjmując w celu uproszczenia zapisu wzoru, oznaczenia:

$$\omega_E = \sqrt{A}, \quad \omega_F = jB, \quad \omega_G = -A, \quad \omega_H = -jB \quad (10)$$

i następnie w myśl określenia (5) wyznaczamy różnicę potencjałów między punktami H i G. Wynikająca z niej charakterystyka funkcjonalna określona jest wzorem:

$$R_{HG,EF} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln \frac{4AB (1 + A^2 B^2)}{(1 + A^2) (1 + B^2) (A^2 + B^2)} \quad (11)$$

Stąd konduktywność

$$\sigma = \frac{I_{EF}}{U_{HG}} = \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{4AB (1 + A^2 B^2)}{(1 + A^2) (1 + B^2) (A^2 + B^2)}. \quad (12)$$

Moduł k oblicza się po uprzednim wyznaczeniu q z wyrażenia:

$$\ln q = -\pi \frac{K'}{K}, \quad [7]$$

gdzie

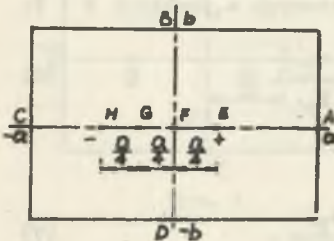
$$\frac{K'}{K} = \frac{b}{a}.$$

W przypadku rozmieszczenia elektrod jak na rys. 2 odpowiedni wzór na konduktywność elektrolitu ma postać:

$$\sigma = \frac{I_{EH}}{U_{FG}} = \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{2B(AB - 1)}{A (1 + A^2) (A - B)} \quad (13)$$

gdzie

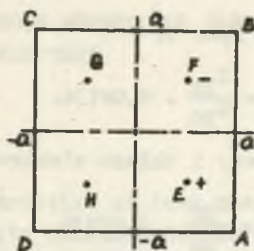
$$B = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{1+k'} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'} + \sqrt{k'(1+k')}} + \frac{\sqrt{k'(1+k')} + \sqrt{k'}}{\sqrt{k'(1+k')} + \sqrt{1+k'}}}, \quad (14)$$



Rys. 2

3. Wanna o podstawie kwadratowej

W przypadku wanny o podstawie kwadratowej i konfiguracji elektrod jak na rys. 3, na podstawie wyrażenia funkcji odwzorowującej obszar kwadratu "z" na obszar koła "w":



Rys. 3

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sn} \left(\frac{K}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{a} \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{K}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z}{a} \right)} \quad (15)$$

określamy współrzędne śladów elektrod w obszarze " ω ";

$$\omega_E = \frac{1}{\sqrt{2k'(1+k')}} = A; \quad F = \frac{1}{\sqrt{2k'(1+k')}} = jA;$$

$$\omega_G = -\frac{1}{\sqrt{2k'(1+k')}} = -A; \quad H = -\frac{1}{\sqrt{2k'(1+k')}} = -jA,$$

gdzie

$$k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Powtarzając jak w p. 2 operację odwzorowania koła jednostkowego w obszarze " ω " na półpłaszczyznę $\operatorname{Im}(\omega) \geq 0$ w obszarze " w ", a następnie wyrażając różnicę potencjałów zespolonych w tym obszarze przez współrzędne z obszaru " ω " i w końcu podstawiając do tak otrzymanego wyrażenia odpowiednie wartości (16), otrzymamy następujący wzór określający charakterystykę funkcjonalną:

$$R_{HG,EF} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln \frac{2(1+A^4)}{(1+A^2)^2}. \quad (17)$$

Wynikającą stąd konduktywność oblicza się według wyrażenia:

$$\sigma = \frac{I_{EF}}{U_{HG}} = \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{2(1+A^4)}{(1+A^2)^2}. \quad (18)$$

4.

Obliczenia numeryczne stałych odpowiednich charakterystyk funkcjonalnych dla wanny prostokątnej o wymiarach 60 x 40 cm i poziomie elektrolitu $h = 10$ cm dały następujące wartości:

- dla układu elektrod jak na rys. 1:

$$\sigma = \frac{I_{EF}}{U_{HG}} = 0,003481$$

- dla układu elektrod jak na rys. 2:

$$\gamma = \frac{I_{EH}}{U_{FG}} \cdot 0,04134.$$

Natomiast dla wanny kwadratowej i układu elektrod jak na rys. 3:

$$\gamma = \frac{I_{EF}}{U_{HG}} \cdot 0,00936.$$

LITERATURA

1. Chvatal J.: "Měrný odpor půdy a jeho měření" - "Energetika", c. 6, 1970
2. Weyl F.G.: "Das Tripol-Feld zur Messung des Erdwiderstandes", ATM, 12, 1970.
3. Waysenhoff J.: "Zasady elektromagnetyki i optyki klasycznej", Wyd. PWN Warszawa 1959.
4. Jodko E.A., Szklar W.S.: "Modelirovaniye tieplowych processow w metalurgii". Izd. "Metalurgia", Moskwa 1967.
5. Szimoni K.: "Teoretičeskaja elektrotehnika". Izd. Mir, Moskwa, 1964.
6. Moretti G.: "Funktions of a Complex Variable", Prentice - Hall, Inc. NY, 1964.
7. Oberhettlinger P., Magnus W.: "Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice". Wyd. PWN, Warszawa, 1963.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОДНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КОНДУКТИВНОСТИ ЭЛЕКТРОЛИТОВ В ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЕ

Резюме

В статье предлагается применять при измерениях удельной проводимости электролитов в электролитических ваннах, служащих для анализа результатов измерений удельного сопротивления земли, четырехэлектродный метод. В связи с этим выводятся, на основе метода конформных отображений, соответствующие формулы пригодные для определения упомянутой проводимости в зависимости от формы ванны и расположения электродов.

APPLICATION OF FOUR-ELECTRODE METHOD FOR ELECTROLYTE CONDUCTIVITY MEASUREMENTS IN ELECTROLYTIC TANK

S u m m a r y

The functional characteristics of four-electrode arrangement, applied for electrolyte conductivity measurements in electrolytic baths, are derived in this paper. The electrodes shape and lay-out is taken into consideration. The conformal mappings and compound potential method is used.