ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 37 Nr kol. 356

Magdalena Umińska-Bortliczek

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O PEWNYM RACHUNKU OPERATOROWYM DLA NIELINIOWYCH RÓWNAŃ DYNAMIKI

Streszczenie. W pracy przedstawiono pewien nowy komplet operacji w dziedzinie nieliniowych równań dynamiki nazwany transformacją Cauchy-Taylor - Cauchy'ego.

A. Stosowany powszechnie w elektrotechnice rachunek operatorowy oparty o transformację Laplace'a dotyczy w zasadzie równań różniczkowych liniowych. Zastosowaniem rachunku operatorowego do pewnych szczególnych nieliniowych równań dynamiki zajmował się P. Nowacki [1]. Problematyka ta podjęta została przez autorkę w pracy [2]. Korzystając z wyników uzyskanych w [2] można mianowicie twierdzić, że równanie różniczkowe nieliniowe (dalej rrn) jest transformowalne wg Laplace'a wraz z rozwiązaniami i wszystkimi jego kolejnymi przybliżeniami, jeżeli posiada postać następującą:

$$f_L(x,\dot{x},\ldots\overset{(N)}{x}) + f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x}) = f(t), \tag{1}$$

gdzie

t - zmienna niezależna, czas

f(t) - zastępcza funkcja wymuszająca typu wykładniczego, rzędu pierwszego

$f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x})$ - nieliniowa część rrn rzędu co najwyżej (N-1) spełniająca zmodyfikowany warunek Lipschitza [5] oraz

$$\left. f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x}) \right|_{x=x_0} \leqslant Me^{qt} \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0$$

przy M, q rzeczywistych

$f_L(x,\dot{x},\ldots\overset{(N)}{x})$ - liniowa część rrn dowolnego N rzędu pochodnej

x (t) - szukane rozwiązanie.

W dalszym ciągu przedstawiona zostanie pewna nowa transformacja całkowa, nazwana przez autorkę transformacją Cauchy-Taylor-Cauchy'ego [5]. Zastosowanie transformacji Cauchy-Taylor-Cauchy'ego do rrn typu (1) z nieliniowościami wielomianowymi pozwala zestawić w postaci tablic słownik transformacji, umożliwiający poszukiwanie rozwiązania drogą rekurencyjną. Stanowi to istotną zaletę omawianej metody.

B. Przyjmując ograniczenia i własności rrn (1) takie jak dla metody splotowej [3] [4] oraz zakładając podział naturalny rrn przy najwyższej pochodnej liniowej, równanie to możemy przepisać w postaci następującej:

$$x(t) = A(t)$$
$$A(t) = f(t) - f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N)}{x}) - f_L(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x}) \tag{2}$$

gdzie

$x(t)$ – zmienna zależna zmiennej rzeczywistej t

$f(t)$ – jednowartościowa, ciągła ograniczona funkcja wymuszająca klasy C^{∞}, typu wykładniczego, w szczególności liniowa kombinacja funkcji typu wykładniczego;

$f_L(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x},\overset{(N)}{x})$ – liniowa część rrn (1) lub (2), o współczynnikach stałych N-tego rzędu pochodnej, posiadająca znane własności w sensie odpowiedzi ipulsowej:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{B_r} Y(s)\, e^{st}\, ds = O(e^{\alpha t}); \quad t \geqslant 0 \quad \alpha \text{ rzeczywiste;}$$

$f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x})$ – funkcjonał zaburzenia; w szczególności są to nieliniowości typu wielomianowego [4],

$A(t)$ – zmodyfikowana wymuszająca funkcja stanu będąca funkcją analityczną zmiennej rzeczywistej t w związku z czym współczynników jej można poszukiwać drogą rekurencyjną.

Zgodnie z powyższym rozwiązaniem rrn (2) jest:

$$x(t) = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t \int_0^t}_{\text{N-krotnie}} A(t)\, dt \tag{3}$$

W oparciu o zasadę Riemanna-Schwartza[x)] można teraz twierdzić, że istnieje operacja Cauchy'ego, która jest:

x) Zasada Riemanna-Schwartza mówi, że: jeżeli w części wspólnej dwóch obszarów w naszym przypadku jest to półoś rzeczywista funkcja $x(t)$ oraz $W(\lambda)$ są identyczne, wówczas funkcje te określają w obszarze $X \cup \Lambda$ jedną funkcję analityczną.

1^o operacją przedłużenia analitycznego rozwiązania rrn typu (2) z dziedziny rzeczywistej X do dziedziny zespolonej Λ poprzez półoś rzeczywistą t,

2^o transformacją addytywną i jednorodną wszystkich własności rrn typu (2) z dziedziny X do Λ.

Napiszemy zatem:

$$T_C\left\{f(t) = f_L(x,\dot{x},\ldots\overset{(N)}{x}) + f_N(x,\dot{x},\ldots\overset{(N-1)}{x})\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F(\lambda) = F_L(w,\ldots\overset{(N)}{w}) + F_N(w,\dot{s},\ldots\overset{(N-1)}{w}) \tag{4}$$

gdzie

t		- zmienna rzeczywista
x(t)	$\in$	- X
λ		- zmienna zespolona
$w(\lambda)$	$\in$	Λ
$w(\lambda)$		- funkcja analityczna zmiennej zespolonej a także ostateczna postać poszukiwanego rozwiązania rrn (2) w dziedzinie Λ
$F(\lambda)$		- obraz funkcji wymuszającej w dziedzinie Λ

$F_L(w(\lambda),\dot{w}(\lambda)\ldots\overset{(N)}{w}(\lambda))$ - obraz części liniowej rrn (1) w dziedzinie Λ

$F_N(w(\lambda),\dot{w}(\lambda),\ldots\overset{(N-1)}{w})$ - obraz części nieliniowej rrn (1) w dziedzinie Λ

Wykorzystując własności przedstawionej operacji zajmiemy się teraz rrn zmiennej zespolonej:

$$F(\lambda) = F_L(w(\lambda),\dot{w}(\lambda),\ldots\overset{(N)}{w}(\lambda)) + F_N(w(\lambda),\dot{w}(\lambda),\ldots\overset{(N-1)}{w}(\lambda)) \tag{5}$$

przekształconym do postaci:

$$\overset{(N)}{w}(\lambda) = A(\lambda)$$
$$A(\lambda) = F(\lambda) - F_N(w,\dot{w},\ldots\overset{(N-1)}{w}) - F_L(w,\ldots\overset{(N-1)}{w}), \tag{6}$$

gdzie

$A(\lambda)$ - zespolona zmodyfikowana funkcja stanu, której własności pozwala ją założyć, że:

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,N}\lambda^n \tag{7}$$

Pokażemy z kolei, że zachodzi:

$$\left[A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,N}\, \lambda^{n}\right] n!\, \lambda^{-(m+1)}$$

$$\frac{n!}{2\pi j} \oint_{C} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{C} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} w_{n,N}\, \lambda^{n}}{\lambda^{m+1}}\, d\lambda$$

$$= \delta_{n,m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} n!\; w_{nN}\right], \tag{8}$$

gdzie

$\delta_{n,m}$ **– delta Kronecker'a.**

Równocześnie:

$$A^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{n!}{2\pi j} \oint_{C} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda \tag{9}$$

Porównując wyrażenia (8) i (9) otrzymujemy:

$$A^{(N)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = w_{n,N} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda \tag{10}$$

Ponieważ zachodzi także:

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = A(0) = \overset{(N)}{W}(0) \tag{11}$$

$$\lim_{n \to 0} w_{n,N} = w_{0N} \tag{12}$$

oraz

$$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \overset{(N)}{W}(\lambda) = \lim_{n \to 0} w_{n,N}, \tag{13}$$

to

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,N}\, \lambda^{n}$$

jest szeregiem Taylora jednostajnie zbieżnym wewnątrz $K\left\{0, |\lambda| < 1\right\}$ dla funkcji będącej N-tą pochodną rozwiązania.

Następujące wyrażenia stanowią zatem parę transformacyjną transformacji Taylora-Cauchy ego:

$$T_{TC}\left\{\overset{(N)}{W(\lambda)}\right\} = w_{n,N} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\overset{(N)}{W(\lambda)}}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda \qquad (14)$$

$$T_{TC}^{-1}\left\{w_{n,N}\right\} = W^{(N)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,N}\,\lambda^n \qquad (15)$$

Łącząc operację przedłużenia analitycznego w sensie Cauchy'ego (4) z parą transformacyjną Taylora-Cauchy'ego (14) (15) uzyskujemy pewien komplet operacji, który w dalszym ciągu nazywać będziemy transformacją Cauchy-Taylor-Cauchy'ego.

C. Własności rrn w sensie transformacji Cauchy-Taylor-Cauchy'ego zbadano w pracy [5]. W pracy tej obliczono transformaty typowych funkcji wymuszających i typowych składników rrn oraz zestawiono tablice transformat przy generalnym założeniu niezerowych warunków początkowych. Tablice te zostały przytoczone (tablice transformat CTC). Omówioną metodę ilustruje poniższy przykład.

D. Przykład.

Dany jest szeregowy dwójnik R,L,C z nieliniową pojemnością $C_n(q)$. Należy określić odpowiedź dwójnika na wymuszenie typu wykładniczego. W rozpatrywanym układzie przy założeniu zerowych warunków początkowych obowiązuje równanie:

$$R\,\dot{q}(t) + L\,\ddot{q}(t) + u_c(q) = e(t) \qquad (16)$$

Kładąc arbitralnie:

$$u_C(q) = \left(\frac{1}{C_o} + \frac{1}{C_1}\, q\right) q$$

$$\frac{R}{L} = a$$

$$\frac{1}{C_o L} = b$$

$$\frac{1}{C_1 L} = C$$

$$\frac{1}{L}\, e(t) = f(t)$$

oraz podstawiając

$$q(t) = x(t)$$

otrzymujemy dla $t \geqslant 0$ następujące rrn rzędu drugiego:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^2 = f(t) \qquad (17)$$

Równanie (17) jest transformowalne według Cauchy'ego - por. (4) [3] - z dziedziny rzeczywistej X do dziedziny zespolonej Λ :

$$\ddot{W}(\lambda) + a\,\dot{W}(\lambda) + bW(\lambda) + c\,\overset{2}{W(\lambda)} = F(\lambda) \qquad (18)$$

$$\ddot{W}(\lambda) = F(\lambda) - c\,W^2(\lambda) - bW(\lambda) - a\,\dot{W}(\lambda) \qquad (19)$$

Korzystając z tablic transformat (tablice CTC) obliczamy kolejno:

$$\ddot{W}(\lambda) = w_{n,2}$$

$$F(\lambda) = f_n$$

$$a\dot{W}(\lambda) = a\,\frac{w_{n-1,2}}{n} + a\,\delta_{n,1}$$

$$bW(\lambda) = \frac{bw_{n-2,2}}{n(n-1)} + b\,\delta_{n,1}$$

$$cW^2(\lambda) = c\left[\sum_{z=o}^{n-4} \frac{w_z}{(z+1)\ (z+2)} \cdot \frac{w_{n-4-z}}{(n-4-z+1)\ (n-4-z+2)}\right] +$$

$$= c\left[\sum_{q=1}^{2} \sum_{z=o}^{2-q} \frac{W^{2-q-z}(o)}{(2-q-z)!}\,\delta_{n,2-q}\right] +$$

$$+ c\binom{2}{1}\left[\sum_{z=o}^{\infty} \frac{w_{n-2-z}}{(n-2-z+1)(n-2-z+2)}\right]\left[\sum_{z=o}^{2-q} \frac{W^{2-q-z}(o)}{(2-q-z)!}\right]$$

Współczynniki $w_{n,2}$ rozwinięcia Taylora dla drugiej pochodnej poszukiwanego rozwiązania obliczamy według równania rekurencyjnego ułożonego na podstawie definicji (14):

$$w_{n,2} = (-1)^n\,\frac{4^n}{n!} - 2\,(-1)^n\,\frac{3^n}{n!} - 2\,\frac{w_{n-1}}{n} - \frac{\dot{W}(o)}{1!}\,\delta_{n,1} +$$

$$- \frac{w_{n-2}}{n(n-1)} - \frac{\dot{W}(o)}{1!}\,\delta_{n,1} - W(o)\,\delta_{n,o} +$$

$$- \sum_{z=o}^{n-4} \frac{w_z}{(z+1)(z+2)} \cdot \frac{w_{n-4-z}}{(n-4-z+1)\ (n-z-4+2)} +$$

$$-\binom{2}{1}\frac{w_{n-4}}{(n-3)(n-2)}\left[\frac{W(o)}{1!} + W(o)\right] - \frac{W(o)}{1!}\,\delta_{n,o} - \frac{W(o)}{o!}\,\delta_{n,1} \qquad (20)$$

Dalsze obliczenia przeprowadzimy dla następujących danych:

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

$$f(t) = c^{-4t} - 2\, e^{-2t} \tag{21}$$

$$\dot{x}(o) = +1$$

$$x(o) = 0$$

Podstawiając (21) do (20) otrzymujemy:

$$w_{0,2} = -3$$

$$w_{1,2} + +7$$

$$w_{2,2} = -15/2!$$

$$w_{3,2} = +31/3!$$

$$w_{4,2} = -155/4!$$

$$w_{5,2} = +311/5!$$

Dokonując z kolei na równaniu (20) transformacji odwrotnej według definicji (15) otrzymujemy:

$$\ddot{W}(\lambda) = -3 - 7\lambda - \frac{15}{2!}\lambda^2 + \frac{31}{3!}\lambda^3 - \frac{155}{4!}\lambda^4 + \frac{311}{5!}\lambda^5 + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(2^{n+2}-1)\lambda^n + \ldots \tag{22}$$

stąd:

$$\ddot{W}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(2^{n+2}-1)\lambda^n \tag{23}$$

$$W(\lambda) = \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda} \ddot{W}(\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n!}(2^n-1)\lambda^n \tag{24}$$

Powracając do dziedziny rzeczywistej X wg Cauchy'ego oraz uwzględniając że $x = q$ otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(2-1)\, t^n = -e^{-2t} - e^{-t} \tag{25}$$

Wobec czego prądowa odpowiedź układu szeregowego R,L,C z zadaną nieliniowością jest następująca:

$$i(t) = \dot{q}(t) = 2\,e^{-2t} + e^{-t} \tag{26}$$

LITERATURA

1. Nowacki P.: Die Behandlung von Nichtlinearen Problemen in in Regulungstechnik. Warszawa 1957.
2. Umińska-Bortliczek M.: O własnościach transformacyjnych pewnego typu równań różniczkowych nieliniowych. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. Elektryka z. 22, 1967.
3. Umińska-Bortliczek M.: O pewnej operacji w dziedzinie równań różniczkowych nieliniowych. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. Elektryka z. 36, 1972.
4. Umińska-Bortliczek M.: O metodzie splotowej poszukiwania odpowiedzi zastępczych dwójników nieliniowych. Zeszyty Naukowe Pol.Śl. Elektryka z. 36, 1972 r.
5. Umińska-Bortliczek M.: Transformacja Cauchy-Taylor-Cauchy ego i jej zastosowanie do badania stabilności pewnych nieliniowych układów elektrycznych. Praca doktorska, Gliwice 1971.

О НЕКОТОРОМ ОПЕРАТОРНОМ ИСЧИСЛЕНИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Р е з ю м е

В работе представлена некоторая новая система преобразований в области нелинейных уравнений динамики, названная преобразованием Коши-Тейлёр-Коши

ON CERTAIN OPERATOR CALCULUS FOR NONLINEAR DYNAMIC EQUATIONS

S u m m a r y

In the paper a certain new complete of operations for nonlinear dynamic equations is given. The complete is called Cauchy-Taylor-Cauchy transformation.

TABLICA TRANSFORMAT „CTC"

	$f(t)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{f^{(m)}(t)}{m!}\right]_{t=0} t^n$	$C\{f(t)\} = F(\lambda)$	$TC\{F(\lambda)\} = f_n$
1	e^{-at}	$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{a^m}{m!} t^m$	$e^{-a\lambda}$	$(-1)^n \frac{a^n}{n!}$
2	A^{-at}	$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{(a\ln A)^m}{m!} t^m$	$Ae^{-a\lambda}$	$(-1)^n \frac{(a\ln A)^n}{n!}$
3	$\sin\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{(\omega)^{2m+1}}{(2m+1)!} t^{2m+1}$	$\sin\omega\lambda$	$(-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4	$e^{-at}\sin\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s \frac{\omega^{2s+1}}{(2s+1)!}\frac{(-1)^{m-s}a^{m-s}}{(n-s)!} t^m$	$e^{-a\lambda}\sin\omega\lambda$	$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \frac{\omega^{2s+1}}{(2s+1)!}(-1)^{n-s}\frac{a^{n-s}}{(n-s)!}$
5	$\cos\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m)!} t^{2m}$	$\cos\omega\lambda$	$(-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!}$
6	$e^{-at}\cos\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s \frac{\omega^{2s}}{(2s)!}\frac{(-1)^{m-s}a^{m-s}}{(m-s)!} t^m$	$e^{-a\lambda}\cos\omega\lambda$	$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s \frac{\omega^{2s}}{(2s)!}(-1)^{n-s}\frac{a^{n-s}}{(n-s)!}$
7	$\mathrm{tg}\,\omega t$	$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2^{2m}(2^{2m}-1)B_m}{(2m)!} t^{2m-1}$	$\mathrm{tg}\,\omega\lambda$	$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n^{*)}}{(2n)!}$ *) B_n - liczba Bernoulliego
8	$\mathrm{arc\,tg}(\omega t)$	$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\omega^{2m+1}}{(2m+1)} t^{2m+1}$	$\mathrm{arc\,tg}(\omega\lambda)$	$(-1)^n \frac{\omega^{2n-1}}{(2m+1)}$
9	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^{2m+1}}{(2m+1)!} t^{2m+1}$	$\mathrm{sh}\,\omega\lambda$	$\frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!}$
10	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega^{2m}}{(2m)!} t^{2m}$	$\mathrm{ch}\,\omega\lambda$	$\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}$
11	$\frac{1}{1-at}$	$\sum_{m=0}^{\infty} a^m t^m$	$\frac{1}{1-a\lambda}$	a^n ; $\lvert a\lambda\rvert < 1$
12	$D\{1(t)\}$	$\sum_{m=0}^{\infty} t^m = 1(m)$		$1(n)$

TABLICA TRANSFORMAT „CTC".

1	2	3	4	5
13	$\sin(\omega t+\alpha)$	$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sin(\alpha+\frac{m\pi}{2})]}{m!} t^{m}$	$\sin(\omega\lambda+\alpha)$	$(\pm 1)\frac{\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)}{n!}$
14	$e^{-at}\sin(\omega t+\alpha)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}(\pm 1)\frac{\sin(\alpha+\frac{s\pi}{2})}{s!}(-1)^{m-s}\frac{a^{m-s}}{(m-s)!}t^{m-s}$	$e^{-a\lambda}\sin(\omega\lambda+\alpha)$	$\sum_{s=0}^{n}(\pm 1)\frac{\sin(\alpha+\frac{n\pi}{2})}{n!}\frac{a^{n-s}}{(n-s)!}(-1)^{n-s}$
15	$\cos(\omega t+\alpha)$	$\sum_{m=0}^{\infty}(\pm 1)\frac{\cos(\alpha+\frac{m\pi}{2})}{m!}t^{m}$	$\cos(\omega\lambda+\alpha)$	$(\pm 1)\frac{\cos(\alpha+\frac{n\pi}{2})}{n!}$
16	$e^{-at}\cos(\omega t+\alpha)$	$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m}(\pm 1)\frac{\cos(\alpha+\frac{s\pi}{2})}{s!}(-1)^{m-s}\frac{a^{m-s}}{(m-s)!}t^{m-s}$	$e^{-a\lambda}\cos(\omega\lambda+\alpha)$	$\sum_{s=0}^{n}(\pm 1)\frac{\cos(\alpha+\frac{s\pi}{2})}{n!}\frac{a^{n-s}}{(n-s)!}(-1)^{n-s}$
17	$x^{(k)}(t)$	$\sum_{m=0} N_{m,k}\, t^{m}$	$H^{(k)}(\lambda)$	$N_{n,k}$
18	$x^{(k-1)}$	△	$H^{(k-1)}(\lambda)$	$\frac{H_{n-1,k}}{n}+H^{(k-1)}(0)\,\delta_{n,0}$ (2.104)
19	$x^{(k-r)}$	△	$H^{(k-r)}(\lambda)$	$\frac{H_{n-r,k}}{(n-r+1)(n-r+2)\cdots(n)}+\sum_{q=1}^{q=r}\frac{H^{(k-q)}(0)}{(r-q)!}\delta_{n,q}$ (2.107)
20	$x(t)$	△	$H(\lambda)$	$\frac{H_{(n-k),k}}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}+\sum_{q=1}^{q=k}\frac{H^{(k-q)}(0)}{(k-q)!}\delta_{n,q}$
21	$[x^{(k-r)}(t)]^{p\geq 2}$	△	$[H^{(k-r)}(\lambda)]^{p}$	$\sum \cdots \sum_{s=0}^{t}\frac{H_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{H_{n-pr-z,k}}{(n-pr-z+1)\cdots(n-pr-z+r)}+\sum_{q=1}^{r}\left[\sum\cdots\sum_{s=0}^{t}\frac{H^{(k-r-q)}(0)}{s!}\cdots\frac{H^{(k-q-(p-1))}(0)}{[(r-q)-(p-1)]!}\right]\delta_{n,q}+$ $\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}\left[\sum\cdots\sum_{s=0}^{t}\frac{H_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{H_{n-(p-i)r-z,k}}{(n-(p-i)r-z+1)\cdots(n-(p-i)r-z+r)}\right]\left[\sum\cdots\sum_{s=0}^{t}\frac{H^{(k-r-q)}(0)}{s!}\cdots\frac{H^{(k-q-z)}(0)}{[(r-q)-(i-1)]!}\right]$ (2.106)
22	$[x(t)]^{p\geq 2}$	△	$[H(\lambda)]^{p}$	UWAGA: PODSTAWIĆ k=r; KOLEJNO W WYRAŻENIU (21)(2.106) PODSTAWIĆ W MIEJSCE r→k (2.107)
23	$[x^{(k-r_1)}(t)][x^{(k-r_2)}(t)]$	△	$[H^{(k-r_1)}(\lambda)][H^{(k-r_2)}(\lambda)]$	$\sum_{s=0}^{n-k-r_1}\frac{H_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r_1)}\cdot\frac{H_{n-r_1-r_2-s,k}}{(n-r_1-r_2-s+1)\cdots(n-r_1-r_2-s+r_2)}+\sum_{q=1}^{r_1}\frac{H^{(k-q)}(0)}{(r_1-q)!}\cdot\frac{H_{n-r_1-r_2+q,k}}{(n-r_1-r_2+q+1)\cdots(n-r_1-r_2+q+r_2)}+$ $\sum_{q=1}^{r_2}\frac{H^{(k-q)}(0)}{(r_2-q)!}\cdot\frac{H_{n-r_1-r_2+q,k}}{(n-r_1-r_2+q+1)\cdots(n-r_1-r_2+q+r_1)}+\sum_{q=1}^{r_1}\sum_{q=1}^{r_2}\frac{H^{(k-q)}(0)}{(r_1-q)!}\cdot\frac{H^{(k-q)}(0)}{(r_2-q)!}\delta_{n,(r_1+r_2-2q)}$

TABLICA TRANSFORMAT „CTC”

1	2	3	4	5
24	$[x^{(n-r_1)}(t)][x^{(n-r_2)}(t)]^p$	≐	$W^{(n-r_1)}(\lambda)[W^{(n-r_2)}(\lambda)]^p$	$\sum_{s=s}^{n-r_1-pr_2}\cdots\sum_{s=0}^{k}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r_2)}\cdots\frac{W_{n-pr_2-r_1-z,k}}{(n-r_1-pr_2-z+1)\cdots(n-r_1-pr_2-z+r_2)}\Big]\frac{W_{n-r_1-pr_2,k}}{(n-pr_2-r_1+1)\cdots(n-r_1-pr_2+r_1)}+\sum_{q=1}^{r_1}\sum_{q=1}^{r_2}\frac{W^{(k-q)}(0)}{(r_1-q)!}\Big[\sum_{z=p-q+0}^{r_2-q}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W^{(k-r_2-s)}(0)}{s!}\cdots\frac{W^{(k-q-(p-1)s)}}{[(r-q)-(p-1)]!}\Big]\delta_{n,(r_1+r_2-2q)}+$
				$+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}\Big[\sum_{s=0}^{n-r_1-(p-i)}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r_2)}\cdots\frac{W_{n-r_1-(p-1)r_2-z,k}}{(n-r_1-(p-1)r_2-z+1)\cdots(n-r_1-(p-1)r_2-z+r_2)}\Big]\frac{W_{n-r_1-(p-1)r_2,k}}{(n-r_1-(p-1)r_2+1)\cdots(n-r_1-(p-1)r_2+r_1)}\Big]\Big[\sum_{z=(i-1)+q}^{r_2-q}\frac{W^{(k-q)}(0)}{(r_2-q)!}+\sum_{z=(i-1)+0}^{r_2-q}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W^{(k-r_2-s)}(0)}{s!}\cdots\frac{W^{(k-q-z)}(0)}{[(r-q)-(i-1)]!}$
25	$t^m x^{(n-r)}(t)$	≐	$\lambda^m W^{(n-r)}(\lambda)$	$\frac{W_{n-m-r,k}}{(n-m-r+1)(n-m-r+2)\cdots(n-m)}+\sum_{q=1}^{r}\frac{W^{(k-q)}(0)}{(r-q)!}\delta_{n,m+r-q}$
26	$t^m[x^{(n-r)}(t)]^p$	≐	$\lambda^m[W^{(n-r)}(\lambda)]^p$	$\sum_{s=s}^{n-m-pr}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{W_{n-m-pr-z}}{(n-m-pr-z+1)\cdots(n-m-pr-z+r)}+\sum_{q=1}^{r}\frac{W^{(k-q)}(0)}{(r-q)!}\delta_{n,m+r-q}+$
				$+\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}\Big[\sum_{s=0}^{n-m-(p-i)r}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{W_{n-m-(p-1)r-z,k}}{(n-m-(p-1)r-z+1)\cdots(n-m-(p-1)r-z+r)}\Big]\sum_{q=1}^{r}\frac{W^{(k-q)}(0)}{(r-q)!}$
27	$e^{-at}x^{(n-r)}(t)$		$e^{-a\lambda}W^{(n-r)}(\lambda)$	$\sum_{m=0}^{n-r}(-1)^m\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{W_{n-m-r,k}}{(n-m-r+1)(n-m-r+2)\cdots(n-m)}+\sum_{m=0}^{n-r+q}\sum_{q=1}^{r}\frac{W^{(k-q)}}{(r-q)!}(-1)^m\frac{a^m}{m!}\delta_{n,m+r-q}$
28	$e^{-at}[x^{(n-r)}(t)]^p$	≐	$e^{-a\lambda}[W^{(n-r)}(\lambda)]^p$	$\sum_{m=0}^{n-pr}(-1)^m\frac{a^m}{m!}\Big[\sum_{z=0}^{n-pr}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{W_{n-pr-z,k}}{(n-pr-z+1)(n-pr-z+2)\cdots(n-pr-z+r)}\Big]+\sum_{m=0}^{n-r+q}(-1)^m\frac{a^m}{m!}\sum_{q=1}^{r}\Big[\sum_{z=(p-1)+q}^{r-q}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W^{(k-r-s)}(0)}{s!}\cdots\frac{W^{(k-q-(p-1)s)}(0)}{[(r-q)-(p-1)]!}\Big]\delta_{n,m+r-q}+$
				$+\sum_{m=0}^{n-(p-i)r+1}(-1)^m\frac{a^m}{m!}\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{q=1}^{r}\binom{p}{i}\Big[\sum_{z=0}^{n-(p-i)r}\cdots\sum_{s=0}^{z}\frac{W_{s,k}}{(s+1)(s+2)\cdots(s+r)}\cdots\frac{W_{n-(p-1)r-z,k}}{(n-(p-1)r-z+1)\cdots(n-(p-1)r-z+r)}\Big]\Big[\sum_{z=(i-1)+q}^{r-q}\sum_{s=0}^{z}\frac{W^{(k-r-s)}(0)}{s!}\cdots\frac{W^{(k-q-(i-1)s)}(0)}{[(r-q)-(i-1)]!}\Big]$

UWAGA!

1. TRANSFORMATY (25)(26)(27) i (28) DOTYCZĄ CZŁONÓW RÓWNAŃ O PARAMETRACH ZMIENNYCH W CZASIE DLA KTÓRYCH TAKŻE MOŻNA STOSOWAĆ „CTC”.

2. WSZYSTKIE PODANE TRANSFORMATY MAJĄ POSTAĆ ZNACZNIE UPROSZCZONĄ DLA PRZYPADKÓW $W^{(k-n)}=0$