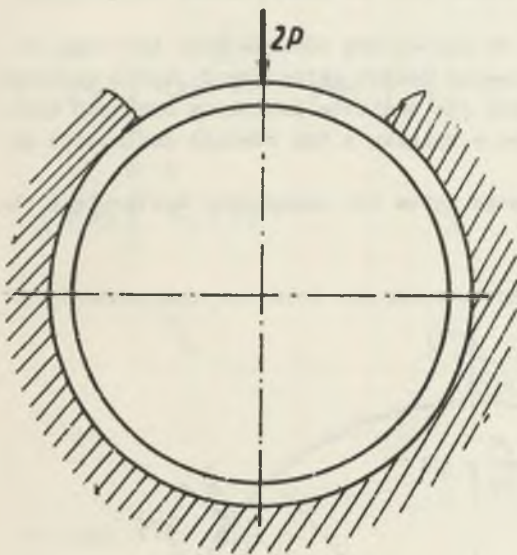


Walery Szuścik

Jan Bąk

OKREŚLENIE PODPORNOCI METALOWEJ OBUDOWY KOŁOWEJ  
Z ŁUKÓW SZTYWNYCH OBCIĄŻONEJ SIŁAMI SKUPIONYMI

**Streszczenie:** W pracy przeprowadzono analizę wytrzymałościową metalowej obudowy kołowej sztywnej dla określenia podporności przy obciążeniu siłami skupionymi. Uzyskano podporności dopuszczalne obudowy dla górotworu nieodkształcalnego, które porównano z podpornościami dopuszczalnymi łuków wolnostojących. Obie podporności są granicznymi wartościami podporności dopuszczalnej obudowy łukowej kołowej sztywnej przy dowolnej podatności górotworu.



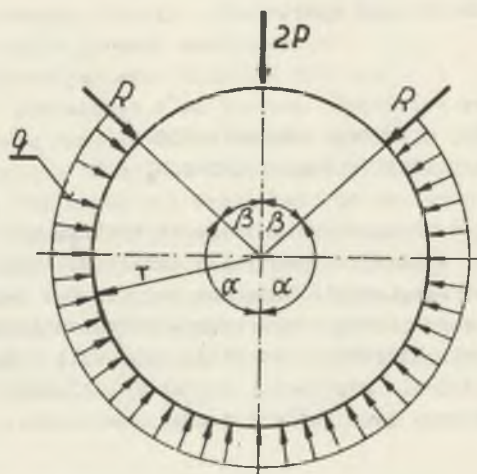
Rys. 1

### 1. Wstęp

W związku ze schodzeniem z eksploatacją górniczą na coraz większe głębokości poważnym problemem staje się utrzymanie wyrobisk kapitalnych. Jedną z obudów, która może rozwiązać ten problem jest obudowa metalowa kołowa sztywna. Wobec braku metod obliczeń tej obudowy w niniejszej pracy przedstawiono analizę wytrzymałościową obudowy stalowej sztywnej obciążonej siłą skupioną  $2P$  (rys. 1).

### 2. Analiza wytrzymałościowa obudowy stalowej sztywnej

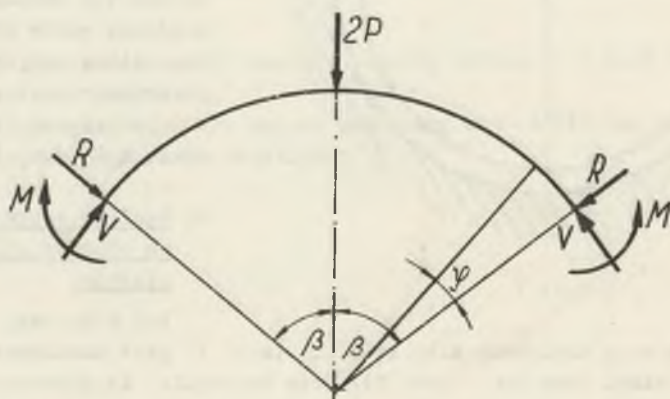
Łuk metalowej obudowy kołowej sztywnej obciążony siłą skupioną (rys. 1) jest dociskany do górotworu na odcinku łuku  $2\alpha$  (rys. 2). Przy założeniu, że górotwór jest nieodkształcalny, na odcinku  $2\alpha$  nie nastąpi zmiana promienia krzywizny łuku. W związku z tym, w tej części łuku moment zginający nie wystąpi ( $M=0$ ), a reakcja górotworu  $q$  musi być stała. W łuku na odcinku  $2\alpha$  wystąpi jedy-



Rys. 2

nie siła podłużna  $N_2 = V = q \cdot r$ . Na pozostałym odcinku łuku kołowego  $2\beta$  wystąpią trzy siły wewnętrzne, to znaczy moment zginający  $M_{g1}$ , siła poprzeczna  $T_1$  i podłużna  $N_1$ . W miejscu styku obu odcinków łuku mogą wystąpić nadto reakcje (siły skupione)  $R$ , które w związku z tym również zaznaczono na rys. 2.

Dla wycinka łuku kołowego określonego kątem  $2\beta$  zaznaczono występujące siły wewnętrzne (rys. 3).



Rys. 3

Dla tego elementu można napisać warunek równowagi,

$$0 = P + R \cdot \cos \beta - V \sin \beta \quad (1)$$

oraz równania na siły wewnętrzne, które po wprowadzeniu zależności

$m = \frac{M}{r}$  mają postać:

$$\frac{1}{r} M_E = V (1 - \cos \varphi) + m - R \sin \varphi ,$$

$$N_1 = V \cos \varphi + R \sin \varphi , \quad (2)$$

$$T_1 = R \cos \varphi - V \sin \varphi ,$$

$$N_2 = V .$$

Energia sprężysta całego układu jest równa sumie energii wszystkich sił wewnętrznych działających na cały układ i wynosi:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{EJ} \int_0^\beta M_{g1}^2 r \, d\varphi + \frac{1}{2} \frac{1}{ES} \int_0^\beta N_1^2 r \, d\varphi + \frac{\beta_1}{2GS} \int_0^\beta T_1^2 r \, d\varphi + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{ES} \int_0^{\pi-\beta} N_2^2 r \, d\varphi .$$

Po podstawieniu wartości sił wewnętrznych i podstawieniu

$$C = \frac{r}{S r^2} \quad (4)$$

$$C_1 = \frac{\beta_1 JE}{GS r^2}$$

otrzymano:

$$\frac{2 EJ}{r^3}, U = \int_0^\beta [V(1 - \cos \varphi) + m - R \sin \varphi]^2 d\varphi + C \int_0^\beta [V \cos \varphi + \\ R \sin \varphi]^2 d\varphi + C_1 \int_0^\beta [R \cos \varphi - V \sin \varphi]^2 d\varphi + C \int_0^{\pi-\beta} V^2 d\varphi. \quad (5)$$

W równaniu na energię sprężystości układu niewiadoma  $\beta$  występuje w granicy całkowania, w związku z tym, przy szukaniu minimum energii sprężystości nie obojętna jest kolejność różniczkowania i całkowania. Dlatego też najpierw dokonano wyznaczenia energii sprężystej układu (całkowania). Korzystając z zależności wynikającej z równania (4) dla stosowanych na obudowę profili, że  $C_1 \cong 3 C$  oraz po podstawieniu  $R$  z równania (1) wzór na energię sprężystości ma postać:

$$\begin{aligned} \frac{2 E J}{r^3} U = V^2 \left( \frac{3}{2} \beta + \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{3}{2} \operatorname{tg} \beta \right) + m^2 \beta + 2 V \frac{P}{\cos \beta} (1 - \cos \beta + \\ - \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta) + \frac{P^2}{\cos^2 \beta} \left( \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta \right) + 2 V m (\beta - \operatorname{tg} \beta) + 2 m \frac{P}{\cos \beta} \cdot \beta \\ (1 - \cos \beta) + C \left[ V^2 (\pi + \beta + 2 \beta \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \beta) - 4 V P \frac{\beta}{\cos \beta} \operatorname{tg} \beta + \right. \\ \left. + \frac{P^2}{\cos^2 \beta} (2 \beta + \sin \beta \cos \beta) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

W równaniu tym występują trzy niewiadome:  $\beta$ ,  $m$ ,  $V$ .

Pochodna energii sprężystej całego układu podług sił wewnętrznych  $V$  i  $m$  zgodnie z twierdzeniem o minimum energii sprężystości musi być równa zero.

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial m} = 0 \quad (8)$$

Korzystając z tych zależności otrzymano równania:

$$\begin{aligned} \frac{m}{P} = \frac{V}{P} \frac{\frac{1}{2} \beta + \beta \cos^2 \beta - \frac{3}{2} \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta \cos \beta - \beta \cos^2 \beta} + \frac{\cos \beta - \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \beta \sin \beta}{\sin \beta \cos \beta - \beta \cos^2 \beta} + \\ + C \left[ \frac{V}{P} \frac{\pi \cos^2 \beta + \beta \cos^2 \beta + 2 \beta \sin^2 \beta - \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta \cos \beta - \beta \cos^2 \beta} + \frac{2 \beta \sin \beta}{\beta \cos^2 \beta - \sin \beta \cos \beta} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{m}{P} = \frac{V}{P} \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\beta \cos \beta} + \frac{\cos \beta - 1}{\beta \cos \beta} \quad (10)$$

Po porównaniu stronami wzorów (9) i (10) otrzymano:

$$\frac{V}{P} = \frac{\beta^2 \sin \beta + 2 \sin \beta \cos \beta - 2 \sin \beta + 4 C \beta^2 \sin \beta}{\beta^2 + \beta \sin \beta \cos \beta - 2 \sin^2 \beta + 2 C \beta \pi \cos^2 \beta + \cos^2 \beta + 2 \beta \sin^2 \beta - \sin \beta \cos \beta} \quad (11)$$

z którego po podstawieniu do (10) i przyrównaniu do zera otrzymano

$$C = \frac{(1 - \cos \beta) (\beta + \sin \beta) - \beta^2 \sin \beta}{2 \left[ (1 - \cos \beta) (\beta \cos \beta + \beta \cos \beta - \sin \beta) + 2\beta \sin \beta (\beta - \sin \beta) \right]} \quad (12)$$

Wykres funkcji (12) przedstawiono na rysunku 4.

Dla łuków o profilu G110 i S49 otrzymano wartości na stałą C, które zestawiono w tablicy 1. W tablicy tej podano również wielkości statyczne profilów [1].

Tablica 1

Profil łuku	Promień łuku r (cm)	C	I	S	W <sub>G</sub>
G 110	125	0,0011620	566,5	31,2	103
	150	0,0008069			
	175	0,0005928			
	200	0,0004539			
	225	0,0003586			
S 49	125	0,0018446	1815	62,97	241
	150	0,0012810			
	175	0,0009411			
	200	0,0007205			
	225	0,0005693			

Korzystając z wartości C z tablicy 1, z rysunku 4 odczytano wartości kąta  $\beta$  dla poszczególnych profilów i promieni. Podstawienie tych wartości do wzorów (1) oraz do wzoru wynikającego z równania (1)

$$\frac{R}{P} = \frac{V}{P} \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\cos \beta} \quad (13)$$

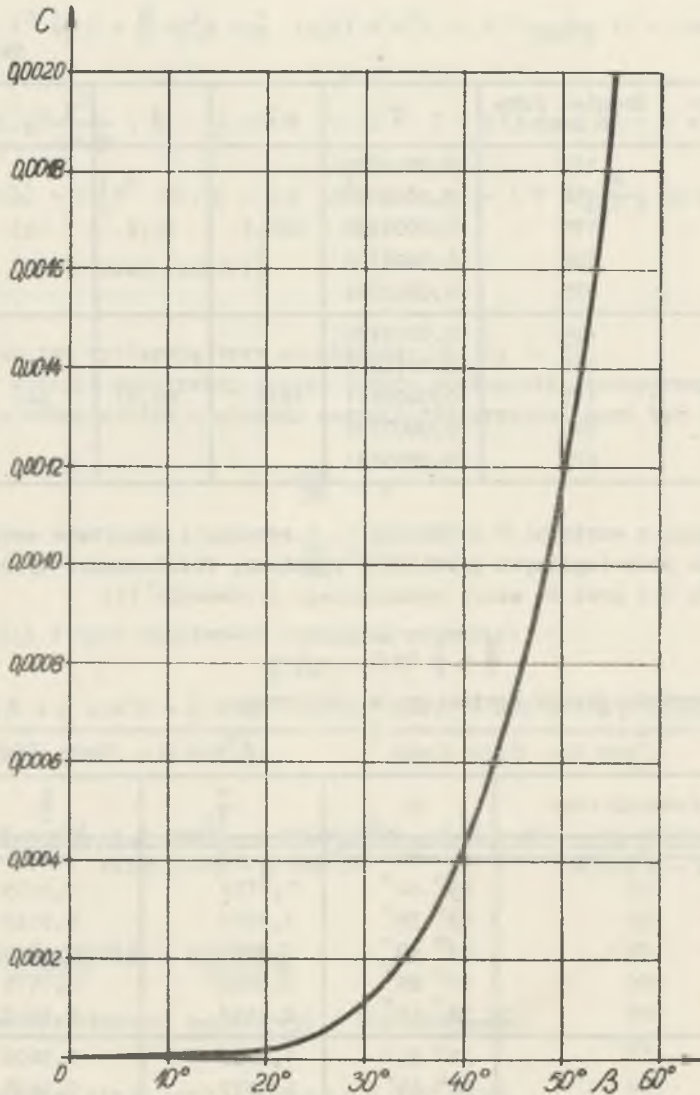
otrzymano wartości, które zestawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Profil	Promień łuku	$\beta$	$\frac{V}{P}$	$\frac{R}{P}$
1	2	3	4	5
G 110	125	49° 40'	1,7719	0,5419
	150	45° 30'	1,9076	0,5145
	175	42° 40'	1,9975	0,4811
	200	40° 20'	2,0884	0,4615
	225	38° 15'	2,1562	0,4262
	125	54° 40'	1,6233	0,5606
	150	50° 40'	1,7377	0,5428

od. tablicy 2

1	2	3	4	5
S 49	175	$47^{\circ} 10'$	1,8395	0,5133
	200	$44^{\circ} 30'$	1,9378	0,5024
	225	$42^{\circ} 15'$	2,0202	0,4841



Rys. 4

W celu wyznaczenia obciążenia dopuszczalnego wyznaczono naprężenia zredukowane:

$$\sigma = \frac{N_1}{S} + \frac{M_{g1}}{W_g} \leq k_r. \quad (14)$$

Po podstawieniu wartości  $N_1$  i  $M_{g1}$  ze wzorów (2) otrzymano największe naprężenia zredukowane w miejscu obciążenia siłą skupioną  $2P$  (rys. 3), gdzie

$$M_{g1} = r (V - V \cos \beta - R \sin \beta), \quad (15)$$

$$N_1 = R \sin \beta + V \cos \beta.$$

Przy analizie sprawdzono, że w wyniku działania siły poprzecznej  $T_1$  naprężenia zredukowane wewnątrz profilu są mniejsze od naprężeń zredukowanych na brzegu.

Dzieląc równania (15) przez  $P$  i podstawieniu do równania (14) po przekształceniach otrzymano ostatecznie wzór na dopuszczalne obciążenie.

$$\frac{P}{k_r} \leq \frac{1}{\frac{R}{P} \sin \beta + \frac{V}{P} \cos \beta + \frac{r(V - V \cos \beta - \frac{R}{P} \sin \beta)}{W_g}}. \quad (16)$$

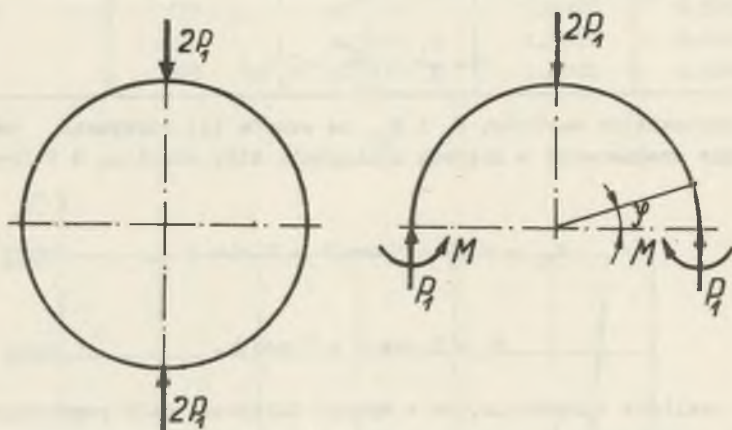
Wyznaczone wartości obciążenia dopuszczalnego dla profili  $G 110$  i  $S 49$  zestawiono w tabelicy 3.

Tabela 3

Profil	Promień łuku $r$	$\frac{P}{k_r}$
G 110	125	3,2544
	150	2,8477
	175	2,4882
	200	2,2492
	225	2,0058
S 49	125	7,1418
	150	6,2923
	175	5,5529
	200	5,0918
	225	4,6513

### 3. Analiza łuku wolnostojącego

Dla porównania podporności łuku obudowy sztywnej z obudową łukową wolnostojącą przeprowadzono podobne jak w punkcie 2 rozumowanie dla łuku wolnostojącego obciążonego siłą skupioną  $2P_1$  (rys. 5).



Rys. 5

Wartości sił wewnętrznych w dowolnym przekroju łuku wyniosą:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= P_1 \cos \varphi, \\ M_{g\varphi} &= P_1 r (1 - \cos \varphi) - M, \\ T_\varphi &= P_1 \sin \varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Moment zginający występuje tutaj na całym obwodzie łuku ze względu na zmianę promienia  $r$  w wyniku jego odkształcenia. Analogicznie jak w punkcie 2 równanie energii sprężystej ma postać:

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^\beta M_{g\varphi}^2 r \, d\varphi + \frac{1}{2ES} \int_0^\beta N_\varphi^2 r \, d\varphi + \frac{\beta_1}{2GS} \int_0^\beta T_\varphi^2 r \, d\varphi \quad (18)$$

przy czym  $\beta = \frac{\pi}{2}$

Po podstawieniu wartości sił wewnętrznych oraz

$$\begin{aligned} C &= \frac{I}{S r^2} \\ C_1 &= \frac{\beta_1 \cdot EI}{GS r^2} \end{aligned} \quad (19)$$

otrzymano

$$\frac{EI}{r^3} U = \int_0^\beta \frac{1}{r^2} [P_1 r (1 - \cos \varphi) - M]^2 \, d\varphi + C \int_0^\beta P_1^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi + C_1 \int_0^\beta P_1^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi. \quad (20)$$



Po scałkowaniu równania (20) skorzystano z twierdzenia o minimum energii sprężystej:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0, \quad (21)$$

czyli:

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 2M\beta - 2P_1\beta r + 2P_1r \sin\beta = 0, \quad (22)$$

skąd:

$$M = P_1r \left(1 - \frac{\sin\beta}{\beta}\right) \quad (23)$$

W związku z tym, że  $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$M = P_1r \left(1 - \frac{2}{\pi}\right). \quad (23)$$

Ze wzoru (17) wynika, że moment zginający  $Mg_\varphi$  osiąga wartość maksymalną dla  $\varphi = 90^\circ$  czyli:

$$Mg_{\max} = P_1r - M. \quad (24)$$

Po podstawieniu równania (23) otrzymamy:

$$Mg_{\max} = P_1r \frac{2}{\pi}. \quad (25)$$

Największe naprężenia zredukowane wystąpią w środku łuku

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{Mg}{Wg} \leq k_r \quad (26)$$

dla  $\varphi = 90^\circ$   $N = 0$

Po podstawieniu równania (25) wyznaczono wartość  $P_1$

$$\frac{P_1}{k_r} \leq \frac{I Wg}{2r}. \quad (27)$$

Również dla łuku wolnostojącego dla rozpatrywanych profili S 49 i G110 wyznaczono dopuszczalną wartość  $\frac{P_1}{k_r}$  (korzystając ze wzoru (27)) a wartości zestawiono w tablicy 4.

Tablica 4

Profil	Promień łuku r	Wg	$\frac{P_1}{k_r}$
1	2	3	4
	125	103	1,2945
	150	103	1,0786

od. tablicy 4

1	2	3	4
G 110	175	103	0,9245
	200	103	0,8090
	225	103	0,7191
S 49	125	241	3,0285
	150	241	2,5237
	175	241	2,1632
	200	241	1,8928
	225	241	1,6825

Dla porównania wyników uzyskanych w rozdziale drugim i trzecim zestawiono w tablicy 5 wartości  $\frac{P}{k_r P_1}$  dla obudowy współpracującej z nieodkształcalnym górotworem i wartości  $\frac{P_1}{k_r}$  uzyskane dla łuku wolnostojącego, oraz podano ich wzajemny stosunek  $m_p = \frac{P}{P_1}$ .

Tablica 5

Rodz. profilu	r	$\frac{P}{k_r}$ dla osławianej obudowy	$\frac{P_1}{k_r}$ dla łuku wolnost.	$m_p = \frac{P}{P_1}$
S 49	125	7,1418	3,0285	2,3582
	150	6,2923	2,5237	2,4933
	175	5,5529	2,1632	2,5670
	200	5,0918	1,8928	2,6901
	225	4,6513	1,6825	2,7645
G 110	125	3,2544	1,2943	2,5144
	150	2,8477	1,0786	2,6402
	175	2,4882	0,9245	2,6914
	200	2,2492	0,8090	2,7802
	225	2,0058	0,7191	2,7893

Jak wynika z tablicy 5 wartości  $m_p$  dla rozpatrywanych profili obudów zawarte są w granicach 2,36 do 2,79 i oznaczają krotność zwiększenia wytrzymałości obudowy poprzez idealne powiązanie jej z górotworem w stosunku do obudowy wolnostojącej. Podane w pracy [2] wartości  $m_p$  zawarte w granicach 5 do 10 znacznie odbiegają od wartości otrzymanych w niniejszej pracy.

## 5. Wnioski

1. W wyniku analizy współpracy obudowy kołowej sztywnej współpracującej z górotworem idealnie sztywnym otrzymano metodę obliczenia dopuszczalnego obciążenia (metodą na dopuszczalne naprężenie).

2. Dla łuków kołowych wykonanych z profilu S 49 i G 110 wyznaczono wartości dopuszczalnych obciążeń siłą skupioną.
3. Obciążenia dopuszczalne tej obudowy siłą skupioną są prawie odwrotnie proporcjonalne do promienia łuku obudowy.
4. Obciążenia dopuszczalne omawianej obudowy kołowej sztywnej w stosunku do łuku kołowego wolnostojącego są dla profilu S 49  $m_p = \frac{P}{P_1} = 2,36 \div 2,76$  a dla profilu G 110  $m_p = 2,51 \div 2,79$  razy większe.
5. Wartości obciążeń  $P_2$  dla każdej obudowy kołowej sztywnej pracującej w górotworze podatnym zawarte są w podanych niżej granicach:

$$P_1 \leq P_2 \leq P.$$

6. Uzyskane w pracy [2] wartości stosunku P do  $P_1$  równe  $m_p = 5 - 10$  są wynikiem niedokładnie przeprowadzonej analizy.

## 6. LITERATURA

- [1] M. Chudek - Obudowa wyrobisk. Katowice 1968 Wydawnictwo Śląsk.
- [2] M. Wypchol - Projektowanie łukowej obudowy korytarzowej z uwzględnieniem współpracy z górotworem. Budownictwo Górnicze 73. Materiały Konferencyjne.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ КРУГЛОЙ ЖЁСТКОЙ КРЕПИ НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

### Р е з ю м е:

В работе проводится анализ прочности металлической круглой жёсткой крепи для определения сопротивления при нагрузке сосредоточенными силами. Достигнуто допустимое сопротивление крепи для недеформируемых окружающих пород. Сопротивление сравнено с допустимыми сопротивлениями для срочных крепей, которые являются граничными величинами сопротивления допускаемой круглой жёсткой крепи при произвольной податливости окружающих пород.

## STRENGTH ANALYSIS OF METAL RIGID CIRCULAR LINING OF ESTIMATED SUPPORTING STRENGTH WITH CONCENTRATED FORCES

### S u m m a r y

In the elaboration a strength analysis of a metal rigid circular lining has been carried out for the purpose of estimating supporting strength on loading with concentrated forces. Permissible supporting strength of lining have been obtained for the non - distorted rock mass and these have been compared with permissible supporting strength of detached arches. Both supporting strengths are boundary values of permissible supporting strength of rigid circular arch lining with optional supporting strength of rock.