ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: GÓRNICTWO z.71 Nr kol. 470

Norbert Musioł

WYZNACZANIE OPTYMALNYCH NAKŁADÓW CZYNNIKÓW PRODUKCJI GÓRNICZEJ

Streszczenie: W artykule wyznaczono funkcję produkcji oraz dynamiczną funkcję kosztu jednostkowego, w których zmiennymi objaśniającymi są majątek trwały i zatrudnienie. W oparciu o nie wyznaczono optymalne wielkości nakładów czynników produkcji i prognozowane wielkości tych czynników oraz minimalne dla nich prognozowane koszty jednostkowe.

1. Zakres badania i dane statyczne wykorzystane do analizy

Posługiwanie się szeregami czasowymi w ekonometrycznej analizie związków zachodzących między nakładami i wydobyciem stwarza możliwość budowy dynamicznego modelu statycznej funkcji produkcji, która pozwala uchwycić wpływ różnych rodzajów nakładów na jej wielkość. Szeregi czasowe stwarzają nam także możliwość budowy funkcji kosztów. Obie te funkcje wykorzystane zostaną w niniejszych badaniach do wyznaczenia optymalnych nakładów czynników produkcji i minimalnych wielkości kosztu jednostkowego.

Ekonometryczna analiza wydobycia i kosztów produkcji dotyczy kształtowania się obu tych wielkości w skali resortu, przy czym jednostką w badaniu jest kopalnia a jednostką czasu okres roczny. Badania przeprowadzono za okres 1963-1973. W ekonometrycznej analizie kosztów własnych produkcji występują elementy zakłócające porównywalność danych o poziomie kosztów takie jak zmiany cen materiałów, surowców, stawek płac i innych opłat i taryf. Eliminacji wpływu tych czynników na poziom kosztów dokonano przez stabilizację cen na określonym ustalonym poziomie. Stwierdzono, że zebrane dane statystyczne posiadają wysoki stopień wiarygodności i zostały użyte do dalszej analizy.

2. Wyznaczenie funkcji produkcji

Przy konstruowaniu danymicznego modelu statystycznego funkcji produkcji przyjmujemy, że wydobycie jest funkcją n zmiennych objaśniających:

$$Y_t = F_t\,(X_1, X_2, \ldots, X_n), \tag{1}$$

Z różnych powodów nie jesteśmy w stanie uwzględnić w równaniu (1) wszystkich zmiennych niezależnych określających poziom wydobycia. Czynniki bowiem, które należałoby zbadać, są tak liczne, że najlepiej jest rozważać tylko działanie najbardziej istotnych, powiedzmy k czynników, dla których mamy dostępny materiał statystyczny.

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że wpływ nieuwzględnionych n - k zmiennych w funkcji produkcji ma charakter przypadkowy, co można napisać:

$$Y_t = F_t\ (X_1, X_2, \ldots, X_k) + \xi_t, \tag{2}$$

gdzie: ξ_t - składnik losowy.

W związku z powyższym na zmianę ξ_t składa się szereg czynników pominiętych, wywierających niewielki wpływ, to jest czynników, które nie są skorelowane z czynnikami konkretnie występującymi po prawej stronie równania (2).

a) Funkcja liniowa: $$Y_t = a + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot X_{1t} + \xi_t, \tag{3}$$

gdzie: Y_t - poziom wydobycia w okresie t, obliczony z funkcji produkcji.

X_{it} - zmienna objaśniająca kształtowanie się wydobycia,

$a_o, a_1, a_2 \ldots a_k$ - parametry, które szacuje się za pomocą metody najmniejszych kwadratów,

ξ_t - składnik losowy o nadziei matematycznej zero i stałej dla wszystkich t wariancji σ^2

b) Funkcja potęgowa:

$$Y_t = a_o \prod_{i=1}^{k} aX_{it}^{a_1} \cdot e^{\xi_t}. \tag{4}$$

Do obliczeń posłużono się funkcją postaci (4):

$$W_t = X_{1t}^{a_1} \cdot X_{2t}^{a_2} \cdot X_{3t}^{a_3} \cdot e^{\xi_t} \tag{5}$$

Dla analizowanej grupy kopalń wyznaczono funkcję wydobycia postaci:

$$W_t = X_{1t}^{a_1} \cdot X_{2t}^{a_2} \cdot X_{3t}^{a_3} \cdot e^{\xi_t}, \tag{6}$$

gdzie: W_t - wydobycie w milionach ton,
X_{1t} - wartość majątku trwałego biernego netto, mld zł.,
X_{2t} - wartość majątku trwałego czynnego netto, mld zł.,
X_{3t} - liczba przepracowanych pracownikodniówek, mln.

Funkcję (6) oszacowano metodą najmniejszych kwadratów w oparciu o dane przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1

Lata	1963	1964	1965	1966	1967	1968
X_1	0,674	0,679	0,708	0,735	0,772	0,734
X_2	0,587	0,611	0,587	0,586	0,620	0,640
X_3	1,346	1,357	1,273	1,269	1,235	1,256
W	1,727	1,776	1,878	1,856	1,852	1,910

Lata	1969	1970	1971	1972	1973
X_1	0,771	0,838	0,895	0,906	0,954
X_2	0,662	0,712	0,728	0,781	0,797
X_3	1,260	1,318	1,343	1,339	1,338
W	1,975	2,136	2,245	2,323	2,443

Z obliczeń wynika, że:

$$W_t = X_{1t}^{0,12}\, X_{2t}^{0,12}\, X_{3t}^{0,84}\, e^{-0,01} \tag{7}$$

Średnie błędy szacunku parametrów strukturalnych funkcji są odpowiednio równe 0,010, 0,08, 0,08.

3. Wyznaczenie funkcji kosztu

Funkcję kosztu jednostkowego szacowano w postaci (3), którą dla celu niniejszego artykułu przedstawiono następująco:

$$K_t = \sum_{i=0}^{k} a_i\, X_{it} \cdot \xi_t \tag{8}$$

Funkcję (8) szacujemy na podstawie danych dotyczących określonego momentu czasu t (t = 1,2,...T). Procedurę estymacyjną powtarzamy T razy, otrzymując oszacowania funkcji dla poszczególnych lat badanego okresu. W wyniku otrzymujemy szeregi wartości a_k ocen parametrów α_k zaobserwowane dla kolejnych lat, na podstawie których szacujemy modele tendencji rozwojowej ocen parametrów:

$$f_k(t) = \beta_{k_1} \cdot t^{\beta_{k_2}} + \beta_{k_0}. \tag{9}$$

Model (8) przyjmuje zatem postać:

$$K_t = \sum_{t=o}^{k} f_k(t)\, K_{it} + \hat{\xi}_t. \tag{10}$$

Do obliczeń posłużono się funkcją (8) postaci:

$$K_t = P_{1t} X_{1t} + P_{2t} X_{2t} + P_{3t} X_{3t} + P_{4t} + \hat{\xi}_t \tag{11}$$

Funkcję tą szacujemy 11 razy, otrzymując oszacowania dla poszczególnych lat badanego okresu.

$$t = 1 \ (1963\ r)\quad K_1 = P_{1,1}X_{11} + P_{2,1}X_{21} + P_{3,1}X_{31} + P_{4,1} + \hat{\xi}_1$$

$$t = 2 \ (1964)\quad K_2 = P_{1,2}X_{1,2} + P_{2,2}X_{22} + P_{3,2}X_{3,2} + P_{4,2} + \hat{\xi}_2 \tag{12}$$

$$(t=11)\ (1973)\quad K_{11} = P_{1,11}X_{1,11} + P_{2,11}X_{2,11} + P_{3,11}X_{3,11} + P_{4,11} + \hat{\xi}_{11}.$$

Analizując funkcję kosztów dla poszczególnych lat (12) zaznacza się istnienie wyraźnych trendów, współczynników P_1, P_2, P_3, przy zmiennych objaśniających X_1, X_2, oraz X_3 i wyrazu wolnego P_4, które szacujemy w postaci funkcji (9)

Dla P_1, P_2, P_3 funkcja (9) przyjmie postać:

$$f_k(t) = \beta_{k_1}\, t + \beta_{k_o} \tag{13}$$

$$k = 1, 2, 3$$

natomiast dla P_4 postaci funkcji (9) jest następująca:

$$f_4(t) = \beta_{k_1}\, t^{\beta_{k_2}} + \beta_{k_o} \tag{14}$$

Dla funkcji (13) i (14) policzono wartości β_k, β_{k_1}, β_{k_o} metodą najmniejszych kwadratów. Wyznaczone funkcje (13) i (14) mają postać:

$$f_1(t) = 23{,}99 - 0{,}888\ t, \tag{15}$$

$$f_2(t) = 29{,}97 - 1.110\ t, \tag{16}$$

$$f_3(t) = 77{,}78 + 1{,}350\ t, \tag{17}$$

$$f_4(t) = 131.3\ t^{0.135}. \tag{18}$$

Dla powyższych funkcji wyznaczono parametry struktury stochastycznej: wariancje, współczynniki zbieżności, współczynniki zmienności losowej, które we wszystkich czterech przypadkach były korzystne.
Znając funkcje (15) - (18) wyznaczono funkcję kosztów postaci (10):

$$K_t = (23,99-0,888\ t)\ X_{1t} + (29,97 - 1.110\ t)\ X_{2t} + (77,78 + 1.350\ t)X_{3t} +$$

$$+ 131,3t^{0.135}. \tag{19}$$

Podstawiając za t wartości 13-18 otrzymać można wartości funkcji kosztów dla lat 1975-1980.

4. Wyznaczenie nakładów czynników produkcji

Kopalnia dla wydobycia określonej ilości ton węgla zużywa w procesie produkcji n środków w ilościach $X_1, X_2,\dots,X_n$ i są to tzw. czynniki produkcji. Zakłada się, że wielkość wydobycia W jest funkcją nakładów czynników produkcji, czyli $W = f\ (X_1,X_2,\dots,X_n)$. Zależność ta nazywa się funkcją produkcji (wydobycia).

Z wydobywaniem związany jest pewien koszt k, który zależy od zużytej ilości n czynników produkcji $X_1,X_2\dots X_n$ oraz od ich ceny $a_1,a_2,\dots,a_n$. Łączny koszt wydobycia wyraża się wzorem

$$a_1\ X_1 + a_2\ X_2 + \dots + a_nX_n = k.$$

Ogólne zagadnienie jest następujące:
wyznaczyć wielkości X_1,X_2,X_3,X_n takie, aby dla założonego poziomu wydobycia jednostkowy koszt był minimalny, czyli:

$$K = a_1X_1 + a_2X_2 \dots + a_n\ X_n = \text{minimum} \tag{20}$$

przy spełnieniu warunku ubocznego:

$$f\ (X_1\ X_2,\dots,X_n) = W_o \tag{21}$$

i warunków brzegowych $X_1 \geqslant o,\ X_2 \geqslant o,\dots,X_n \geqslant o$,

gdzie: W_o - zadany poziom wydobycia.

W analizowanym przypadku mamy do czynienia z trzema wynikami produkcji. Funkcja wydobycia dla rozpatrywanej grupy kopalń przyjmie postać (7)

$$W = X_1^{0.12} X_2^{0.12} X_3^{0.84} \tag{22}$$

Dynamiczna funkcja kosztu jednostkowego (19) dla analizowanej grupy kopalń jest postaci:

$$K_t = (23,99 - 0,888\ t)\ X_{1t} + (29.97 - 1.110\ t)\ X_{2t} +$$

$$+ (77,78 + 1.350\ t)\ X_{3t} + 131,3\ t^{0.135}. \tag{23}$$

Zagadnienie szczegółowe jest następujące:

wyznaczyć wielkości X_1, X_2, X_3 takie, aby dla założonego poziomu wydobycia koszt był minimalny, czyli:

$$K = (23,99 - 0.888\ t)\ X_1 + (29,97 - 1.110\ t)\ X_2 +$$

$$+ (77,78 + 1.350\ t)\ X_3 + 131,3t^{0.135} = \text{min.}, \tag{24}$$

przy spełnieniu warunku ubocznego:

$$U = X_1^{0.12} X_2^{0.12} X_3^{0.84} \quad . \tag{25}$$

i warunków brzegowych X_1, X_2, $X_3 \geqslant 0$.

Oznaczając (24) przez $f(X_i)$ a (25) przez $U(X_i)$.

Warunek rozwiązania zadania prognozowania jest następujący:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{\partial u}{\partial X_i} \quad (i = 1,2,3) \tag{26}$$

Ponieważ równanie (26) jest spełnione dla każdego i=1,2,... oraz obie jego strony są dodatnie, warunek (26) można zapisać w postaci

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial X_1}}{\frac{\partial u}{\partial X_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_2}}{\frac{\partial u}{\partial X_2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial X_3}}{\frac{\partial u}{\partial X_3}} \quad . \tag{27}$$

Po zróżniczkowaniu (25) i (26) oraz uwzględniając (27) otrzymano rozwiązanie:

$$\frac{0.12\ X_2^{0.12}\ X_3^{0.84}}{X_1^{0.88}\ (23.99-0.888\ t)} = \frac{0.12\ X_1^{0.12}\ X_3^{0.84}}{X_2^{0.88}\ (29.97-1.110t)} = \frac{0.84\ X_1^{0.12}\ X_2^{0.12}}{X_3^{0.16}\ (77.78+1.350t)} \tag{28}$$

Na podstawie ostatniego równania oraz warunku bilansowego można wyznaczyć dla prognoz wydobycia optymalne nakłady czynników produkcji $X_{1_{opt}}$, $X_{2_{opt}}$, $X_{3_{opt}}$. Dane te przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2

Lata	1975	1976	1977	1978	1979
X_{1opt}	1.002	1.049	1.089	1.127	1.165
X_{2opt}	0,872	0.912	0.952	0.992	1.034
X_{3opt}	1.370	1.358	1.347	1.329	1.303

Lata	1980	1981	1982	1983	1984	1985
$X_{1_{opt}}$	1.216	1.268	1.327	1.393	1.446	1.562
$X_{2_{opt}}$	1.087	1.147	1.213	1.289	1.358	1.490
$X_{3_{opt}}$	1.293	1.273	1.261	1.237	1.213	1.212

Z powyższego równania (28) oraz warunku bilansowego wyznaczono dla prognoz wydobycia minimalny prognozowany koszt wydobycia K_{min}, które przedstawiono w tabeli 3

Tabela 3

Lata	1975	1976	1977	1978	1979
W_{prog}	2.546	2.620	2.695	2.769	2.844
K_{min}	340,74	343,05	345,95	346,23	346,23

Lata	1980	1981	1982	1983	1984	1985
W_{prog}	2.918	2.992	3.067	3.141	3.216	3.290
K_{min}	347,92	348,62	349,85	349,75	348,92	351,60

5. Zakończenie

1. Oszacowane funkcje wydobycia i kosztów informują o ilościowych zależnościach między wydobyciem i kosztami a zmiennymi niezależnymi - czynnikami produkcji.
2. Znajomość powyższych funkcji pozwala na dokonywanie prognoz, gdy założy się określone wartości zmiennych niezależnych w okresie, na których sporządza się prognozę,
3. Funkcje te nadają się do prognozy, jeśli a prori można przesądzić iż w przyszłości nie ulegną istotnej zmianie wcześniej oszacowane parametry a_i.
4. W oparciu o oszacowane funkcje wydobycia i kosztów można wyznaczyć optymalne wielkości nakładów czynników produkcji górniczej dla określonych wielkości wydobycia, a także minimalne prognozowane koszty wydobycia.
5. Wyznaczone wielkości mogą być wykorzystane w planowaniu oraz projektowaniu wielkości i struktury kopalni.

ОРРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА ГОРНОЕ ПРОИЗВОДСТВО

Р е з ю м е:

В статье попределяются функция производства и динамическая функция расходов на единицу изделия, в которых поясняющими переменными являются устойчивое (недвижимое) имущество и занятость. С учётом этих переменных были определены оптимальные величины затрат на производство и прогнозирование размеров этих величин и минимальные планируемые единичные расходы.

DETERMINATION OF OPTIMUM MINING PRODUCTION FACTORS' INPUTS

S u m m a r y

In the paper teh production function as well as the dynamic function of the unitary cost, in which the explanatory variables are the durable income and employment, have been determined. Basing on these data the optimum input amounts of production factors and forecasting the magnitude of these factors as well as forecasting the minimum of unitary cost for them, have been determined.