ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 55 Nr kol.651

Krzysztof Baron
Politechnika Śląska

WPŁYW OGRANICZEŃ MAGAZYNU NA OPTYMALIZACJĘ DYSKRETNEGO PROCESU PRZEPŁYWU MATERIAŁU

Streszczenie. W niniejszej pracy rozważa się zagadnienie optymalizacji dyskretnego procesu przepływu materiału przez magazyn. W trakcie trwania procesu na wielkość zasobów w magazynie są nakładane aktywnie oddziaływujące ograniczenia. Poprzez zastąpienie wpływu ograniczeń odpowiednią poprawką wprowadzoną do strategii sterowania przepływem materiału sprowadzono zadanie optymalizacji procesu przepływu do pewnego zadania optymalizacji bez ograniczeń. Postępowanie to pozwoliło wyznaczyć suboptymalny algorytm sterowania i ocenę strat związanych z aktywnością ograniczeń.

1. Wstęp

W procesie przepływu materiału zadanie magazynu sprowadza się do gromadzenia dopływającego materiału i udostępniania odbiorcom zasobów, pozwalając na pokrywanie ich nierównomiernych w trakcie procesu zapotrzebowań.

Ze względu na ograniczoną pojemność magazynu, zasoby poszczególnych asortymentów materiału, jakie można w magazynie zgromadzić, są ograniczone. Wartości tych ograniczeń mogą w trakcie pracy magazynu się zmieniać i zazwyczaj nie są znane w przyszłości przed podjęciem decyzji sterującej przepływem poszczególnych asortymentów magazynowanego materiału.

W trakcie procesu sterowania niektóre z ograniczeń magazynu mogą aktywnie oddziaływać na przepływ. Uwzględnienie w sterowaniu przepływem aktywnie oddziaływujących ograniczeń wpływa na prawo sterowania i wartość wskaźnika jakości.

2. Sformułowanie problemu.

Bilans poszczególnych rodzajów magazynowanego materiału można w n-tym etapie sterowania przepływem materiału opisać następującym równaniem:

$$z_{n+1} = z_n + d_n - u_n \qquad /1/$$

gdzie:

z_n - wektor zasobów w magazynie, określający zawartość poszczególnych asortymentów magazynowanego materiału; wymiar z_n związany jest z ilością asortymentów materiału,

d_n - wektor dopływu do magazynu poszczególnych asortymentów materiału,

u_n - wektor sterowania przepływem materiału z magazynu do odbiorców.

Wielkość zasobów w magazynie w każdym etapie sterowania spełnia ograniczenia:

$$0 \leqslant z_n \leqslant g_n \qquad /2/$$

gdzie: g_n - dodatnio określony wektor ograniczeń zasobów dla n-tego etapu sterowania. Suma wartości składowych wektora g_n jest ograniczona całkowitą pojemnością magazynu.

O wektorze g_n zakładamy, że wartości jego składowych są znane z jednoetapowym wyprzedzeniem/tzn. w etapie n-1-szym/.

Proces przepływu, polegający na przepływie materiału w postaci określonej liczby pojedynczych elementów lub ich partii, opisany jest następującym równaniem:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n \qquad /3/$$

gdzie: x_n - wektor stanu przepływu, określający przepływ każdego z rodzajów materiału,

u_n - wektor sterowania przepływem o wartościach spełniających równania bilansu magazynu /1/. Wymiary wektorów x_n i u_n odpowiadają liczbie asortymentów materiału w przepływie i liczbie asortymentów materiału w zasobach,

A_n, B_n - macierze o odpowiednich wymiarach, dla różnych między sobą asortymentów materiału są macierzami diagonalnymi lub jednostkowymi.

Celem sterowania przepływu jest minimalizacja wskaźnika jakości o postaci:

$$J = (x_N - p_N)^T Q_N (x_N - p_N) + \sum_{n=0}^{N-1} \left[(x_n - p_n)^T Q_n (x_n - p_n) + u_n^T R_n u_n\right] \qquad /4/$$

gdzie: p_n - zapotrzebowanie na określoną ilość elementów danego asortymentu w n-tym etapie sterowania,

N - liczba optymalizowanych etapów sterowania,

Q_n, R_n - macierze symetryczne, dodatnio półokreślone.

3. Rozwiązanie problemu z ograniczeniami

Przy braku ograniczeń na wielkość zasobu dostępnego w magazynie w trakcie procesu sterowania można podać prawo optymalnego sterowania przepływem, zakładając znajomość zapotrzebowań p_i we wszystkich przyszłych /N-n/ etapach procesu. Prawo to wyraża się zależnością:

$$u_n^o = -\left(B_n^T S_{n+1} B_n + R_n\right)^{-1} B_n^T \left(S_{n+1} A_n x_n + \sum_{i=n+1}^{N} M_{n+1,i}\, p_i\right) \qquad /5/$$

gdzie:

$$S_n = Q_n + A_n^T S_{n+1} A_n - A_n^T S_{n+1} \alpha_n S_{n+1} A_n \qquad /6/$$

$$S_N = Q_N$$

$$\alpha_n = B_n \left(B_n^T S_{n+1} B_n + R_n{}^{-1}\right) B_n^T \qquad /7/$$

$$M_{n,j} = A_n^T \left(1 - S_{n+1} \alpha_n\right) M_{n+1,j}, \quad j = n+1, \dots, N \qquad /8/$$

$$M_{n,n} = -Q_n$$

Minimalna wartość wskaźnika jakości /4/ dla N - etapowego procesu sterowania osiągana przy użyciu algorytmu /5/ określona jest zależnością:

$$J_o = x_o^T S_o x_o + 2\, x_o^T \sum_{j=0}^{N} M_{o,j}\, p_j + \sum_{i,j=0}^{N} p_i^T T_{i,j}^o\, p_j \qquad /9/$$

gdzie:

S_o, $M_{o,j}$ - wyznaczyć można w oparciu o równania /6/ $\div$ /8/.

$$T_{i,j}^n = T_{i,j}^{n+1} - M_{n+1,i}^T \alpha_n M_{n+1,j} \qquad /10/$$

$$n = 0, \dots, N, \quad i,j = n+1, \dots, N$$

$$T_{n,n}^n = Q_n$$

$$T_{n,i}^n = 0, \quad i = n+1, \dots, N$$

Ze względu na dostępność informacji o ograniczeniach zasobów z jednoetapowym wyprzedzeniem rozwiązanie optymalne problemu pierwotnego jest niemożliwe. Można go zastąpić zrandominizowanym problemem wtórnym i poszukiwać rozwiązania przy użyciu zasady Min - E [3], bądź pewnym przypadkiem modelu o ograniczonym rozkładzie [4].

W niniejszej pracy zrezygnowano z rozwiązania optymalnego, proponując rozwiązanie suboptymalne wyznaczone deterministycznie dla problemu pierwotnego.

Wpływ ograniczeń magazynu przy stosowaniu algorytmu przedstawionego zależnością /5/ jest następujący.

Oznaczmy przez x_n^* stan przepływu, który miał miejsce w n-tym etapie przy uwzględnieniu ograniczeń /2/, a przez f_{n+1} różnicę pomiędzy stanem x_{n+1}, określonym w oparciu o zależności /3/, /5/, a stanem

x^{*}_{n+1}, jaki wystąpi pod wpływem aktywnego oddziaływania ograniczeń zasobów.

$$f_{n+1} = x_{n+1} - x^{*}_{n+1} \qquad /11/$$

Oddziaływanie ograniczenia przejawia się w niemożności zrealizowania pożądanej wartości sterowania u^{o}_{n}.
Jeśli ograniczenia magazynu nie są aktywne, czyli:

$$0 \leqslant z_{n+1} \leqslant g_{n+1}$$

to wyznaczona optymalna wartość sterowania u^{o}_{n} nie narusza ograniczeń i $x^{*}_{n+1} = x_{n+1}$, $f_{n+1} = 0$.

W przypadku, gdy dla sterowania u^{o}_{n}:

$$z_{n+1} > g_{n+1} \quad \text{lub} \quad z_{n+1} < 0$$

to aktywizacja ograniczeń spowoduje konieczność zmiany sterowania z wartości u^{o}_{n} na u^{*}_{n}, tak by była spełniona nierówność:

$$0 \leqslant z_{n} + d_{n} - u^{*}_{n} \leqslant g_{n+1}$$

W oparciu o zależności /11/ i /3/ można podać związek pomiędzy u^{o}_{n} i u^{*}_{n}:

$$u^{*}_{n} = u^{o}_{n} - B^{X}_{n} B^{T}_{n} f_{n+1} \qquad /12/$$

gdzie: B^{X}_{n} - macierz odwrotna lub pseudoodwrotna do $B^{T}_{n} B_{n}$,

u^{o}_{n} - sterowanie wyrażone zależnością /5/,

lub wprowadzając odpowiednio wektor poprawek sterowania λ_{n}, wartość sterowania u^{*}_{n} pod wpływem aktywnych ograniczeń można określić następująco:

$$u^{*}_{n} = u^{o}_{n} - \lambda_{n} \qquad /13/$$

gdzie: poprawka λ_{n} umożliwia spełnienie warunku /2/, czyli:

$$0 \leqslant z_{n} + d_{n} - u^{o}_{n} + \lambda_{n} \leqslant g_{n+1}$$

Wartość wektora poprawek można wyznaczyć następująco:

$$\lambda_{n} = \begin{cases} z_{n} + d_{n} - g_{n+1} - u^{o}_{n}, & \text{pojemność magazynu jest zbyt mała w stosunku do aktualnych potrzeb,} \\ 0 & \text{, ograniczenie /2/ nie jest aktywne,} \\ z_{n} + d_{n} - u^{o}_{n} & \text{, zasób zgromadzony w magazynie jest zbyt mały wobec aktualnych potrzeb.} \end{cases}$$

Zauważmy, że w n-tym etapie procesu przepływu materiału znana jest tylko informacja o aktywności ograniczeń magazynu w etapie n+1-szym, brak natomiast jakiejkolwiek informacji o ograniczeniach w pozostałych przyszłych etapach sterowania.

Informacja o aktywności ograniczeń w etapie n+1-szym ma postać poprawki λ_{n}, zaś wartość, jaką poprawka ta przyjmuje, zależy od zasobu

$z_n + d_n$, zapotrzebowań $p_i, i = n+1, \ldots, N$ przepływu x_n^* oraz ograniczeń.

Oznaczmy przez $I_n^o(x_n^*)$ następującą formę kwadratową:

$$I_n^o(x_n^*) = \min_{u_n} \left\{ \sum_{i=n}^{N} (x_i^* - p_i)^T Q_i (x_i^* - p_i) + \sum_{i=n+1}^{N-1} u_i^{*T} R_i u_i^* + u_n^T R_n u_n \right\} \qquad /14/$$

Algorytm sterowania optymalnego u_n^o przy braku informacji o aktywności ograniczeń w n+1-szym etapie wynika z minimalizacji podług u_n równania:

$$I_n^o(x_n^*) = \min_{u_n} \left\{ (x_n^* - p_n)^T Q_n (x_n^* - p_n) + u_n^T R_n u_n + I_{n+1}^*(x_{n+1}^*, \lambda_{n+1}) \right\} \qquad /15/$$

gdzie: $$I_{n+1}^*(x_{n+1}^*, \lambda_{n+1}) = x_{n+1}^{*T} S_{n+1} x_{n+1}^* + 2 x_{n+1}^{*T} \sum_{j=n+1}^{N} M_{n+1,j} p_j +$$

$$+ \sum_{i,j=n+1}^{N} p_i^T T_{i,j}^{n+1} p_j + \sum_{i=n+1}^{N-1} \lambda_i^T (B_i^T S_{i+1} B_i + R_i) \lambda_i \qquad /16/$$

macierze S_i, $M_{n+1,j}$, $T_{i,j}^{n+1}$ określone są z wzorów /6/÷/8/,/10/.

Otrzymany tą drogą algorytm wyraża się wzorem /5/ ze względu na brak jakiejkolwiek informacji o ograniczeniach w przyszłych etapach: n+2,...,N.

Na skutek aktywności ograniczenia w n+1-szym etapie sterowanie przyjmuje wartość u_n^*:

$$u_n^* = -\left(B_n^T S_{n+1} B_n + R_n\right)^{-1} B_n^T \left(S_{n+1} A_n x_n^* + \sum_{i=n+1}^{N} M_{n+1,i}\, p_i\right) - \lambda_n \qquad /17/$$

gdzie: λ_n - określone jest zgodnie z /13/.

Aktywność ograniczeń w n+1-szym etapie sprawia, że poprzez uwzględnienie poprawki λ_n wartość wskaźnika powiększa się o składnik $\lambda_n^T (B_n^T S_{n+1} B_n + R_n) \lambda_n$,

czyli: $$I_n^*(x_n^*, \lambda_n) = x_n^{*T} S_n x_n^* + 2 x_n^{*T} \sum_{j=n}^{N} M_{n,j} p_j + \sum_{i,j=n}^{N} p_i^T T_{i,j}^n p_j +$$

$$+ \sum_{i=n}^{N-1} \lambda_i^T (B_i^T S_{i+1} B_i + R_i) \lambda_i \qquad /18/$$

Dowodząc powyższych zależności metodą indukcji, można wykazać, że w rozważanym przypadku suboptymalne prawo sterowania procesem przepływu spełniające wymagania stawiane przez ograniczenia pojemności magazynu może być określone równaniem /17/, a osiągana przy jego stosowaniu wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem:

$$J_0^* = J_0 + \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_n^T \left(B_n^T S_{n+1} B_n + R_n\right) \lambda_n \qquad /19/$$

gdzie: J_0 - wartość wskaźnika jakości przy braku aktywnych ograniczeń we wszystkich etapach procesu sterowania.

4. Wnioski

Przedstawione w niniejszej pracy zależności pozwalają ocenić wpływ, jaki wywierają ograniczenia, nakładane na zasób materiału w magazynie, na jakość sterowania.

Wzrost aktywności ograniczeń powoduje przyrost wartości wskaźnika.

Podane suboptymalne rozwiązanie pozwala na zachowanie liniowości prawa sterowania i umożliwia otrzymanie łatwych w interpretacji zależności ukazujących wpływ ograniczeń na straty wskaźnika.

Liniowość algorytmu ułatwia realizację sterowania suboptymalnego, pozwalając na korzystanie z rozwiązań wyznaczonych dla problemu bez ograniczeń oraz daje możliwość oszacowania strat, jakie ponoszone są przy suboptymalnym sterowaniu przy ograniczeniach.

LITERATURA

[1] Bryson A.E., Ho Y.C.: Applied Optimal Control, Blaisdel Publishing Company, Massachusetts 1969.

[2] Gutenbaum J.: Problemy teorii regulatorów, WNT, Warszawa 1975.

[3] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki t. XXI z. 4 1976.

[4] Schweppe F.C.: Układy dynamiczne w warunkach losowych, WNT, Warszawa 1978 /tłum. z angielskiego/.

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕНИИ РЕСУРСОВ НА ОПТИМИЗАЦИЮ ДИСКРЕТНОГО ПРОЦЕССА ПЕРЕПЛЫВА МАТЕРИАЛА

Р е з ю м е

В работе рассмртривается проблему оптимизации дискретного процесса переплыва материала через склад. Во время продолжания процесса на величну ресурсов накладываются активные ограничения. Заменой влияния активных ограничении подходящей поправкой управления эту задачу можно свести к задачи бех ограничений. Этот подход позваляет определить субоптимальный алгоритм управления и оценку померь связаных с активиостей ограничении.

THE EFFECT OF RESOURCES BOUNDS ON THE OPTIMIZATION OF DISCRETE MATERIALS FLOWING PROCESS

S u m m a r y

In the paper the optimization problem of a discrete materials flowing process is considered. During the process active constraints are put on the resources. The problem is transformed into some problems without constraints with the help of the correcting member instead of the effect of the constraints. It allows to find the sub - optimal control algorithm and the estimation of losses caused by the bounds activity.