ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 55 Nr kol. 651

Tadeusz Legierski
Politechnika Śląska

# PROBLEM HARMONOGRAMOWANIA ROZDZIAŁU ZASOBÓW SUROWCÓW W PROCESIE ELEKTRORAFINACJI MIEDZI

Streszczenie. W artykule przedstawiono formalizacje matematyczną problemu harmonogramowania rozdziału surowców w procesie elektrorafinacji.

## 1. Wstęp

Podstawowymi surowcami Wydziału Elektrorafinacji Miedzi są anody i podkładki katodowe, natomiast jego produktami są katody, zaś półprodukty stanowią odpady anodowe oraz szlam anodowy. Energia potrzebna do prowadzenia procesu ekektrorafinacji dostarczana jest w postaci energii elektrycznej oraz energii cieplnej, której nośnikiem jest para technologiczna.

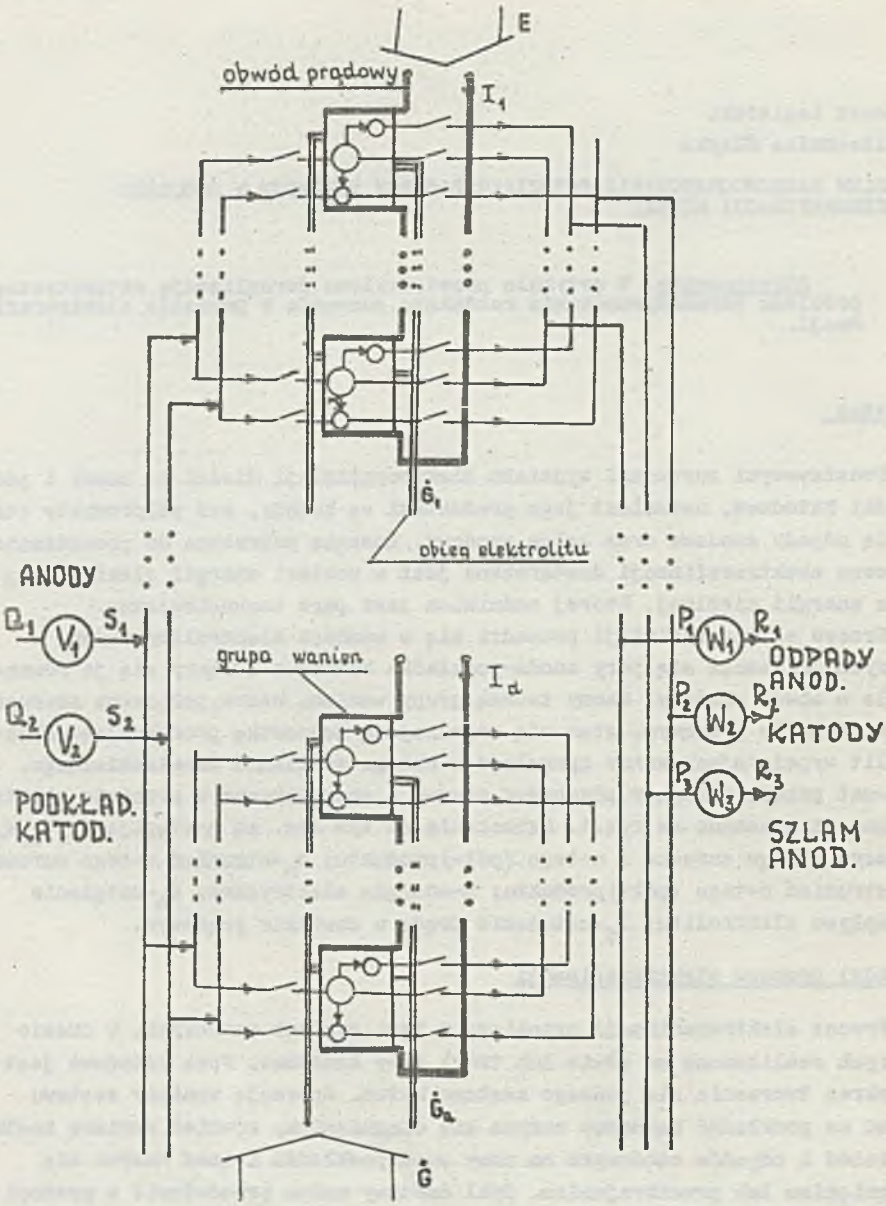
Proces elektrorafinacji prowadzi się w wannach elektrolitycznych, w których umieszcza się pary anoda-podkładka katodowa i łączy się je równolegle w obwód prądowy. Wanny tworzą grupy wanien, które, połączone szeregowo w obwodzie prądowym, stanowią najmniejszą jednostkę produkcyjną. Elektrolit wypełniający wanny cyrkuluje w obiegu zasilania elektronicznego. Schemat przedstawiający przepływy masowe i energetyczne w procesie elektrorafinacji pokazano na rys.1. Oznaczenia na tym rys. są następujące: $V_n, W_n$ - magazyn n-tego surowca i n-tego (pół-)produktu; $Q_n$-strumień n-tego surowca; $R_n$-strumień n-tego (pół-)produktu; E-energia elektryczna; $\dot{G}_a$-natężenie przepływu elektrolitu; $I_d$-natężenie prądu w obwodzie prądowym.

## 2. Model procesu elektrorafinacji

Proces elektrorafinacji przebiega w tzw. cyklach anodowych, w czasie których realizowane są (dwie lub trzy) fazy katodowe. Faza katodowa jest to okres tworzenia się jednego zestawu katod. Operację wymiany zestawu katod na podkładki katodowe nazywa się ciągnięciem, również wymianę zestawu katod i odpadów anodowych na nowy wsad podkładek i anod nazywa się ciągnięciem lub przezbrajaniem. Cykl anodowy można przedstawić w postaci grafu w konwencji "operacja na wierzchołku", zaś "faza katodowa na łuku" - rys.2.

Zakłada się, że dane są następujące zbiory:

$I=\{i: i=1,2,\ldots,i_{max}\}$ -zbiór grup
$J=\{j: j=1,2,\ldots,j_{max}\}$ -zbiór cykli anodowych
$K=\{k: k=0,1,2,3\}$ -zbiór faz lub (kończących je) ciągnięć




Rys. 1. Schemat przepływów masowych i energetycznych w Wydziale Elektrorafinacji Miedzi

$A=\{a: a=1,2,\ldots,a_{max}\}$ -zbiór obiegów elektrolitycznych,

$D=\{d: d=1,2,\ldots,d_{max}\}$ -zbiór obwodów prądowych.

Znane są również następujące odwzorowania $\alpha: I \to A$ oraz $\delta: I \to D$. Podzbiory $\alpha^{-1}(a)$ i $\delta^{-1}(d)$, będące przeciwobrazem odpowiednio $a \in A$ i $d \in D$ poprzez odwzorowanie $\alpha$ i $\delta$, tworzą grupy należące odpowiednio: do danego obiegu a oraz obwodu d.

Operacja k-ta, wykonana w j-tym cyklu anodowym, w i-tej grupie, oznaczona jest przez $z^i_{j,k}$. Operacja ta scharakteryzowana jest przez następujące wektory:

-wektor surowców niezbędnych do jej wykonania:

$$\underline{S}^i_{j,k} = \begin{bmatrix} s^i_{j,k,1} & \text{-masa wsadu anod} \\ s^i_{j,k,2} & \text{-masa podkładek katodowych} \end{bmatrix}$$

-wektor produktów i półproduktów, które otrzymujemy po jej wykonaniu:

$$\underline{P}^i_{j,k} \begin{bmatrix} p^i_{j,k,1} & \text{-masa odpadów anodowych} \\ p^i_{j,k,2} & \text{-masa katod} \\ p_{j,k,3} & \text{-masa szlamu anodowego} \end{bmatrix}$$

oraz przez czas trwania operacji $\Delta t^i_{j,k}$, przy czym do celów harmonogramowania zakłada się, że $\Delta t^i_{j,k}=0$.

Faza katodowa jest scharakteryzowana przez czas trwania $t^i_{j,k}$, przez współczynnik obciążenia źródła zasilania $v^i_{j,k}$ oraz współczynnik sprawności prądowej transportu miedzi: z anody na katodę $f^i_{j,k}$ oraz z anody do elektrolitu $e^i_{j,k}$. Faza dla k=0 jest postojem grupy, czyli $f^i_{j,0}=e^i_{j,0}=0$.

Dodatkowo wprowadza się oznaczenia: $\tau$-czas z przedziału [0,T]; T jest horyzontem harmonogramowania; $\tau^i_{j,k}$-czas zakończenia k-tej fazy w j-tym cyklu i-tej grupy: $m^i_j(\tau)$-masa anod; $x^i_{j,k}(\tau)$-masa katod; $y^i_{j,k}(\tau)$-masa szlamu anodowego. Rys.3 przedstawia i-tą grupę w j-tym cyklu anodowym.

Szybkość zmiany masy anod w j-tym cyklu i-tej grupy wyraża się następująco:

$$\frac{d\, m^i_j(\tau)}{d\tau} = -(f^i_{j,k}+e^i_{j,k})\cdot K_F \cdot I_d(\tau) \quad \text{dla } \tau \in [\tau^i_{j,k-1}, \tau^i_{j,k}] \quad ;$$

gdzie: $K_F$ -równoważnik elektrochemiczny dla grupy.

Znane są warunki początkowe dla cyklu aktualnie trwającego $j=1$ $m^i_1(0)$. Wielkość ta jest niemierzalna, lecz można ją estymować przy pomocy tego samego modelu, pod warunkiem, że znamy $I_d(\tau)$ dla $\tau<0$. Warunki początkowe dla cykli następnych: $m^i_j(\tau^i_{j,D}) = s^i_{j,0,1}$. Wprowadzając zależność $e^i_{j,k}=\gamma^i_{j,k}\cdot f^i_{j,k}$ można napisać:

$$x^i_{j,k}(\tau) = \frac{1}{1+\gamma^i_{j,k}}\left[m^i_j(\tau^i_{j,k-1}) - m^i_j(\tau)\right] + s^i_{j,k-1,2}$$

$$y^i_{j,k}(\tau) = \gamma^i_{j,k}\cdot x^i_{j,k}(\tau) - s^i_{j,k-1,2}$$

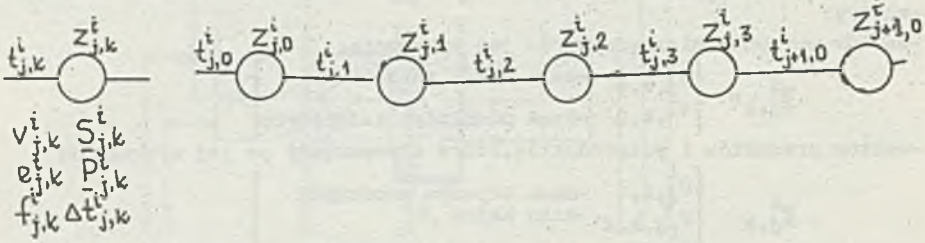
Aby wyznaczyć $x^i_{1,k}(0)$, $y^i_{1,k}(0)$, potrzebna jest znajomość masy anod ostatniej zakończonej fazy tego cyklu.

Wielkości wyjściowe wyraża się następująco:

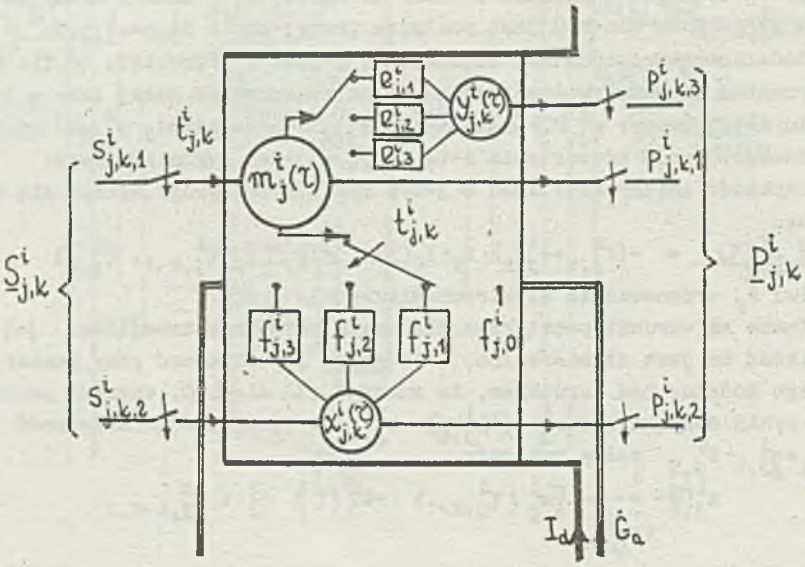
$p^i_{j,k,1}=0$ dla $k=0,1,2$ ; $p^i_{j,k,1}=m^i_j(\tau^i_{j,k})$ dla $k=3$ ;

$p^i_{j,k,2}=0$ dla $k=0$ ; $p^i_{j,k,2}=x^i_{j,k}(\tau^i_{j,k})$ dla $k=1,2,3$ ;

$p^i_{j,k,3}=0$ dla $k=0,1,2,$ ; $p^i_{j,k,3}=y^i_{j,k}(\tau^i_{j,k})$ dla $k=3$ ,




Rys.2. Graf cyklu anodowego




Rys.3. Schemat i-tej grupy w k-tej fazie j-tego cyklu

3. Ograniczenia technologiczne

Ograniczenia te dotyczą masy katod, jaka powinna się wydzielić w poszczególnych fazach. Ograniczenia takie zapewniają odpowiednią jakość miedzi oraz to, że masa katod znajdzie się w zakresie podanym przez normy. Podaje się również warunek na masę odpadów anodowych. Powyższe ograniczenia dla $i \in I$ i $j \in J$ mają postać:

$$x_{1min} \leqslant x^i_{j,1}(\tau^i_{j,1}) \leqslant x_{1max} \qquad (1)$$

$$x_{2min} \leqslant x^i_{j,1}(\tau^i_{j,1}) + x^i_{j,2}(\tau^i_{j,2}) \leqslant x_{2max} \qquad (2)$$

$$m_{min} \leqslant m^i_j(\tau^i_{j,3}) \leqslant m_{max} \qquad (3)$$

Przyjmuje się założenie: $0 \leqslant \tau^i_{j+1,0} - \tau^i_{j,3} \leqslant \tau_{max}$ (4) czyli określa się dopuszczalny czas postoju grup.

Można utworzyć zbiór: $\mathcal{T}^i_{j,k} = \{\tau^i_{1,0}, \tau^i_{1,1}, \tau^i_{1,2}, \tau^i_{1,3}, \ldots \tau^i_{j,k-1}, \tau^i_{j,k}\}$, którego elementami są n-tki, gdzie: $n=4\cdot(j-1)+k+1$ spełniające warunki (1),(2),(3),(4).

4. Ograniczenia związane z systemem organizacji pracy

System organizacji wyznacza zbiór czasów gotowości obsługi procesu do wykonania operacji. Zbiór ma następującą postać: $R = \{t_r: t_r = t_o + 8\cdot r\}$, gdzie: $t_r$ -czas rozpoczęcia r-tej zmiany $r=1,2,\ldots,r_{max}$ ; $t_o$ -czas rozpoczęcia najbliższej zmiany. Kalendarz pracy brygady $b \in B$, gdzie: $B = \{b: b=1,2,3,4\}$; można zdefiniować jako odwzorowanie $f: R \to B$, zaś podzbiór $\Pi_b \subset R$ taki, że $\Pi_b = f^{-1}(b)$ będzie zawierał wszystkie czasy rozpoczęcia zmian przez daną brygadę b. Kierownictwo Wydziału ustala następujące odwzorowanie $\beta: I \to B$, czyli podzbiorem grup obsługiwanych przez brygadę b będzie $\beta^{-1}(b)$. Zbiór $\Omega^i_{j,k}$, który jest iloczynem: $\Omega^i_{j,k} = \{\underbrace{\Pi_b \times \Pi_b \times \Pi_b \times \Pi_b}_{n}\} \cap \mathcal{T}^i_{j,k}$ będzie zbiorem dopuszczalnych dyskretnych momentów czasu, w których możliwe jest wykonanie wszystkich operacji do k-tej w j-tym cyklu włącznie. Elementami zbioru $\Omega^i_{j,k}$ będą następujące n-tki $\langle \omega^i_{1,0}, \omega^i_{1,1}, \omega^i_{1,2}, \omega^i_{1,3}, \ldots \omega^i_{j,k-1}, \omega^i_{j,k} \rangle$. Zbiór dopuszczalnych czasów trwania k-tej fazy w j-tym cyklu dla i-tej grupy jest następujący:

$T^i_{j,k} = \{t^i_{j,k}: t^i_{j,k} = \omega^i_{j,k} - \omega^i_{j,k-1}$ dla wszystkich par $\langle \omega^i_{j,k-1}, \omega^i_{j,k} \rangle$ pochodzących z n-tek należących do $\Omega^i_{j,k}\}$. Można w tym zbiorze dokonać numeracji jego elementów od 1,2,... do $l_{max}$, zaś $t^i_{j,k}$ zaopatrzyć indeksem l: $t^i_{j,k,l}$.

Wprowadza się zmienną $u^i_{j,k,l}$, którą definiuje się następująco:

$$u^i_{j,k,l} = \begin{cases} 1 - \text{jeśli czas trwania k-tej fazy j-tego cyklu w i-tej grupie wynosi } t^i_{j,k,l} \\ 0 - \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

przy czym spełniony jest warunek:

$$\sum_{l=1}^{l_{max}} u^i_{j,k,l} = 1$$

Czas zakończenia wszystkich operacji i faz (łącznie z fazami postoju) we wszystkich cyklach będzie wyrażał się dla i-tej grupy wzorem:

$$T^i = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} u^i_{j,k,l} \cdot t^i_{j,k,l}$$

5. Inne ograniczenia

a. Ograniczenia na zasoby surowców

Strumień surowców szczególnie anod stanowi dla Wydziału Elektrorafinacji strumień wiodący; wynika to z faktu, że pojemności magazynów między Wydziałem Metalurgicznym i Elektrorafinacji są bardzo małe, ze względu na trudności i wysokie koszty organizacji pracy takich magazynów. Jeżeli zasób magazynu surowca wyrazić przez: $V_n(t) = \int [Q_n(\tau) - S_n(\tau)] d\tau$, to dla każdego $t \in [0,T]$ należy zapewnić, aby: $V_{n_{min}} \leqslant V^o_n(t) \leqslant V_{n_{max}}$. Zakłada się, że dana jest prognoza $Q_n(t)$ dla $t \in [0,T]$.

b. Planowe zadania Wydziału

W zadanym okresie $T_2$ należy wykonać plan produkcyjny:

$$P_{n_{min}} \leqslant \int_0^{T_2} P_n(\tau)\, d\tau \leqslant P_{n_{max}}$$

Można założyć, że pojemności magazynów wyjściowych są b.duże i niemożliwe jest ich przekroczenie.

c. Ograniczenia transportowe

Dana brygada b na r-tej zmianie roboczej $t_r \in \Pi_b$ może przetransportować ograniczoną masę surowców i(pół-) produktów.

6. Harmonogramowanie ciągnięć

Harmonogram operacji ciągnięć definiuje się jako odwzorowanie zbioru wszystkich operacji Z w zbiór czasów gotowości obsługi do wykonania tych operacji R: $h_s: Z \to R$. Odwzorowań takich, które spełniają ograniczenia technologiczne oraz ograniczenia związane z systemem organizacji pracy jest cała rodzina $H = \{h_s : S = 1,2,\ldots S_{max}\}$. Ponieważ każdej operacji odpowiada wektor żądań zasobowych i wektor produktów, więc każdemu harmonogramowi ciągnięć odpowiada harmonogram żądań zasobów i harmonogram produkcji, przy czym tylko część z nich spełnia ograniczenia podane w punkcie 5. Najpoważniejszymi ograniczeniami są ograniczenia podane w punkcie 5a, dlatego też problem ten określa się problemem harmonogramowania rozdziału zasobów surowców.

## 7. Zadanie optymalizacji harmonogramowania i jego rozwiązanie

W praktyce przemysłowej najczęściej stawia się następujące zadanie wyboru optymalnego harmonogramu:

Dana jest w przedziale $t \in [0, T_1]$ prognoza dostawy surowców $Q_n(t)$ oraz przebieg czasowy natężenia prądu; należy wyznaczyć maksymalną ilość cykli i czasy trwania wszystkich faz takie, by osiągnąć $T = \min \max_i T^i$. Kryterium to odpowiada maksymalizacji wydajności Wydziału. Należy jednocześnie spełnić warunki podane w punktach 3,4,5.

Optymalne rozwiązanie tego zadania uzyskano przy pomocy metody gałęzi i ograniczeń. Rozwiązanie to służy do oceny rozwiązań subotymalnych opartych na metodach heurystycznych, zastosowanych w przemyśle [3], [4].

## LITERATURA

[1] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Algorytmy sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji. Wyd. Pol. Poznańskiej Nr 714 Poznań 1978.

[2] Davis E.W., Heidorn G.E.: An algorithm for optimal project scheduling under multiple resource constraints. Managment Sci. 17, No 12, 1971.

[3] Kasprzyk J., Legierski T., Ogonowski Z.: Harmonogramowanie produkcji w procesie elektrorafinacji. System off-line. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Z.91 Seria "Chemia". Gliwice 1979

[4] Kasprzyk J., Ogonowski Z.: Komputerowa implementacja obliczania harmonogramów produkcji dla Wydziału Elektrorafinacji HM "Legnica".

[5] Legierski T.: Wybrane zagadnienia algorytmizacji sterowania produkcją w procesie elektrorafinacji miedzi. Prace VII KKA Rzeszów 1977.

## ПРОБЛЕММА СОСТАВЛЕНИЯ ГРАФИКОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ СЫРЬЯ В ПРОЦЕССЕ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ МЕДИ

Р е з ю м е

В статье представлено математическую модель графика распределения ресурсов сырья в процессе электролитической очистки меди и решение задачи методом ветвей и ограничений.

RESOURCES ALLOCATION SCHEDULING PROBLEM OF THE RAW MATERIALS IN THE COPPER ELECTROREFINING PROCESS

S u m m a r y

This paper considers a Resources Allocation scheduling Problem in the copper elektrorefining process and its optimization. A mathematical formulation of this problem is presented together with the Solution which uses the branch and bound method.