ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI SLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 55 Nr kol. 651

Wiesław Pierzchała
Politechnika Krakowska

ZAGADNIENIE KOLEJNOŚCIOWE W DYSKRETNYM PROCESIE PRODUKCYJNYM PRZY NARZUCONYCH TERMINACH WYKONANIA WYROBÓW

Streszczenie. W referacie rozpatrywany jest dyskretny proces produkcyjny. Sformułowano problem optymalizacji harmonogramu takiego procesu, z kryterium minimalizacji sumy kar za niedotrzymanie terminów wykonania wyrobów oraz kar za przestoje stanowisk. Metodami heurystycznymi poszukuje się podoptymalnych rozwiązań zadania.

1. Wprowadzenie

W realnych warunkach przemysłowych najczęściej mamy do czynienia z systemami produkcyjnymi typu dyskretnego. Procesy zachodzące w tych systemach - najogólniej mówiąc- zmierzają do wykonania pewnego zadania produkcyjnego /zbioru czynności, operacji/, przy użyciu zbioru środków /stanowisk, maszyn/ którymi system dysponuje. Biorąc za punkt wyjścia cel, dla którego system działą, niewątpliwie można sobie wyobrazić wiele procesów o różnym przebiegu /w sensie występowania poszczególnych zdarzeń w czasie/, które w efekcie prowadzą do tego samego /np. tego samego zbioru wyrobów/. Gdyby przyjąć jakieś kryterium efektywności w postaci funkcji celu, można byłoby wśród możliwych procesów znaleźć taki, który tę funkcję optymalizuje, choć z reguły jest to zadanie bardzo trudne.

W procesie produkcyjnym mamy do czynienia z całym szeregiem zjawisk i zdarzeń mniej lub bardziej z sobą związanych. Nas interesować będą tylko te, które bezpośrednio dotyczą wykonywanego przez system zadania produkcyjnego. W optymalizacji tak widzianego dyskretnego procesu produkcyjnego można wyróżnić dwa podstawowe problemy. Pierwszy z nich polega na przydzieleniu do każdego stanowiska zbioru operacji, które na tym stanowisku będą wykonywane albo, inaczej mówiąc, na przydzieleniu do każdej operacji stanowiska, na którym można ją wykonać. Drugi polega na ustaleniu kolejności wykonywania poszczególnych operacji na stanowiskach.

Oba wymienione problemy zalicza się w badaniach operacyjnych do zadań typu kombinatorycznego, pierwszy nazywając zagadnieniem przydziału pracy, a drugi zagadnieniem kolejnościowym /harmonogramowania/.

Zarówno problem przydziału pracy, jak i problem kolejnościowy odznaczają się stosunkowo prostym sformułowaniem, natomiast rozwiązanie, zwłaszcza problemu kolejnościowego, wciąż sprawia spore trudności.

Ponadto, traktując każdy z nich jako sam w sobie samodzielny problem /w zasadzie tak się to do niedawna robiło/, z reguły tracimy rozwiązanie optymalne. Optymalne rozwiązanie problemu kolejnościowego w dużej mierze zależy od tego, jakie operacje przyporządkowano jakim stanowiskom /zagadnienie przydziału/ i odwrotnie. Dlatego też wydaje się, że najrozsądniej byłoby oba wymienione zagadnienia traktować jako jeden problem. Takie podejście jest prezentowane w pracach [1-3], dotyczących tzw. ogólnego zagadnienia kolejnościowego.

Podstawowym celem większości prac dotyczących poruszanych zagadnień jest konstruowanie możliwie skutecznych algorytmów rozwiązujących. Jednakże, wciąż jeszcze olbrzymia większość problemów, o wystarczającym z punktu widzenia praktyki produkcyjnej poziomie ogólności, pozostaje bez rozwiązań. Spotykane w literaturze modele zagadnień kolejnościowych najczęściej obłożone są najrozmaitszymi założeniami upraszczającymi, często trudnymi do spełnienia. Ograniczają one zastosowanie tych modeli, lub czynią je na tyle nieadekwatnymi do rzeczywistości, że praktycznie nie można ich wykorzystywać.

Autor postawił sobie za cel opracowanie skutecznego, heurystycznego algorytmu, który rozwiązując problem kolejnościowy, łącznie z przydziałem operacji do stanowisk, określałby podoptymalny proces produkcyjny, ze względu na możliwie ogólne kryterium. Punktem wyjścia powinien być model matematyczny dopuszczający następujące możliwości:

1. Przedmioty mogą być wykonywane seriami, z których każda może być dzielona na partie transportowe.
2. Każda operacja może być wykonywana przy pomocy dowolnego stanowiska należącego do pewnego podzbioru stanowisk.
3. Czasy jednostkowe tej samej operacji technologicznej na różnych stanowiskach mogą się różnić.
4. Każdym stanowiskiem i każdym przedmiotem /partią przedmiotów/ można dysponować dopiero po pewnym terminie. Terminy te są znane.

Ponadto model powinien uwzględniać następujące, podstawowe założenia:

1. Musi być zachowany technologiczny porządek wykonywania operacji.
2. Czasy jednostkowe poszczególnych operacji technologicznych, czasy przezbrojeń oraz czasy przerw międzyoperacyjnych są znane.
3. Stanowisko przygotowane do danej operacji musi bez przerywania wykonać co najmniej jedną partię transportową.
4. W danej chwili każde stanowisko może wykonywać co najwyżej jedną operację, a każdy z przedmiotów może się znajdować co najwyżej na jednym stanowisku.

2. Model matematyczny dyskretnego procesu produkcyjnego.

Niech

$$/1/ \quad P = \{1,2,\ldots,i,\ldots,p\}$$

będzie zbiorem ponumerowanych typów przedmiotów, które mają być wykonane przy użyciu niepustego zbioru ponumerowanych stanowisk roboczych:

$$/2/ \quad S = \{1,2,\ldots,j,\ldots,s\} \; .$$

Każdy z przedmiotów może być wykonywany w seriach, które z kolei mogą być dzielone na partie transportowe. Niech

$$/3/ \quad R_i = \{1,2,\ldots,k,\ldots,r_i\} \quad i \in P$$

będzie niepustym zbiorem ponumerowanych partii transportowych przedmiotów i-tego typu. Każda z partii będzie dalej traktowana jako niepodzielna. Liczebność partii $k \in R_i$ oznaczana będzie przez n_{ik}.

Umawiamy się więc, że identyfikatorem każdego typu przedmiotów, stanowiska, oraz partii transportowej będzie numer /liczba naturalna/. Jeżeli przykładowo piszemy $j \in S$, to oznacza, że chodzi o stanowisko należące do zbioru S, któremu przyporządkowano numer j.

Każdy z przedmiotów posiada określony proces technologiczny, wymagający wykonania pewnej ilości następujących po sobie operacji technologicznych. Wykonanie k-tej partii transportowej i-tego typu przedmiotów wiąże się z n_{ik}-krotnym powtórzeniem tego ciągu operacji. Wygodnie jest więc przyjąć, że pojęcie "operacja" zawsze odnosić się będzie nie do pojedynczego przedmiotu, ale do całej partii transportowej.

Procesy technologiczne są określone przez rodzinę liniowo uporządkowanych zbiorów operacji:

$$/4/ \quad \langle O_{ik}, T_{ik} \rangle = \{O_{ik}^{/1/}, O_{ik}^{/2/},\ldots,O_{ik}^{/l/},\ldots,O_{ik}^{/w_i/}\} \; , i \in P, \; k \in R_i$$

gdzie: $O_{ik}^{/l/}$ - jest w procesie technologicznym i-tego typu przedmiotów l-tą w kolejności operacją, dotyczącą k-tej partii,

T_{ik} - jest relacją liniowo porządkującą zbiór O_{ik}, reprezentującą wymagania technologicznego porządku wykonywania operacji / $T_{ik} \subset O_{ik} \times O_{ik}$ /.

Sumując wszystkie operacje technologiczne /zbiory $\langle O_{ik}, T_{ik} \rangle$ są rozłączne/ otrzymamy uporządkowany zbiór:

$$/5/ \quad \langle \Omega, T \rangle = \bigcup_{i \in P} \; \bigcup_{k \in R_i} \langle O_{ik}, T_{ik} \rangle \; .$$

W praktyce produkcyjnej często się zdarza, że poszczególne przedmioty z założenia niejednocześnie "wchodzą" do produkcji /zakup surowców, przygotowanie półfabrykatów itd./, chociaż terminy, w których to nastąpi, mogą być znane. Podobnie znany jest termin "udostępnienia" każdego ze stanowisk aktualnie obciążonych lub uszkodzonych i dopiero po tym terminie będzie można z niego skorzystać. Zdarza się też, że zakończenie ostatniej operacji nie oznacza wykonania wyrobu /np. dla wyrobów wymagających sezonowania/. Wszystkie wymienione wymagania można formalnie uwzględnić przez wprowadze-

nie trzech zbiorów operacji dodatkowych:
Rozpoczęcie operacji $O_{ik}^{/1/} \in \Omega$ możliwe jest po zakończeniu operacji $O_{ik}^{/0/} \in \Omega'$ /zwraca się uwagę, że obie dotyczą tej samej partii, tego samego typu przedmiotów/. Stanowiskiem j można dysponować dopiero po terminie ukończenia operacji $O_{00}^{/j/} \in \Omega''$. Wyrób /k-ta partia i-tego typu przedmiotów/ można uważać za gotowy w chwili zakończenia operacji $O_{ik}^{/w_i+1/} \in \Omega'''$.

Wszystkie partie transportowe tego samego typu przedmiotów posiadają oczywiście identyczne procesy technologiczne. Przyjmiemy, że każda z operacji $O_{ik}^{/1/} \in \Omega$, $k \in R_i$ może być wykonana na dowolnym stanowisku podzbioru $S_i^{/1/} \subset S$. W tym sensie stanowiska należące do tego podzbioru są wzajemnie zastępowalne, choć nie muszą być identyczne. W odniesieniu do zbiorów operacji dodatkowych przyjmiemy, że operacja $O_{00}^{/j/} \in \Omega''$ wykonywana jest na stanowisku $j \in S$ /$S_0^{/j/} = \{j\}$, dla każdego $O_{00}^{/j/} \in \Omega''$/, natomiast operacje należące do zbiorów Ω' i Ω'' wykonywane są na stanowisku fikcyjnym o numerze s+1, a więc nie należącym do zbioru S. Zatem $S_i^{/0/} = \{s+1\}$ dla każdego $O_{ik}^{/0/} \in \Omega'$ oraz $S_i^{/w_i+1/} = \{s+1\}$ dla każdego $O_{ik}^{/w_i+1/} \in \Omega'''$. Jednocześnie założymy, że stanowisko to ma nieograniczoną wydajność.
Często wykonywanie pewnych przedmiotów uwarunkowane jest wcześniejszym wykonaniem innych. Są to wymagania typowe np. w procesach montażu. Można je także sprowadzić do warunków określających technologiczny porządek wykonywania operacji. Jeżeli przykładowo wymaga się, aby najpierw wykonywany był przedmiot i-ty a później p-ty, oznacza to, że operacja $O_{ik}^{/w_i+1/}$ powinna poprzedzać operację $O_{pr}^{/0/}$. Oczywiście w produkcji seryjnej kojarzone z sobą w ten sposób przedmioty muszą mieć odpowiednio dobraną liczebność partii transportowych.
Mamy więc do czynienia z dwoma zbiorami: $\hat{S} = S \cup \{s+1\}$, które nazywać będziemy rozszerzonym zbiorem stanowisk oraz zbiorem uporządkowanym $\langle \hat{\Omega}, \hat{T} \rangle$, w którym $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Omega' \cup \Omega'' \cup \Omega'''$ nazywać będziemy rozszerzonym zbiorem operacji, natomiast $\hat{T} \subset \hat{\Omega} \times \hat{\Omega}$ jest relacją określającą wszystkie narzucone przez technologię wymagania co do kolejności wykonywania operacji /łącznie z operacjami dodatkowymi/.
Dla skrócenia pominiemy niektóre definicje i przekształcenia, bez których model jest w pewnej mierze niekompletny, poprzestając na nieco uproszczonych sformułowaniach. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$B_{ik\,j}^{/1/} = \begin{cases} 1, & \text{gdy do wykonania operacji } O_{ik}^{/1/} \in \hat{\Omega} \text{ przydzielono stanow. } j \in S_i^{/1/} \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

$t(O_{ik}^{/1/}, j)$ – czas wykonania operacji $O_{ik}^{/1/} \in \hat{\Omega}$ na stanowisku $j \in S_i^{/1/}$

$\alpha(O_{ik}^{/1/}, O_{pr}^{/s/}, j)$ – czas przezbrojenia stanowiska j dla wykonania operacji $O_{pr}^{/s/} \in \Omega$, jeśli poprzednio wykonywana byłaby na nim operacja $O_{ik}^{/1/} \in \Omega \cup \Omega''$, pod warunkiem, że $j \in S_i^{/1/} \cap S_p^{/s/}$

$\beta(O_{ik}^{/l/}, O_{pr}^{/s/}, j, q)$ - czas przerwy międzyoperacyjnej /wymaganej np. przez transport międzystanowiskowy/ między operacją $O_{ik}^{/l/} \in \hat{\Omega}$ wykonywaną na stanowisku $j \in S_i^{/l/}$, a operacją $O_{pr}^{/s/} \in \hat{\Omega}$ wykonywaną na stanowisku $q \in S_p^{/s/}$, $\langle O_{ik}^{/l/}, O_{pr}^{/s/} \rangle \in \hat{T}$.

$x_{ik}^{/l/}$, $y_{ik}^{/l/}$ - terminy /odpowiednio/ rozpoczęcia i zakończenia operacji $O_{ik}^{/l/} \in \hat{\Omega}$ podawane w odniesieniu do umownej chwili $x_0 \geqslant 0$.

Kryterium optymalizacji będzie oparte na dwóch wielkościach:

$L_{ik} = T_{ik} - T_{ik}^{d}$ - różnica między uzyskanym $/T_{ik}/$ a narzuconym $/T_{ik}^{d}/$ terminem wykonania k-tej partii, i-tego typu przedm.

$\mathcal{T}_j$ - suma czasów przestoju j-tego stanowiska.

Funkcję celu sformułujemy następująco:

$$/6/ \quad Q = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r_i} f_{ik}(L_{ik}) + \sum_{j=1}^{m} g_j(\mathcal{T}_j) \;,$$

gdzie:

$f_{ik}(L_{ik})$ - wartość funkcji kary za niedotrzymanie terminu wykonania k-tej partii przedmiotów i-tego typu;

$g_j(\mathcal{T}_j)$ - wartość funkcji kary za przestoje j-tego stanowiska.

Nasz problem optymalizacyjny można teraz określić następująco:

dla wszystkich $O_{ik}^{/l/} \in \hat{\Omega}$ znaleźć wielkości $B_{ik\,j}^{/l/}$, $x_{ik}^{/l/}$, $y_{ik}^{/l/}$, aby zminimalizować Q, przy ograniczeniach:

$$/7/ \quad \bigwedge_{O_{ik}^{/l/} \in \hat{\Omega}} \left(\sum_{j \in S_i^{/l/}} B_{ik\,j}^{/l/} = 1 \right)$$

$$/8/ \quad \bigwedge_{O_{ik}^{/l/} \in \Omega' \cup \Omega''} \left(x_{ik}^{/l/} \geqslant x_0 \right)$$

$$/9/ \quad \bigwedge_{O_{ik}^{/l/} \in \hat{\Omega}} \left(y_{ik}^{/l/} - x_{ik}^{/l/} \geqslant \sum_{j \in S_i^{/l/}} B_{ik\,j}^{/l/}\, t(O_{ik}^{/l/}, j) \right)$$

$$/10/ \quad \bigwedge_{O_{ik}^{/l/} \in \Omega \cup \Omega''} \; \bigwedge_{O_{pr}^{/s/} \in \Omega} \Big(B_{ik\,j}^{/l/} B_{pr\,j}^{/s/} = 1 \wedge x_{pr}^{/s/} - y_{ik}^{/l/} \geqslant 0 \wedge \sim \bigvee_{O_{uw}^{/z/} \in \Omega} \big(B_{uw\,j}^{/z/} = 1 \wedge$$

$$y_{ik}^{/l/} \leqslant x_{uw}^{/z/} \leqslant x_{pr}^{/s/} - t(O_{uw}^{/z/}, j) \big) \Big) \Rightarrow \left(x_{pr}^{/s/} - y_{ik}^{/l/} \right) \geqslant \mathcal{T}(O_{ik}^{/l/}, O_{pr}^{/s/}, j),$$

$$j \in S_i^{/l/} \cap S_p^{/s/}$$

$$/11/ \quad \bigwedge_{\langle O_{ik}^{/l/}, O_{pr}^{/s/} \rangle \in \hat{T}} \left(\left(B_{ik\,j}^{/l/} B_{pr\,q}^{/s/} = 1 \right) \Rightarrow \left(x_{pr}^{/s/} - y_{ik}^{/l/} \geqslant \beta(O_{ik}^{/l/}, O_{pr}^{/s/}, j, q) \right) \right),$$

$$O_{ik}^{/l/},\; O_{pr}^{/s/} \in \hat{\Omega},\; j \in S_i^{/l/},\; q \in S_p^{/s/} .$$

Każdy z warunków /7/-/11/ posiada swoją naturalną interpretację. Warunek/7/ mówi o tym, że każda operacja ma być wykonywana na jednym i tylko jednym stanowisku. Warunek /8/ oznacza, że proces może się rozpocząć nie wcześniej niż w chwili x_0. Warunek /9/ zapewnia, aby żadna operacja nie była przerywana i nie trwała krócej, niż wynosi czas jej wykonania na przydzielonym stanowisku. Warunek /10/ dotyczy przypadku, gdy dwie operacje $O_{ik}^{/l/}$ i $O_{pr}^{/s/}$ przydzielono do tego samego j-tego stanowiska i przyjęto, że w takiej właśnie kolejności będą one wykonywane. W tej sytuacji operacja $O_{pr}^{/s/}$ może się rozpocząć dopiero po zakończeniu operacji $O_{ik}^{/l/}$ i przezbrojeniu stanowiska. Warunek /11/ zapewnia istnienie przerwy międzyoperacyjnej między każdą parą operacji z ciągu technologicznego.

3. Uwagi o metodyce rozwiązywania problemu

Opisany problem kolejnościowy można sprowadzić do zadania budowy pewnej sieci, dla której funkcja celu /6/ osiąga minimum. Teoria grafów okazała się bardzo wygodnym i co ważniejsze skutecznym narzędziem w modelowaniu i rozwiązywaniu problemów tej grupy. Trudno bez dowodu zakwalifikować rozważany problem do klasy NP-zupełnych /w sensie złożoności obliczeniowej/. Jest jednakże niemal pewne, że nie istnieje dla niego wielomianowy algorytm rozwiązujący. Ponadto należy pamiętać, że z zagadnieniami tego typu najczęściej mamy do czynienia na etapie sterowania pracą systemu, gdzie skuteczność algorytmu /zwłaszcza w sensie szybkości liczenia/ ma ogromne znaczenie. Dlatego też rozwiązanie będzie poszukiwane przy pomocy algorytmu heurystycznego, który, budując posiadającą określone własności sieć, znajduje podoptymalne rozwiązanie zadania. Jest to zresztą podejście odpowiadające obserwowanej tendencji do budowania możliwie ogólnych modeli i rozwiązywania ich /w trudnych przypadkach/ metodami przybliżonymi.
Został opracowany taki program, który rozwiązuje problem nieco prostszy niż prezentowany w referacie. W oparciu o tamte doświadczenia obecnie uruchamiany jest algorytm heurystyczny dla zadania w przedstawionej wersji. Specyficzne kryterium prowadzi do tego, że algorytm "dba" o terminy wykonania wyrobów oraz ciągłość pracy stanowisk. Uzyskane rozwiązanie, w miarę potrzeb, będzie można próbować poprawić przy pomocy algorytmu "przebudowującego" wspominany graf.

LITERATURA

[1] Adrabiński A.,Wodecki M. :An algorithm for solving the machine sequencingproblem with parallel machines. Zastosowania Matematyki, XVI,3 /1979/.

[2] Grabowski J. : Algorytmy optymalizacji i sterowania w dyskretnych systemach produkcyjnych. Prace Naukowe Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Seria: Monografie, Nr 7, Wrocław 1977.

[3] Grabowski J. : Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia kolejnościowego z równoległym wykorzystaniem maszyn. Arch. Autom. i Telemech., T.XXIII,Z.1-2 /1978/.

[4] Iwata K., Murotsu Y., Oba F., Uemura T. : Optimization of selection of Machine-Tools, Loading Sequence of Parts and Machining Conditions in Job-Shop Type Machining Systems. Annals of the CIRP, vol. 27 I, 447-451 /1978/.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА В ДИСКРЕТНОМ ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ПРОЦЕССЕ С ДАННЫМИ СРОКАМИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ

Р е з ю м е

В работе рассмотривается дискретный производственный процесс. Представлено задачу оптимализации графика работ с критерием минимализации суммы штафов из-за невыполнения сроков изготовления изделий и простев рабочих мест. Евристическими методами ищется субоптимальных решений задачи.

THE SCHEDULING PROBLEM IN A DISCRETE INDUSTRIAL PROCESS UNDER TIME--LIMITS OF PRODUCTS COMPLETION

S u m m a r y

In this paper a discrete industrial process is discussed. An optimization problem of scheduling of this process is formulated, where the assumed criteria are, the sum of penalties for prolongation of time--limits of products execution, and penalties for down-time of work--places. The heuristic methods are used in order to find suboptimal solutions for this task.