ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: AUTOMATYKA z. 55 Nr kol. 651

Olgierd Hryniewicz
Instytut Badań Systemowych PAN

KONTROLA JAKOŚCI WYROBÓW OPISANYCH ZBIOREM CECH /KOMUNIKAT/

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę statystycznej kontroli jakości wyrobów opisanych zbiorem cech o różnych wagach. Wyznaczono krzywą operacyjno-charakterystyczną planów kontroli.

1. Wstęp

Wzrastające wymagania stawiane jakości produktów wytwarzanych masowo stwarzają konieczność rozwijania statystycznych metod kontroli jakości. Jak wiadomo, statystyczna kontrola jakości polega na ocenie jakości całej partii produkcji na podstawie wyniku badania pobranej z tej partii próbki losowej. W przypadku negatywnej oceny badanej próbki cała partia jest odrzucana (brakowana lub poddana ponownej segregacji), natomiast w przypadku oceny pozytywnej kontrolowana partia jest przyjmowana (wraz ze znajdującymi się w niej elementami wadliwymi). Jeżeli ocena jakości badanych wyrobów jest oceną alternatywną, tzn. dobry lub zły, to procedura decyzyjna w najprostszym przypadku jest następująca: pobrać próbkę losową o liczności n sztuk; jeżeli w badanej próbce jest więcej niż c sztuk złych, partię odrzucamy, jeżeli mniej - przyjmujemy. Parę liczb (n,c), charakteryzującą regułę decyzyjną, nazywamy planem badania. Plan badania określa się na podstawie analizy tzw. krzywej operacyjno-charakterystycznej planu opisującej zależność prawdopodobieństwa przyjęcia partii przy wykorzystaniu danego planu badania od wadliwości w całej partii. W przypadku planu opisanego parą (n,c) krzywa operacyjno-charakterystyczna jest wyznaczana więc z zależności:

$$L(w, n, c) = P(D \leqslant c \mid n, w) \qquad /1/$$

gdzie: D jest liczbą losową elementów wadliwych w próbce o liczności n.

Statystyczna kontrola jakości, działająca na podstawie podanych powyżej zasad, została znacznie rozwinięta i znalazła szerokie zastosowanie w praktyce. Odnosi się to jednak do przypadku, gdy możemy jednoznacznie zakwalifikować badany obiekt do grupy elementów dobrych albo grupy elementów wadliwych. Sytuacja ta nie ma miejsca wówczas, gdy badane elementy opisywane są zbiorami cech o różnym stopniu ważności. W tym przypadku element wadliwy ze względu na cechę mało ważną (np. zarysowanie obudowy) nie może być jednakowo traktowany jak element wadliwy ze względu na cechę o dużej wadze. W celu ujęcia tego problemu wprowadza się różne wskaźniki jakości partii oparte na ważonych wadliwościach partii. Analiza jednego z nich - wskaźnika Q_L - jest treścią niniejszej pracy.

Załóżmy, że elementy wadliwe możemy podzielić na k rozłącznych klas odznaczających się różnymi stopniami ważności (wagami) wad. Do klasy o wadze A_1 kwalifikujemy elementy posiadające tzw. wady krytyczne, do kolejnych zaś klas kwalifikujemy elementy o wadach mniej ważnych $(A_1 > A_2 > \ldots > A_k)$. Oznaczmy przez w_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ wadliwość kontrolowanej partii ze względu na wady należące do i-tej klasy. Wskaźnik jakości Q_L definiowany jest następująco:

$$Q_L = 100 - (100/A_1) \sum_{i=1}^{k} w_i A_i \qquad /2/$$

Jak widać, wskaźnik ten przyjmuje wartość 100, gdy w badanej partii nie ma elementów wadliwych, wartość 0 zaś, gdy wszystkie elementy partii są wadliwe i należą do klasy o największej wadze.

Mając określony w powyższy sposób wskaźnik jakości, możemy stawiać wymagania dotyczące jakości odbieranej partii. Wymagania te należy później kontrolować metodami statystycznymi, konstruując odpowiednie plany badania. Prezentacja modelu matematycznego takiej kontroli jest celem niniejszej pracy.

2. Model statystycznej kontroli wskaźnika Q_L

Statystyczna kontrola wskaźnika Q_L polega na pobraniu z badanej partii próbki losowej o liczności n sztuk, wyznaczeniu oszacowania $\hat{Q}_L$ wskaźnika Q_L w badanej próbce i porównaniu tego oszacowania z zadaną wartością $Q_{L,D}$. Jeżeli zaobserwowana w próbce wartość $\hat{Q}_L$ jest mniejsza niż $Q_{L,D}$, to partię odrzucamy. W przeciwnym przypadku partię przyjmujemy.

Do wyznaczenia parametrów $(n, Q_{L,D})$ planu badania potrzebna jest znajomość krzywej operacyjno-charakterystycznej takiego planu, tzn. zależności

$$L(Q_L, n, Q_{L,D}) = P(\hat{Q}_L \geqslant Q_{L,D} | Q_L, n) \qquad /3/$$

$$\hat{Q}_L = 100 - (100/A_1) n^{-1} \sum_{i=1}^{k} D_i A_i \qquad /4/$$

gdzie: D_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ jest losową liczbą sztuk wadliwych w próbce zakwalifikowanych do i-tej klasy.

Oznaczmy przez $\hat{Q}$ statystykę

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^{k} D_i A_i \qquad /5/$$

przez M zaś wielkość następującą

$$M = \frac{nA_1}{100}(100 - Q_{L,D}) \qquad /6/$$

Mamy wówczas

$$P(\hat{Q}_L \geqslant Q_{L,D} | Q_L, n) = P(\hat{Q} \leqslant M) \qquad /7/$$

Tak więc do wyznaczenia krzywej opracyjno-charakterystycznej planu potrzebna jest znajomość rozkładu prawdopodobieństwa statystyki $\hat{Q}$.

Oznaczmy przez D losową liczbę elementów wadliwych w próbce. Można zauważyć, że słuszna jest zależność

$$P(\hat{Q} = i) = \sum_{j=0}^{n} P(D = j)\, C_j^{(i)} \qquad /8/$$

gdzie: $C_j^{(i)}$ oznacza prawdopodobieństwo, że suma wag j elementów wadliwych wynosi i.

Niech p_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ oznacza prawdopodobieństwo, że znajdujący się w próbce element wadliwy należy do i-tej klasy. Łatwo zauważyć, że

$$p_i = \frac{w_i}{w_1 + \ldots + w_k} \qquad /9/$$

Prawdopodobieństwo $C_j^{(i)}$ można teraz zapisać następująco:

$$C_j^{(i)} = \sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_k : \sum_{m=1}^{k} l_m = j) \\ 0 \leqslant l_m \leqslant i,\ m=1,\ldots,k}} V(l_1,\ldots,l_k) \frac{j!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!} \prod_{m=1}^{k} p_m^{l_k} \qquad /10/$$

gdzie:

$$V(l_1,\ldots,l_k) = \begin{cases} 1 \text{ dla } \sum_{j=1}^{k} l_j A_j = i \\ 0 \text{ dla pozostałych przypadków} \end{cases} \qquad /11/$$

przy czym $C_0^{(0)} = 1$.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia występującego we wzorze /8/ prawdopodobieństwa $P(D = j)$.

Jak wiadomo [2], rozkład prawdopodobieństwa liczby sztuk wadliwych w próbce jest rozkładem hipergeometrycznym. W praktyce stosuje się jednak aproksymacje tego rozkładu rozkładami: dwumianowym i Poissona. Aproksymacje te są słuszne, gdy liczność próbki jest mała w porównaniu z licznością kontrolowanej partii, wadliwość zaś nie większa niż 10%. Warunki te są zazwyczaj spełnione w praktyce i stosowanie aproksymacji jest uzasadnione.

Przyjmijmy w naszym przypadku, że do wyznaczania prawdopodobieństwa $P(D = j)$ skorzystamy z aproksymacji rozkładu hipergeometrycznego rozkładem Poissona. Mamy wówczas

$$P(D = j) = \frac{(wn)^j}{j!} \exp(-wn) \qquad /12/$$

gdzie wadliwość w można wyznaczyć w funkcji Q_L w następujący sposób:

$$w = \frac{100 - Q_L}{(100/A_1) \sum_{i=1}^{k} p_i A_i} \qquad /13/$$

W rezultacie krzywą operacyjno-charakterystyczną planu badania można wyznaczyć z zależności

$$L(Q_L, n, Q_{L,D}) = \sum_{i=0}^{M} P(\hat{Q} = i) \qquad /14/$$

Mając krzywą operacyjno-charakterystyczną planu badania, możemy wyznaczyć parametry planu badania, tzn. liczność próbki n i wartość krytyczną $Q_{L,D}$. Sposób wyznaczania parametrów planu na podstawie jego krzywej operacyjno-charakterystycznej podano m. in. w pracy [3].

3. Estymacja parametrów funkcji operacyjno-charakterystycznej

Jak wynika z rozważań przeprowadzonych w pkcie 2, do wyznaczenia krzywej operacyjno-charakterystycznej planu kontroli wskaźnika Q_L potrzebna jest znajomość prawdopodobieństw p_i definiowanych zależnością /9/. Jeżeli prawdopodobieństwa te są w przybliżeniu stałe w czasie, to wyznaczony jednorazowo plan badania można stosować do oceny jakości produkcji w długich okresach czasu. Doświadczenie z przemysłu elektronicznego wykazuje, że warunek ten jest zazwyczaj spełniony. W związku z tym prawdopodobieństwa p_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ można wyznaczyć na początku okresu stabilnej produkcji i korzystając z otrzymanych ocen tych parametrów, wyznaczyć odpowiedni plan badania.

Jak łatwo zauważyć, parametry p_i można traktować jako wektor parametrów k-wymiarowego rozkładu wielomianowego. Jeżeli posiadamy uprzednią informację o spodziewanych wartościach prawdopodobieństw p_i, a jest to sytuacja najczęściej spotykana w praktyce, to do estymacji można wykorzystać metody oparte na twierdzeniu Bayesa.

Przyjmijmy, że rozkład a priori wektora $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ jest rozkładem Dirichleta o gęstości

$$f(p_1,p_2,\ldots,p_k) = \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_k)} \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \qquad /15/$$

$$(p_i > 0,\ a_i > 0,\ i = 1,\ldots,k;\ \sum p_i = 1)$$

i wartościach oczekiwanych

$$E(p_i) = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} \qquad /16/$$

Załóżmy, że obserwujemy realizacje k-wymiarowego wektora opisanego rozkładem wielomianowym i przez x_i oznaczamy liczbę realizacji i-tej składowej wektora. W naszym przypadku x_i oznacza liczbę zaobserwowanych elementów wadliwych w danej klasie. Można wykazać [1], że rozkład a posteriori wektora $(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ jest również rozkładem Dirichleta o wektorze parametrów $(a_1' = a_1 + x_1,\ldots,a_k' = a_k + x_k)$. Jeżeli założymy, że funkcja strat wynikłych z błędnej oceny parametrów p_i jest kwadratowa,to optymalne oceny odpowiadają wartościom oczekiwanym w rozkładzie a posteriori, wyznaczonym ze wzoru /16/.

W celu wykorzystania powyższej metody należy założyć odpowiednie wartości parametrów a_i $(i = 1,2,\ldots,k)$. Przyjmijmy, że A_i $(i = 1,\ldots,k-1)$ oznacza spodziewaną wartość parametru p_i. Wartość a_k przyjmujemy arbitralnie, przy czym większym wartościom a_k odpowiada mniejsza niepewność co do naszej oceny parametrów p_i. Parametry a_i $(i = 1,\ldots,k-1)$ możemy teraz wyznaczyć z układu równań

$$\frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k} = A_i,\ i = 1,\ldots,k-1 \qquad /17/$$

Bliższa analiza powyższej metody znajduje się w pracy [4].

4. Zakończenie

Wstępna analiza omawianego w pracy problemu wykazuje, że jej praktyczne wykorzystanie jest uwarunkowane posiadaniem odpowiedniej bazy obliczeniowej oraz systemu zbierania informacji o procesie produkcyjnym. Oba te warunki są najłatwiejsze do spełnienia w przypadku procesów zautomatyzowanych, sterowanych przez komputer. W chwili obecnej opracowane są programy do wyznaczania charakterystyk planów odbiorczych [4]. Procedurę wyboru odpowiednich parametrów planu na podstawie znajomości ich charakterystyk daje się stosunkowo łatwo zalgorytmizować. Również procedura wyznaczania parametrów p_i może być realizowana na podstawie danych uzyskanych z systemu informatycznego zbierającego informacje o przebiegu procesu produkcyjnego. W przypadku, gdy nie jest możliwa automatyzacja procedur kontrolnych,możliwe jest skonstruowanie zestawu planów spełniających w przybliżeniu wymagania stawiane planom kontroli. Zagadnienie to zostało omówione w pracy [4].

LITERATURA

[1] De Groot M.H.: Optimal statistical decisions. McGraw-Hill, New York 1970 (tłum. ros. 1974).

[2] Gniedenko B.W., Bielajew J.K., Sołowiew A.D.: Metody matematyczne w teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1968.

[3] Firkowicz S.: Statystyczne badanie wyrobów. WNT, Warszawa 1970.

[4] Hryniewicz O., Kocerka H., Poliszot E.: Opracowanie metod oceny produkcji w oparciu o statystyczne metody oceny jakości wyrobów z wykorzystaniem EMC. Oprac. wewn. IBS PAN dla OBR ESPU w Warszawie. Warszawa 1980.

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА ИЗДЕЛИЙ СО МНОГИМИ КАЧЕСТВЕННЫМИ ПРИЗНАКАМИ

Р е з ю м е

В работе рассуждена проблема выборочного контроля качества изделий со многими признаками. Из-за многих признаков дефекты могут быть делены на несколько категорий, каждая с разным весом/большом если дефект серёзный, малом если значимость дефекта не велика/. Определено рабочую характеристику выборочного плана и предложено методику оценки её параметров.

THE QUALITY CONTROL OF MULTI-ATTRIBUTE ITEMS

S u m m a r y

The problem of the sampling´s acceptance of the multi-attribute items is considered. Due to many attributes of an item failed elements can be assigned to disjoint classes, each with different weight /greater if a failure is connected with important attribute and less if a failure is unsignificant/. Operating characteristic function for the acceptance sampling plan is determined and the method for the estimation of the plan´s parametres is proposed.