ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 38 Nr kol. 357

MACIEJ SIWCZYŃSKI
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O PEWNEJ TRANSFORMACJI ZESPOLONEJ I JEJ ZASTOSOWANIU DO TRÓJFAZOWYCH UKŁADÓW ELEKTROMASZYNOWYCH

Streszczenie. Praca niniejsza zajmuje się dynamiką sieci "n"-przewodowych zawierających symetryczne układy elektromechaniczne w postaci maszyn asynchronicznych i synchronicznych. Do opisu tych sieci używane są współrzędne powiązane transformacjami unitarnymi zależnymi od czasu. Równania dynamiki sieci dla tych współrzędnych sformułowane są w sposób współzmienniczy. Dzięki temu osiągnięto znaczną unifikację równań maszyn asynchronicznych i synchronicznych w dowolnych, niesymetrycznych stanach pracy.

1. Własności transformacji

Będziemy rozpatrywać sieć elektryczną o "n"-fazowej budowie gałęzi. Sieć ta zawiera elementy statyczne (liniowe rezystancje, indukcyjności, pojemności) i elektromechaniczne (maszyny asynchroniczne, maszyny synchroniczne). Wszelkie pobudzenia występujące w tych sieciach będą sinusoidalne.

Każdej gałęzi wspomnianej wyżej sieci odpowiada jeden punkt, a każdemu punktowi odpowiada "n" współrzędnych. Współrzędnymi tymi są wartości chwilowe prądów, napięć, liniczwoi, ładunków elektrycznych. W ten sposób otrzymuje się układ współrzędnych. Można powiedzieć, że w każdej chwili każdemu punktowi sieci odpowiada wektor $x \in X_n$, gdzie X_n jest pewną n-wymiarową przestrzenią.

Wprowadzimy teraz do rozważań całą klasę układów współrzędnych powiązanych ze sobą transformacjami unitarnymi S_i spełniającymi następujący warunek [1]:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\sigma_i S_i, \tag{1}$$

gdzie σ_i będziemy dalej nazywać macierzą własną transformacji S_i. Szczególnym przypadkiem takiej transformacji może być przykład dwóch układów współrzędnych przestrzennych poruszających się względem siebie.

Niech x oraz x' oznaczają wektory w dwóch różnych układach współrzędnych powiązanych ze sobą transformacją S_1.

Zachodzi zatem:

$$x' = S_1 x. \tag{2}$$

Śledząc za [1] definiujemy:

$$\frac{\delta_1^k x}{\delta_1 t^k} = S_1 \frac{d^k x}{dt^k}. \tag{3}$$

W [1] udowodniono, że jeżeli macierz S_1 spełnia warunek (1), to $\frac{\delta_1^k x}{\delta_1 t^k}$ da się przedstawić przy pomocy zwykłych pochodnych $\frac{d^j x}{dt^j}$, $j = 1,2 \ldots k$ oraz macierzy własnych przekształcenia.

Jak pokazano w [1] obowiązuje związek rekurencyjny:

$$\frac{\delta_1^k x}{\delta_1 t^k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta_1^{k-1} x}{\delta_1 t^{k-1}}\right) + \sigma_1 \frac{\delta_1^{k-1} x}{\delta_1 t^{k-1}} \tag{4}$$

Układ współrzędnych dla którego:

$$\frac{\delta^k x}{\delta t^k} = \frac{d^k x}{dt^k}$$

dla dowolnego, naturalnego k, będziemy nazywali podstawowym.

Każdemu punktowi sieci przyporządkowane są bezpośrednio współrzędne fazowe. Wektory i macierze w tym układzie współrzędnych będziemy oznaczać znakiem (f) pisanym u dołu symbolu. Fazowy układ współrzędnych jest układem podstawowym.

2. Współzmienniczość równań opisujących sieć

W punkcie niniejszym pokażemy w jaki sposób transformują się równania różniczkowe opisujące sieci złożone, po transformacji współrzędnych macierzą unitarną S_1 spełniającą warunek (1).

Każda sieć elektryczna o "n"-fazowej budowie gałęzi zawierająca elementy statyczne i elementy elektromechaniczne o nienasyconych obwodach magnetycznych, da się opisać układem równań:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{k_i} \underset{(f)}{A}{}_{kij} \frac{d^k_{(f)} x_i}{dt^k} = \underset{(f)}{w}{}_j \qquad j = 1,2, \dots l \tag{5a}$$

Gdzie $\underset{(f)}{A}{}_{ki}$ jest macierzą o elementach zależnych od czasu.

Jak pokazano w [1] równanie to może być zapisane w postaci współzmiennicze w sposób następujący:

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{k=0}^{k_i} A_{kij} \frac{\delta_j^k x_i}{\delta_j t^k} = w_j, \tag{5b}$$

gdzie:

$$A_{kij} = S_j \underset{(f)}{A}{}_{kij} S_i^{-1} \tag{6}$$

W [1] użyto także zapisu:

$$\frac{\delta_i^n x}{\delta_i t^n} = (\sigma_i + \frac{d}{dt})^n x \tag{7}$$

Zapis ten jest słuszny także przy σ_i zależnym od czasu, jednakże wtedy w relacji (7) nie można stosować wzoru potęgowego Newtona.

Bardzo często celem ułatwienia praktycznych obliczeń wygodnie jest wprowadzić wektory symboliczne $\underset{(f)}{\tilde{x}}$ w fazowym układzie współrzędnych oraz $\tilde{x}$ w innym układzie współrzędnych.

Wektor symboliczny $\underset{(f)}{\tilde{x}}$ jest zdefiniowany tak, aby:

$$\underset{(f)}{x} = \frac{1}{2} (\underset{(f)}{\tilde{x}} + \underset{(f)}{\tilde{x}}{}^*). \tag{8}$$

Jak łatwo pokazać, w dowolnym układzie współrzędnych zachodzi:

$$x = \frac{1}{2} (\tilde{x} + T \tilde{x}^*), \tag{9}$$

gdzie

$$T = SS^T.$$

Jak stwierdzono w [1], jeżeli $\underset{(f)}{A}_{kij}$ są macierzami o rzeczywistych elementach, to równania (5a) transformują się w (5b) także i dla wektorów symbolicznych. Wtedy także obowiązuje zasada współzmienniczości zapisu równań sieci.

3. Współzmienniczość równań mocy

Ze względu na dynamikę układów elektromechanicznych będzie nas interesować moc chwilowa, która w fazowym układzie współrzędnych wyraża się relacją:

$$p = \underset{(f)}{i}^T \underset{(f)}{u}. \tag{10a}$$

Można łatwo pokazać, że jeżeli macierz transformacyjna S spełnia warunek unitarności, to obowiązuje relacja:

$$p = i^{*T} u. \tag{10b}$$

Podobnie, zasada współzmienniczości równań obowiązuje dla energii zmagazynowanych w indukcyjnościach i pojemnościach sieci.

Jeżeli użyć wektorów symbolicznych, moc chwilowa wyrazi się relacją:

$$p = \frac{1}{4}\left(\tau^{*T}\tilde{u} + \tau^T\tilde{u}^* + \tau^{*T}T\tilde{u}^* + \tau^T T\tilde{u}\right). \tag{10c}$$

4. Operatory

Wprowadzamy za [1] operatory P i $\mathcal{K}_1$ oznaczające operacje różniczkowania $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\delta_1}{\delta_1 t}$.

Na mocy (7) słuszny jest związek:

$$\mathcal{K}_1 = P + \delta_1.$$

Załóżmy dalej, że S(t) jest macierzą o niezależnej od czasu macierzy własnej.

Wprowadzamy operator całkowania:

$$\mathcal{K}^{-1}\left\{u(t)\right\} = \int_0^t S(t)\, S^{-1}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

Wtedy [1] operator różniczkowania działa na wektor u(t) w sposób następujący:

$$\mathcal{T}\left\{u(t)\right\} = \frac{\delta u}{\delta t} + u(o) \tag{12}$$

W [1] udowodniono następujące własności operatora $\mathcal{T}$

1) $\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} = I$ ...x)

2) Jeżeli A jest macierzą o elementach niezależnych od czasu, to:

$$(\mathcal{T} + A)(\mathcal{T} + A)^{-1} = (\mathcal{T} + A)^{-1}(\mathcal{T} + A) = I$$

3) Niech $\mathcal{T}^{\sigma_1}$, $\mathcal{T}^{\sigma_2}$ będą operatorami odpowiadającymi transformacjom o macierzach własnych σ_1, σ_2, wtedy zachodzi:

$$\mathcal{T}^{\sigma_2}(\mathcal{T}^{\sigma_1})^{-1}u(t) = u(t) + (\sigma_2 - \sigma_1)\, S_{\sigma_1}(t) \int_0^t S_{\sigma_1}^{-1}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

4) $$(\mathcal{T}^{\sigma_1})^{-1}\mathcal{T}^{\sigma_2}u(t) = u(t) + S_{\sigma_1}(t) \int_0^t S_{\sigma_1}^{-1}(\tau)(\sigma_2 - \sigma_1)\, u(\tau)\, d\tau$$

Operator $\mathcal{T}^{\sigma_2}(\mathcal{T}^{\sigma_1})^{-1}$ nazwiemy ułamkiem operatorowym prostym. W pewnych przypadkach, najczęściej w praktyce spotykanych ułamek ten jest przemienny. Zagadnienie przemienności ułamków operatorowych prostych jest dyskutowane dokładnie w [1], tutaj nie będziemy się tym zajmować. Własności od 1 do 4 operatora $\mathcal{T}$ są bardzo istotne, gdyż pozwalają na odwracanie złożonych wyrażeń operatorowych występujących w równaniach sieci. Pozwala to na zastosowanie operatorów $\mathcal{T}$ do rozwiązywania układów równań (5b) o stałych macierzach A_{kij}. Do tego typu równań dadzą się sprowadzić równania opisujące sieci o "n"-fazowej symetrycznej budowie gałęzi zawierające maszyny asynchroniczne i sztywne symetryczne, lub niesymetryczne źródła napięcia sinusoidalnego.

5. Maszyna asynchroniczna jako element ułożonej sieci elektrycznej

Rozpatrywanie maszyny asynchronicznej jako elementu "wpiętego" do złożonej sieci o "n"-fazowej budowie gałęzi natrafia zwykle na trudności natury formalnej. Trudności te można ominąć stosując współzmienniczy zapis równań sieci. W ogólnym przypadku równania dynamiki sieci zawierających maszyny asynchroniczne są nieliniowe, ze względu na równoczesną zmianę prędkości obrotowych.

...x) I – macierz jednostkowa.

Poniżej dla uproszczenia zagadnienia rozpatrzymy dynamikę maszyny asynchronicznej jako elementu sieci przy założeniu stałej prędkości obrotowej.

W [1] użyto współzmienniczego zapisu równań maszyny asynchronicznej. Ma on postać:

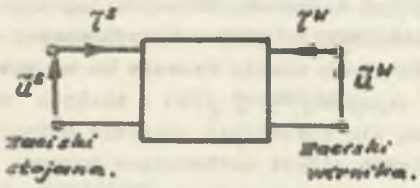
$$\tilde{u}^s = R^{ss}\,\tau^s + \frac{\delta_s}{\delta_s t}\left(L^{ss}\,\tau^s\right) + \frac{\delta_s}{\delta_s t}\left(L^{sw}\,\tau^w\right) \tag{13}$$

$$\tilde{u}^w = \frac{\delta_w}{\delta_w t}\left(L^{ws}\,\tau^s\right) + R^{ww}\,\tau^w + \frac{\delta_w}{\delta_w t}\left(L^{ww}\,\tau^w\right).$$

Macierze rezystancji i indukcyjności występujące w równaniach (13) są diagonalne o stałych elementach. W zapisie operatorowym równania (13) przyjmą postać:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}^s \\ \hline \tilde{u}^w \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^{ss} + \pi^s L^{ss} & \pi^s L^{sw} \\ \hline \pi^w L^{ws} & R^{ww} + \pi^w L^{ww} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tau^s \\ \hline \tau^w \end{bmatrix} \tag{14}$$

Równanie (14) wskazuje na czwórnikowy charakter ujęcia maszyny asynchronicznej.



Rys. 1. Maszyna asynchroniczna jako element sieci

Układ równań (14) pozwala na opis dynamiki maszyny asynchronicznej jako elementu złożonej sieci. Przy założeniu stałej prędkości obrotowej macierz impedancyjna równania (14) jest odwracalna. Otrzymujemy w ten sposób bardzo prostą metodę analizy stanów nieustalonych w maszynach asynchronicznych pozwalająca natychmiast uzyskać wynik w postaci równań przebiegów interesujących nas wielkości. Przykłady takie rozwiązane są w [1].

6. Maszyna synchroniczna jako element sieci

Analiza maszyny synchronicznej jako elementu sieci trójfazowej jest pod względem matematycznym nieco bardziej skomplikowana niż w przypadku maszyny asynchronicznej.

Równania maszyny synchronicznej zapisane w postaci współzmiennniczej prawie niczym się nie różnią od (13) i mają postać [1]:

$$\tilde{u}^s = R^{ss} i^s + \frac{\delta_s (L^{ss} i^s)}{\delta_s t} + \frac{\delta_s \tilde{\psi}^{sw}}{\delta_s t}$$

$$\tilde{u}^w = R^{ww} i^w + \frac{\delta_w (L^{ww} i^w)}{\delta_w t} + \frac{\delta_w \tilde{\psi}^{ws}}{\delta_w t}, \tag{15}$$

gdzie

$$\tilde{\psi}^{sw} = \sqrt{3}\, l^{sw} i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \tilde{\psi}^{ws} = L^{ws} i^s;$$

$$L^{ws} = \frac{\sqrt{2}}{2} l^{sw} \left[0 \,,\, 1 \,,\, e^{2j\omega t}\right].$$

Równania (15) po rozpisaniu prowadzą do równań liniowych o okresowo zmiennych współczynnikach, które w przypadku pracy symetrycznej przechodzą w równania ze współczynnikami stałymi. Tym tłumaczy się matematycznie fakt pojawienia się wyższych harmonicznych w przebiegach ustalonych przy pracy niesymetrycznej. W pracy [1] podane zostały przykłady analizy niesymetrycznej pracy maszyny synchronicznej. Wyniki tam uzyskane pozwalają określić przebiegi czasowe amplitud, zespolonych szeregów Fouriera prądów i napięć w stanach nieustalonych.

Równania dynamiki maszyny synchronicznej jednofazowej pochodzące z przekształcenia układu (15) są doprowadzone w [1] do postaci następującej:

$$a_{s1} \frac{d i_z^s}{dt} + b_{s1} i_z^s + a_{w1} \frac{d i^w}{dt} + b_{w1} i^w - \tilde{u}_z^s = 0$$

$$a_{s2} (1 + e^{2j\omega t}) \frac{d i_z^s}{dt} + b_{s2} e^{2j\omega t} i_z^s + \tag{16}$$

$$+ a_{w2} \frac{d i^w}{dt} + b_{w2} i^w - \tilde{u}^w = 0.$$

Współczynniki w równaniach (16) są zespolone i zależą od parametrów maszyny; i_z^s, i^w, $\tilde{u}_z^s$, $\tilde{u}^w$ oznaczają odpowiednio prądy i napięcia stojana i wzbudzenia.

Jak pokazano w [1] rozwiązania układu (16) należy poszukiwać w postaci szeregów:

$$\tau_z^s(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \tau_{2n}^s(t) e^{j2n\omega t}$$

$$\tau^w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{2n}^w(t) e^{j2n\omega t}$$

istnieje wtedy możliwość określenia funkcji $\tau_{2n}^s(t)$, $\tau_{2n}^w(t)$.
Analiza pełnej dynamiki maszyny synchronicznej prowadzi również do równań nieliniowych, których rozwiązanie jest znacznie trudniejsze, mimo to metody przedstawione powyżej mogą i tutaj mieć dużą wartość użytkową.

LITERATURA

1. Siwczyński Maciej: "Synteza strukturalna synchronicznych układów elektromechanicznych w oparciu o zasadę inwariantności". Praca doktorska. Gliwice 1972 r.

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КООРДИНАТ СИММЕТРИЧНЫХ "n"-ПРОВОДНЫХ ЦЕПЕЙ С ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Р е з ю м е

В статье рассмотрены проблемы динамики "n"-проводных симетричных цепей с электромеханическими асинхронными и синхронными элементами. Уравнения этих систем сформулированны ковариантно с помощью координат связанных с собой матричными преобразованиями зависящими от времени.

Эти преобразования удовлетворяют условиям которое приведены в статье.

CERTAIN COMPLEX TRANSFORMATION AND ITS APPLICATION TO THREE-PHASE ELECTROMECHANICAL SYSTEMS

S u m m a r y

The paper discusses dynamic of the "n"-lines network including symmetrical electromechanical elements. The coordinations connected with time conditioned unitary transformation are used for description of these networks. Equations of networks dynamic, for these coordinates, are formulated in covariation way.

The method allows to unificate synchronius and asynchronous machines equations in free asymetrical conditions of work.