ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: ELEKTRYKA z. 38 Nr kol. 357

BERNARD BARON

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O PEWNYM SPOSOBIE IDENTYFIKACJI UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO

Streszczenie. W artykule wykorzystano metody przestrzeni Riemanna oraz rachunek wariacyjny do układania równań d'Alemberta-Lagrange'a układów elektromechanicznych. Następnie wyeliminowano w równaniu ruchu układu elektromechanicznego reakcję więzów, wprowadzając w tym celu quasi-współrzędne.

1. Równanie Lagrange'a-Maxwella układu elektromechanicznego

Weźmy pod uwagę układ elektromechaniczny zawierający N-1 uzwojeń, z których trzy mieszczą się w stojanie, a pozostałe w wirniku. Niech $\dot{q}^k$ ($k = 1,2, \ldots, N-1$) oznaczają prądy w uzwojeniach rozpatrywanego układu elektromechanicznego, a M_{kl} - współczynniki samoindukcji i indukcji wzajemnej Jeżeli szczelina powietrzna między wirnikiem i stojanem jest równomierna, wtedy od kąta obrotu q^N wirnika zależą jedynie współczynniki indukcji wzajemnej między wirnikiem i stojanem. Za współrzędne uogólnienie rozpatrywanego układu elektromechanicznego przyjmujemy ładunki q^k($k=1,2,\ldots N-1$) uzwojeń, przy czym pochodne względem czasu ładunków $\dot{q}^k$ stanowią prądy uzwojeń oraz współrzędną mechaniczną q^N. Ograniczyliśmy się do tego, że część mechaniczna układu posiada jeden stopień swobody chociaż w dalszych rozważaniach ogólnych wystarczyło by przyjąć skończoną liczbę mechanicznych stopni swobody.

Energia magnetyczna układu wyraża się wzorem

$$T_{mag} = \frac{1}{2} M_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l \tag{1}$$

gdzie sumowanie odbywa się po wskaźnikach k, l = 1,2,..., N-1, natomiast energia kinetyczna pochodzenia mechanicznego wynosi

$$T_{mech} = \frac{1}{2} I(\dot{q}^N)^2 \tag{2}$$

gdzie J oznacza moment bezwładności wirnika.

Ponieważ w przyjętych współrzędnych uogólnionych układu energia magnetyczna jest energią kinetyczną, sumaryczna energia kinetyczna układu elektromechanicznego jest równa

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l \tag{3}$$

gdzie

$$a_{kl} = \begin{cases} M_{kl} & \text{dla } k,l = 1,2,\ldots,N-1 \\ J & \text{dla } k = l = N \\ 0 & \text{dla } (k \neq l) \wedge (k \vee L = N) \end{cases}$$

Praca wirtualna sił zewnętrznych i rozpraszających składa się również z pracy sił elektrycznych i mechanicznych

$$\delta A = X_k \, \delta q^k = (e_k \, R_{kl} \, \dot{q}^l) \, \delta q^k \tag{4}$$

gdzie

δq^k – wariacje wirtualne współrzędnych uogólnionych,

e_k – zewnętrzne siły elektromotoryczne dla $k = 1,2,\ldots,N-1$,

$e_k = \mathfrak{M}$ – moment zewnętrzny dla $k = N$

R_{kl} $\begin{cases} R_k \text{ – oporność k-tego uzwojenia dla } k = l = 1,2,\ldots,N-1, \\ 0 \text{ – dla } k \neq l, \\ h \text{ – współczynnik tarcia wiskotycznego dla } k = l = N. \end{cases}$

Energia kinetyczna układu ma zawsze tę samą wartość, niezależnie od tego, jakie współrzędne uogólnione zostały przyjęte. Jest więc ona niezmiennikiem względem transformacji współrzędnych uogólnionych, a ponieważ $\dot{q}^k$ jest dowolnym wektorem kontrawariantnym, [3] więc współczynniki a_{kl} są składowymi tensora kowariantnego.

Wprowadzamy pojęcie przestrzeni konfiguracyjnej V_N, tzn. takiej przestrzeni, której każdemu punktowi będzie odpowiadała określona konfiguracja układu dynamicznego, przy czym odpowiedność ta będzie wzajemnie jednoznaczna. Ponieważ wielkości q^k ustalają jakąś konfigurację układu, więc ustalają one pewien punkt w V_N, a tym samym określają one pewien układ współrzędnych w V_N.

Dwie sąsiednie konfiguracje lub punkty pozwalają określić formę kwadratową

$$ds^2 = a_{kl} \, dq^k dq^l \tag{5}$$

Przestrzeń konfiguracyjna V_N jest więc przestrzenią riemannowską o formie metrycznej (5). Energia kinetyczna układu jest dodatnia, gdy układ się porusza i jest równa zeru, jeśli cały układ spoczywa. Układ jest w stanie spoczynku wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wielkości $\dot{q}^k$ są równe zeru Stąd więc wynika, że forma (5) jest określona dodatnio. Aby odróżnić ją od innych możliwych form metrycznych w przestrzeni konfiguracyjnej, formę (5) nazywamy kinematyczną formą metryczną lub kwadratem kinematycznego elementu liniowego, nie zależy on bowiem od sił działających na układ.

Przyjmiemy teraz odpowiednią terminologię. Definiujemy uogólniony kontrawariantny wektor prędkości

$$\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt}. \tag{6}$$

Przyspieszenia nie możemy definiować jako zwyczajną pochodną czasową prędkości, gdyż wtedy nie otrzymalibyśmy na ogół wektora. Dlatego posłużymy się tu różniczkowaniem absolutnym [3]. Uogólniony kowariantny wektor przyspieszenia zdefiniujemy jako

$$f_k = a_{kl} \frac{\delta \dot{q}^k}{\delta t}, \tag{7}$$

gdzie $\frac{\delta \dot{q}^k}{\delta t}$ - jest pochodną absolutną wektora prędkości.

Zgodnie z definicją pochodnej absolutnej otrzymamy

$$f_k = a_{kl} \ddot{q}^l + [ls,k] \dot{q}^l \dot{q}^s, \tag{8}$$

gdzie

$$[ls,k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial q^s} + \frac{\partial a_{ks}}{\partial q^l} - \frac{\partial a_{ls}}{\partial q^k} \right). \tag{9}$$

Ze wzorów (3), (8) i (9) wynika, że przyspieszenie można również zapisać w postaci

$$f_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} \tag{10}$$

Jak wiadomo, aby napisać równania ruchu układu, musimy znać wszystkie siły działające na układ. W szczególności musimy znać siły reakcji więzów krępujących swobodę rozważanego układu. Wobec tego równanie ruchu układu można napisać w postaci

$$f_k = X_k + Y_k, \tag{11}$$

gdzie

X_k+Y_k - siła wypadkowa działająca na układ

Y_k - siła reakcji więzów krępujących swobodę układu

Jeżeli interesuje nas tylko ruch układu, wtedy siły reakcji Y_k są tylko wielkościami pomocniczymi, które w miarę możliwości staramy się eliminować. Wiemy bowiem o nich tylko tyle, że muszą one być tak dobrane, aby wynikający z równań (11) ruch układu był zgodny z więzami

$$A^l_k\, dq^k + A^l_0\, dt = 0, \qquad (k = 1,2,\ldots,N) \quad (l = 1,2,\ldots,M) \tag{13}$$

Punkt przestrzeni konfiguracyjnej V_N, reprezentujący w danej chwili czasu położenie układu, nie może przesunąć się w dowolnym kierunku,gdyż wyznaczające jego przesunięcie różniczki uogólnionych współrzędnych i czasu spełniać muszą równania (13). Ogół przesunięć zgodnych z tymi równaniami utworzy pewną N-M wymiarową hiperpłaszczyznę. Stąd też każdy punkt przestrzeni V_N leżącej na krzywej reprezentującej ruch kinematycznie możliwy a w szczególności i ruch rzeczywisty, będzie punktem wspólnym tej krzywej i odpowiadającej mu hiperpłaszczyzny. Zanim przystąpimy do eliminacji więzów podamy jeszcze pojęcie przesunięć wirtualnych. Przypomnijmy najpierw, że wariacjami wirtualnymi współrzędnych uogólnionych nazywa się takie wariacje tych współrzędnych δq^k, które spełniają równania

$$A^k_l\, \delta q^l = 0, \tag{14}$$

wynikające z równań więzów (13). W związku z tym, wirtualne przesunięcia możemy zdefiniować jako takie przesunięcia układu, które odpowiadają wirtualnym wariacjom jego współrzędnych uogólnionych.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do więzów idealnych.Mówimy, że więzy są idealne, jeżeli praca sił reakcji tych więzów na dowolnych przesunięciach wirtualnych układu jest równa zeru, tj.

$$\delta A = Y_k\, \delta q^k = 0 \tag{15}$$

Jeżeli wymnożymy równanie (11) przez δq^k, a następnie zsumujemy po k, to dla więzów idealnych na mocy (15) otrzymamy tzw. równanie d'Alemberta-Lagrange'a

$$(f_k - X_k)\, \delta q^k = 0, \qquad (k = 1,2,\ldots,N) \tag{16}$$

Po podstawieniu wzoru (10) do (16) otrzymamy następująca postać równania d'Alemberta-Lagrange'a

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - X_k\right)\, \delta q^k = 0 \tag{17}$$

Zauważmy teraz, że tylko dla układu pozbawionego więzów (holonomicznych) wariacje δq^k są niezależne i tylko dla takiego układu z równania (17) wynikają odpowiednie równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = X_k, \quad (k = 1,2,\ldots,N) \tag{18}$$

Dla układu z narzuconymi więzami nie otrzymamy bezpośrednio równań ruchu w postaci Lagrange'a drugiego rodzaju, ponieważ w tym przypadku wariacje $\delta q^1, \delta q^2, \ldots, \delta q^N$ są zależne, tzn. spełniają układ równań (14). W tym przypadku wielce pomocne jest wprowadzenie tzw. quasi-współrzędnych.

2. Równanie ruchu w quasi-współrzędnych

Niech $q^k (k = 1,2,\ldots,N)$ oznaczają współrzędne uogólnione układu, a $q^{k'} (k' = 1',2',\ldots,N')$ - quasi-współrzędne. Niech ponadto pochodne quasi - współrzędnych i prędkości uogólnione $\dot{q}^k$ spełniają liniowe zależności

$$\dot{q}^{k'} = A^{k'}_k \dot{q}^k; \quad \dot{q}^k = A^k_{k'} \dot{q}^{k'}, \quad (k=1,2,\ldots,N; k'=1',2',\ldots,N') \tag{19}$$

gdzie $A^{k'}_k$, $A^k_{k'}$ zależą tylko od współrzędnych uogólnionych i czasu.

Zatem

$$A^{k'}_l A^k_{k'} = \delta^k_l, \tag{19a}$$

gdzie δ^k_l jest symbolem Kroneckera.

Z drugiego równania (19) wynika

$$\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^{k'}} = \frac{\partial q^k}{\partial q^{k'}} = A^k_{k'} \tag{20}$$

Zauważmy, że z równań (19) wynikają następujące zależności

$$\delta q^k = A^k_{k'} \delta q^{k'} \tag{21}$$

które można wykorzystać do wyeliminowania z równań d'Alemberta-Lagrange'a (17) wariacji współrzędnych uogólnionych. W rezultacie mamy

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - X_k\right) A^k_{k'} \delta q^{k'} = 0 \tag{22}$$

Symbolem T^* będziemy oznaczać funkcję, w której prędkości uogólnione $\dot{q}^k$ zastąpiono przy pomocy związków (19) pochodnymi quasi-współrzędnych $\dot{q}^{k'}$. Funkcje energii kinetycznej spełniają następujące zależności

$$T(q^1,q^2,\ldots,q^N,A^1_{k'}\dot{q}^{k'},\ldots,A^N_{k'}\dot{q}^{k'}) = T^*(q^1,q^2,\ldots,q^N,\dot{q}^{1'},\ldots,\dot{q}^{N'}),$$

$$T^*(q^1,\ldots,q^N,A^{1'}_k\dot{q}^k,\ldots,A^{N'}_k\dot{q}^k) = T(q^1,\ldots,q^N,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^N), \tag{23}$$

tzn. są niezmiennikami współrzędnych.

Wprowadzimy jeszcze jeden uproszczony symbol na różniczkowanie cząstkowe, który jest specjalnie dostosowany do stosowanej w tej pracy metody wskaźnikowej, a mianowicie:

$$\partial_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial q^k} \tag{24}$$

Różniczkując wzór (19a) względem czasu oraz względem l-tej współrzędnej q^l otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t}(A^{k'}_s)\,A^k_{k'} + A^{k'}_s\frac{\partial}{\partial t}(A^k_{k'}) = 0\,, \tag{25}$$

$$\partial_l(A^{k'}_s)\,A^k_{k'} + A^{k'}_s\partial_l\,A^k_{k'} = 0. \tag{26}$$

Wykorzystamy teraz wzory (19), (23), (25) i (26) do szeregu następujących przekształceń

$$A^k_{k'}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) = \frac{d}{dt}\left(A^k_{k'}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\partial_l(A^k_{k'})\dot{q}^l - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l}\frac{\partial}{\partial t}(A^k_{k'}) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}}\right) + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^s}A^k_{k'}A^l_{l'}\partial_l(A^{s'}_k)\,\dot{q}^{l'} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^s}A^k_{k'}\frac{\partial}{\partial t}(A^{s'}_k) \tag{27}$$

Ponieważ dodatkowo zachodzi

$$\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} = \frac{\partial T^*}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial \dot{q}^{k'}} = \frac{\partial T^*}{\partial q^k}A^k_{k'} \tag{28}$$

mamy więc również

$$A^k_{k'} \frac{\partial T}{\partial q^k} = A^k_{k'} \frac{\partial T^*}{\partial q^k} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} \frac{\partial \dot{q}^{s'}}{\partial q^k} A^k_{k'} =$$

$$= \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} A^k_{k'} A^l_{l'} \partial_k (A^{s'}_l) \dot{q}^{l'}. \tag{29}$$

Uwzględniając równości (27) i (29) w równaniu (22), otrzymamy następującą postać równania d'Alemberta-Lagrange'a w quasi-współrzędnych

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + \Gamma^{s'}_{k'l'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} \dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} - X_{k'}\right) \delta q^{k'} = 0, \tag{30}$$

gdzie

$$\Gamma^{s'}_{k'l'} = A^k_{k'} A^l_{l'} (\partial_l A^{s'}_k - \partial_k A^{s'}_k) \tag{31}$$

$$B^{s'}_{k'} = A^k_{k'} \frac{\partial}{\partial t} A^{s'}_k, \tag{32}$$

$$X_{k'} = A^k_{k'} X_k . \tag{33}$$

Wyrażenia $\Gamma^{s'}_{k'l'}$ oraz $B^{s'}_{k'}$ zależą tylko od wzajemnego stosunku współrzędnych uogólnionych i pochodnych quasi-współrzędnych, a nie zależą od struktury i ruchu układu. Należy jeszcze zauważyć, że równanie d'Alemberta-Lagrange'a w quasi-współrzędnych (3) opisują układy, które nie posiadają żadnych więzów (holonomiczne), jak również takie układy, których ruch jest krępowany pewnymi więzami. Jeżeli układ jest holonomiczny, to wtedy na mocy niezależności wariacji $\delta q^{k'}$ quasi-współrzędnych otrzymamy N równań ze związku (30)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^*}{\partial q^{k'}} + \Gamma^{s'}_{k'l'} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^{s'}} \dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'} \frac{\partial T^*}{\partial q^s} = X_{k'}, \tag{34}$$

$$(s', l', k' = 1', 2', \ldots, N')$$

Jeżeli więzy układu mają postać

$$A^{M'+k'}_{k}\,\dot{q}^{k} = 0, \qquad \begin{matrix} k = 1,2,\ldots,N, \\ k' = 1',2',\ldots,(N-M)' \end{matrix}, \tag{35}$$

wtedy wygodnie jest w wielu przypadkach tak wprowadzić quasi-współrzędne, aby na mocy (35) (N-M) ostatnich quasi-współrzędnych było równych zeru.

W tym celu wystarczy w szczególności założyć, że współrzędne uogólnione i (N-M) ostatnich quasi-współrzędnych spełniają zależności

$$\dot{q}^{M'+k'} = A^{M'+K'}_{k}\,\dot{q}^{k} \tag{36}$$

$$(k' = 1',2',\ldots,(N-M)';\ k = 1,2,\ldots,N),$$

a M pierwszych quasi-współrzędnych spełnia dowolny liniowy układ równań

$$\dot{q}^{k'} = A^{k'}_{k}\,\dot{q}^{k}, \qquad (k' = 1',2',\ldots,M'), \tag{37}$$

którego macierz jest nieosobliwa.

Wariacje $\delta q^{k'}$ i δq^{k} na mocy (36) spełniają związki

$$\delta q^{M'+k'} = A^{M'+k'}_{k}\,\delta q^{k} \tag{38}$$

Zauważmy, że na mocy równań więzów (35) wariacje quasi-współrzędnych są równe zeru, tj.

$$\delta q^{M'+k'} = 0, \qquad (k' = 1',2',\ldots,(N-M)'. \tag{39}$$

Wynika z tego, że (N-M) ostatnich wyrazów w równaniu d'Alemberta-Lagrange'a jest równych zeru. Z pozostałej sumy otrzymamy M równań

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}^{k'}} - \frac{\partial T^{*}}{\partial q^{k'}} + \Gamma^{s'}_{k'l'}\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}^{s'}}\dot{q}^{l'} + B^{s'}_{k'}\frac{\partial T^{*}}{\partial \dot{q}^{s'}} = X_{k'}, \tag{40}$$

$$(k',l' = 1',2',\ldots,M';\quad s' = 1',2',\ldots,N')$$

gdyż M pierwszych wariacji $\delta q^{k'}$ jest niezależnych.

Równania (40) niezawierające już nieznanych sił reakcji więzów łącznie z (N-M) równaniami więzów (35) i M równaniami (37) stanowią (N+M) równań ruchu w quasi-współrzędnych, z których przy zadanych wartościach początkowych można wyznaczyć (N+M) nieznanych funkcji czasu $\dot{q}^{1'}, \dot{q}^{2'}, \ldots, \dot{q}^{M'}, q^{1}, \ldots, q^{N}$.

LITERATURA

1. Banach S.: Mechanika: Warszawa 1956.
2. Elsgolc L.E.: Rachunek wariacyjny. Warszawa 1960.
3. Gołąb St.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1956.
4. Nejmark J.I., Fufajew N.A.: Dynamika układów nieholonomicznych, Moskwa 1967.
4. Raszewski P.K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa. Warszawa 1962.
6. Susłow G.K.: Mechanika teoretyczna PWN 1960 r.
7. Synge J.L.: Schild A.: Rachunek tensorowy. Warszawa 1964.
8. Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. Warszawa 1964.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В настоящей работе использованы пространственные методы Риеманна а также вариационный метод расчёта при составлении уравнений электромеханических систем.

Потом исключено в уравнении движения системы электромеханическую реакцию связи, вводять для этой цели диаси-координаты.

ON CERTAIN WAY OF IDENTIFICATION OF ELEKTRO-MECHANICAL POWER SYSTEM

S u m m a r y

In this work the methode of Rieman's space and variance account is used instead of d'Alembert-Lagrange equation of electromechanical system.

Joints - reaction is then eliminated from the movement equations of electromechanical systems with the use of quasi-coordinetes.