ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980
Seria: AUTOMATYKA z. 56 Nr kol. 652

Jan Węglarz
Politechnika Poznańska

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA PROBLEMÓW SZEREGOWANIA ZADAŃ NA RÓWNOLEGŁYCH MASZYNACH Z UWZGLĘDNIENIEM DODATKOWYCH ZASOBÓW

Streszczenie. W pracy przedstawiono podsumowanie dotychczasowych wyników w zakresie badania złożoności obliczeniowej problemów szeregowania zadań na równoległych maszynach z uwzględnieniem dodatkowych ograniczonych zasobów. Rozpatrzono trzy kryteria szeregowania: długość uszeregowania, średni czas przepływu i maksymalne opóźnienie zadania.

1. Wstęp

Znaczenie praktyczne problematyki szeregowania zadań (operacji, prac, detali) na maszynach w optymalizacji procesów produkcyjnych i obliczeniowych jest coraz powszechniej oczywiste. Badanie tych problemów ma również istotne znaczenie teoretyczne, z uwagi na ich różnorakie powiązania z innymi problemami decyzyjnymi, wynikającymi w wielu działach badań operacyjnych, teorii optymalizacji, teorii grafów etc. Zdecydowana większość wyników uzyskanych dotychczas w zakresie tej problematyki dotyczy sytuacji, w których oprócz maszyn nie uwzględnia się żadnych dodatkowych zasobów, lub, mówiąc bardziej praktycznie, zakłada się, że zasoby te nie są ograniczone. Rzadko bowiem w sytuacjach praktycznych zadania wymagają do swego wykonania samych tylko maszyn. W ostatnich kilku latach obserwuje się więc uzasadniony wzrost zainteresowania problemami szeregowania zadań na maszynach z uwzględnieniem dodatkowych zasobów. Szczególnie cenne wyniki w tym zakresie uzyskano w ostatnich dwóch latach (por. [6]); w konsekwencji podsumowanie zawarte w [8] jest już w znacznej mierze nieaktualne. W niniejszej pracy chcemy przedstawić zestawienie wyników dotyczących złożoności obliczeniowej powyższych problemów dla przypadku maszyn równoległych. Zestawienie takie ukazuje problemy otwarte, a ponadto wytycza "granicę" między "łatwymi" (tj. należącymi do klasy P) i "trudnymi" (tj. NP-zupełnymi) problemami rozdziału zasobów odnawialnych przy dyskretnych zapotrzebowaniach zasobowych zadań (por. [19]). Zauważmy bowiem, że problemy szeregowania zadań na równoległych maszynach stanowią przypadki szczególne wspomnianych wyżej problemów rozdziału zasobów.
Nie będziemy przypominać definicji dotyczących klas złożonościowych problemów decyzyjnych; złożoność obliczeniową rozumiemy w sensie czasowym (por. [1,10,11]).

2. Podstawowe definicje

Będziemy rozpatrywać zbiór zadań $(Z, \prec)$, gdzie $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$, $\prec$ jest relacją określającą ograniczenia kolejnościowe między zadaniami : $Z_i \prec Z_j$ oznacza, że zadanie Z_i musi zostać wykonane przed rozpoczęciem wykonywania zadania Z_j. Mamy do dyspozycji zbiór m maszyn $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$, z których każda może wykonywać w danej chwili co najwyżej jedno zadanie oraz zbiór p rodzajów dodatkowych zasobów $R = \{R_1, R_2, \ldots, R_p\}$, dostępnych odpowiednio w liczbie $N_1, N_2, \ldots, N_p$ jednostek. Każde zadanie $Z_i \in (Z, \prec)$ jest scharakteryzowane przez:

-moment przybycia do systemu obsługi r_i,

-wektor zapotrzebowań zasobowych $R(Z_i) = (R_1(Z_i), R_2(Z_i), \ldots, R_p(Z_i))$, gdzie $R_k(Z_i)$ oznacza liczbę jednostek zasobu R_k,

-wektor czasów wykonywania $\tau_i = (\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{im})$, gdzie τ_{ij} oznacza czas wykonywania na maszynie M_i przy założeniu spełnienia zapotrzebowań zasobowych $R(Z_i)$,

-termin zakończenia wykonywania d_i.

Będziemy mówili o zadaniach podzielnych, jeśli wykonywanie każdego zadania ze zbioru $(Z, \prec)$ może być przerwane w dowolnej chwili, a następnie kontynuowane bez straty czasu, być może na innej maszynie. Zadanie, którego wykonywanie zostało przerwane, uwalnia wszystkie posiadane zasoby. Jeżeli przerywanie wykonywania jakiegokolwiek zadania ze zbioru $(Z, \prec)$ nie może być przerywane, powiemy o zadaniach niepodzielnych.

Jeżeli $\tau_{ij} = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, to powiemy o maszynach identycznych; jeżeli $\tau_{ij} = \tau_i b_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ - o maszynach jednorodnych; jeżeli czasy τ_{ij} są dowolne - o maszynach niezależnych.

Do oceny uszeregowań /por. def. w [8] / wykorzystywać będziemy następujące kryteria:

- długość uszeregowania $C_{max} = \max_i \{C_i\}$, gdzie C_i jest momentem zakończenia wykonywania zadania Z_i w danym uszeregowaniu,
- średni czas przepływu zadania $F = \sum_{i=1}^{n} F_i/n$, gdzie $F_i = C_i - r_i$.
- maksymalne opóźnienie zadania $L_{max} = \max_i \{L_i\}$, gdzie $L_i = C_i - d_i$.

Podamy obecnie definicję problemu szeregowania, pozwalającą na jednolity i skrótowy zapis problemów rozpatrywanych w tej pracy.

Przez problem szeregowania rozumieć będziemy uporządkowany ciąg parametrów podzielonych na trzy podciągi $\alpha \,|\, \beta \,|\, \gamma$, przy czym parametry nie muszą mieć nadanych wartości, a ich znaczenie jest następujące:

Podciąg $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ opisuje zbiór maszyn M, mianowicie

- $\alpha_1 \in \{\emptyset, P, Q, R\}$ określa rodzaj maszyn ze względu na prędkość pracy;

$\alpha_1 = \emptyset$ - zbiór M zawiera dokładnie jedną maszynę;
$\alpha_1 = P$ - zbiór M składa się z maszyn identycznych;
$\alpha_1 = Q$ - zbiór M składa się z maszyn jednorodnych;
$\alpha_1 = R$ - zbiór M składa się z maszyn niezależnych;

- α_2 oznacza liczbę maszyn w zbiorze M: gdy α_2 jest liczbą całkowitą dodatnią, to liczba maszyn m jest stała i równa α_2, gdy $\alpha_2=\emptyset$, to m jest zmienną w problemie. /Oczywiście $\alpha_1=\emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_2=1$/.

Podciąg $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ opisuje zbiór zadań $(Z, \prec)$, mianowicie.

- $\beta_1 \in \{\emptyset, podz\}$ - określa możliwość przerywania wykonywania zadań:
  $\beta_1 = \emptyset$ - zadania niepodzielne;
  $\beta_1 = podz$ - zadania podzielne;
- $\beta_2 \in \{\emptyset, res\,\lambda\,\sigma\,\varrho\}$ - opisuje ograniczenia i zapotrzebowania zasobowe:
  $\beta_2 = \emptyset$ - brak dodatkowych zasobów;
  $\beta_2 = res\,\lambda\,\sigma\,\varrho$ - istnieją dodatkowe zasoby;
  $\lambda, \sigma, \varrho \in \{\cdot, k\}$ - oznaczają odpowiednio: liczbę rodzajów dodatkowych zasobów, ograniczenia zasobowe, zapotrzebowania zasobowe:
  $\alpha, \sigma, \varrho = k$ - oznaczają odpowiednio : k rodzajów dodatkowych zasobów, k jednostek zasobu każdego rodzaju, zapotrzebowania zasobowe każdego zadania nie przekraczają k jednostek każdego zasobu;
  $\alpha, \sigma, \varrho = \cdot$ - liczba rodzajów dodatkowych zasobów, ograniczenia oraz zapotrzebowania zasobowe są dowolne;
- $\beta_3 \in \{\emptyset, ogr, drzewo, las, łańcuch\}$ - określa ograniczenia kolejnościowe:
  $\beta_3 = \emptyset, ogr, drzewo, las, łańcuch$ - oznacza odpowiednio: brak ograniczeń kolejnościowych /zadania niezależne/, dowolny graf, drzewo, las, łańcuch;
- $\beta_4 \in \{r_i, \emptyset\}$ - określa momenty przybycia zadań:
  $\beta_4 = r_i$ - momenty przybycia dowolne;
  $\beta_4 = \emptyset$ - momenty przybycia równe, to jest $r_i=0$, $i=1,2,\ldots,n$;
- $\beta_5 \in \{\tau_i = 1,\ \tau_i = 1 \text{ lub } 2,\ \emptyset\}$ - określa czasy wykonywania zadań:
  $\beta_5 = \tau_i = 1$ - czasy wykonywania zadań są równe;
  $\beta_5 = \tau_i = 1$ lub 2 - czasy wykonywania zadań są równe 1 lub 2 jednostkom;
  $\beta_5 = \emptyset$ - czasy wykonywania zadań są dowolne.

Podciąg $\gamma \in \{C_{max}, F, L_{max}\}$ oznacza kryterium optymalności szeregowania.

W następnym rozdziale, dla skrócenia zapisu, będziemy opuszczali symbole puste w oznaczeniach problemów szeregowania, łącznie z ewentualnymi przecinkami.

Tablica 1

Złożoność obliczeniowa problemów szeregowania w celu minimalizacji długości uszeregowania

Rodzaj i liczba maszyn	Zadania	Problem: Ograniczenia i zapotrzebowania zasobowe	Problem: Ograniczenia kolejnościowe	Problem: Momenty przybycia	Problem: Czasy wykonywania	Złożoność obliczeniowa	Literatura
P2						NP-zupełny	[10,15]
P			las	r_i	$\tau_i=1$	?	
P3			ogr		$\tau_i=1$	?	
P			ogr		$\tau_i=1$	NP-zupełny	[17]
P2			ogr		$\tau_i=1$ lub 2	NP-zupełny	[17]
P	podz		las	r_i		?	
P2	podz		ogr	r_i		?	
P3	podz		ogr			?	
P	podz		ogr			NP-zupełny	[18]
Q2			las		$\tau_i=1$	?	
Q	podz		las			?	
R3	podz					?	
P		res1·1		r_i	$\tau_i=1$	$O(n)$	[5]
P2		res···			$\tau_i=1$	$O(n^3)$	[11]
P2		res·11		r_i	$\tau_i=1$	?	
P3		res·11			$\tau_i=1$	NP-zupełny	[7]
P2		res111	łańcuch		$\tau_i=1$	NP-zupełny	[7]
P	podz	res1·1				$O(n)$	[6]
P	podz	res1·1		r_i		$O(n^3\min\{n^2, \log n + \log \max_i[\tau_i]\})$	[6]
P2	podz	res·11				?	
P2	podz	res111	łańcuch		$\tau_i=1$	NP-zupełny	[6]
P3	podz	res·11			$\tau_i=1$	NP-zupełny	[6]
Q		res1·1			$\tau_i=1$	$O(n^3)$	[6]
Q		res1·1		r_i	$\tau_i=1$	?	
Q2		res·11			$\tau_i=1$	NP-zupełny	[7]
Q2	podz	res·11				?	
Q	podz	res1·1				?	

Tablica 2

Złożoność obliczeniowa problemów szeregowania w celu minimalizacji średniego czasu przepływu

Problem						Złożoność obliczeniowa	Literatura
Rodzaj i liczba maszyn	Zadania	Ograniczenia i zapotrzebowania zasobowe	Ograniczenia kolejnościowe	Momenty przybycia	Czasy wykonywania		
1				r_i		NP-zupełny	[15]
1			ogr			NP-zupełny	[13,14]
P2			las			NP-zupełny	[16]
P3			las		$\tau_i=1$	?	
P2			ogr		$\tau_i=1$ lub 2	NP-zupełny	[15]
			ogr		$\tau_i=1$	NP-zupełny	[14]
1	podz		ogr			?	
	podz			r_i		?	
Q			las		$\tau_i=1$	?	
Q	podz			r_i		?	
Q2	podz		las			?	
R	podz					?	
P		res1·1		r_i	$\tau_i=1$	O(n)	[4]
P2		res···			$\tau_i=1$	$O(n^3)$	[4]
P3		res·11			$\tau_i=1$	NP-zupełny	[6]
P2		res111	łańcuch		$\tau_i=1$	NP-zupełny	[6]
P2		res·11		r_i	$\tau_i=1$	?	
P		res1·1				O(nlogn)	[6]
P2		res·11				?	
P	podz	res1·1				O(nlogn)	[6]
P3	podz	res·11				NP-zupełny	[6]
P2	podz	res111	łańcuch			NP-zupełny	[6]
P2	podz	res·11					
Q		res1·1			$\tau_i=1$	$O(n^3)$	[6]
Q2		res·11			$\tau_i=1$	NP-zupełny	[6]
Q		res1·1			$\tau_i=1$	?	
Q2		res·11				?	

Tablica 3

Złożoność obliczeniowa problemów szeregowania w celu minimalizacji maksymalnego opóźnienia

Problem						Złożoność obliczeniowa	Literatura
Rodzaj i liczba maszyn	Zadania	Ograniczenia i zapotrzebowania zasobowe	Ograniczenia kolejnościowe	Momenty przybycia	Czasy wykonywania		
1				r_i		NP-zupełny	[15]
P2						NP-zupełny	[15]
			drzewo		$p_i=1$	NP-zupełny	[9]
			drzewo	r_i	$p_i=1$	NP-zupełny	[9]
P3			ogr		$p_i=1$	?	
			ogr		$p_i=1$	NP-zupełny	[2]
P2			ogr		$p_i=1$ lub 2	NP-zupełny	[2]
P2	podz		ogr			?	
	podz		las			?	
P3	podz		ogr			?	
	podz		ogr			NP-zupełny	[2]
P2		res111			$p_i=1$	$O(n^2)$	[6]
P		res1·1		r_i	$p_i=1$	$O(n^3)$	[3]
P2		res·11			$p_i=1$	?	
P3		res·11			$p_i=1$	NP-zupełny	[6]
P2		res111	łańcuch		$p_i=1$	NP-zupełny	[6]
P3	podz	res.11				NP-zupełny	[6]
P2	podz	res111	łańcuch			NP-zupełny	[6]
P	podz	res1·1		r_i		$O(n^3\min\{n^2,\log n+\log\max_i\{p_i\}\})$	[6]
P2	podz	res·11				?	
Q		res1·1			$p_i=1$	$O(n^3)$	
Q2		res1·1			$p_i=1$	NP-zupełny	[6]
Q	podz	res1·1				?	

3. Zestawienie wyników

Wykorzystując notację opisaną w rozdziale 2, w tablicach 1-3 zestawiono uzyskane dotychczas wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemów szeregowania zadań na równoległych maszynach w celu minimalizacji odpowiednio: długości uszeregowania, czasu przepływu i maksymalnego opóźnienia. W tablicach tych podano także te problemy szeregowania bez dodatkowych zasobów, które są NP-zupełne lub otwarte z punktu widzenia złożoności obliczeniowej.

LITERATURA

[1] Ackoff,R.L., Sasieni,M.W., Fundamentals of Operations Research, J.Wiley, New York, 1968.
[2] Błażewicz,J., Deadline scheduling of tasks-a survey, Foundations of Control Engineering, Vol.1, No.4, 1977.
[3] Błażewicz,J., Deadline scheduling of tasks with ready times and resource constraints, Information Processing Letters, Vol.8, No.2, 1979.
[4] Błażewicz,J., Scheduling tasks on parallel processors under resource constraints to minimize mean finishing time, Operation Research Verfahren - Methods of Operations Research, No.35, 1979.
[5] Błażewicz,J., Wielomianowe i pseudowielomianowe algorytmy rozwiązywania problemów kombinatorycznych, Archiwum Automatyki i Telemechaniki (w druku).
[6] Błażewicz,J., Złożoność obliczeniowa algorytmów i problemów szeregowania zadań, seria Rozprawy , Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Poznanskiej, Poznań,(w druku).
[7] Błażewicz,J., J.K.Lenstra, A.H.G.Rinnooy Kan, Resource constrained scheduling-classification and complexity results, Discrete Applied Mathematics (w druku).
[8] Błażewicz,J., J.Węglarz, Deterministyczne problemy szeregowania zadań na procesorach systemów komputerowych z uwzględnieniem dodatkowych zasobów, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, Vol.23, No.4,1978.
[9] Brucker,P., M.R.Garey, D.S.Johnson, Scheduling equal-length tasks under treelike precedence constraints to minimize maximum lateness, Math.Oper.Res. , Vol.2, 1977.
[10] Coffman,E.G.Jr. (red.) Computer and Job-Shop Scheduling Theory, J.Wiley, New York, 1976.
[11] Garey,M.R., D.S.Johnson, Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints, SIAM. J. on Computing, Vol.4,1975.
[12] Garey,M.R., D.S.Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H.Freeman, San Francisco, 1979.
[13] Lawler,E.L., Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints, Ann.Discrete Math. Vol.2,1978.
[14] Lenstra,J.K., A.H.G.Rinnooy Kan, Complexity of scheduling under precedence constraints, Operations Res., vol.26, No.1, 1978.
[15] Lenstra,J.K., A.H.G.Rinnooy Kan, P.Brucker, Complexity of machine scheduling problems, Ann. Discrete Math. Vol.1, 1977.
[16] Sethi,R., On the complexity of mean flow time scheduling, Math. Oper.Res. Vol.2, 1977.
[17] Ullman,J.D., Polynomial complete scheduling problems, Operating Systems Review, Vol.7, No.4, 1973.
[18] Ullman,J.D., Complexity of Sequencing Problems, Rozdział 4 w [10].
[19] Węglarz,J., O pewnych modelach i metodach rozdziału zasobów różnych kategorii, Prace VIII Krajowej Konferencji Automatyki, Szczecin 1980.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПРОБЛЕМ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ЗАДАЧ НА ПАРАЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ С УЧЁТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ

Р е з ю м е

В работе представлен обзор результатов касающихся вычислительной сложности проблем составления расписания задач на паралельных машинах с учётом дополнительных ресурсов. Рассмотрено три меры оценки расписаний: максимальное время прохождения, среднее время прохождения и максимальное запаздывание задачи.

COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF TASKS`SCHEDULING ON PARALLEL MACHINES UNDER RESOURCE CONSTRAINTS

S u m m a r y

This paper sums up results obtained until now, concerning the computational complexity of tasks´scheduling problems of parallel machines where the additional constrained resources are taken into account. Three schedule performance measures are considered, i.e. schedule length, mean flow time and maximum lateness.