ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: ELEKTRYKA z. 42 Nr kol. 402

Zygmunt Nowomiejski

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

TEORIA KOMPENSACJI MOCY BIERNEJ

Streszczenie. W pracy podano teorię kompensacji mocy biernej w układach czasowo niezmienniczych o dowolnych ustalonych przebiegach. Wykazano wpływ pulsacji napięcia zasilania na pobór mocy czynnej i biernej w układach o parametrach zmiennych w czasie.

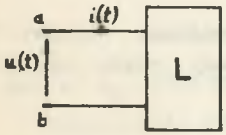
Rozważać będziemy układy elektryczne liniowe o przebiegach dowolnych w stanie ustalonym. Przez stan ustalony układu rozumiemy stan, w którym wszystkie występujące przebiegi $f(t)$ posiadają określoną wartość skuteczną F (por. [1]) zdefiniowaną przy pomocy relacji

$$F = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt} \tag{1}$$

i dla których $F<\infty$

Należy zauważyć, że w ogólnym przypadku przebiegi $f(t)$ mogą zawierać impulsy Diraca $\delta(t)$ (por. [1]).

Niech L (por. rys. 1) jest układem elektrycznym skupionym między zaciskami (a, b), między którymi występują przebiegi: napięcia $u(t)$ oraz prądu $i(t)$ spełniające relację (1). Moc bierną Q pobieraną przez układ L definiujemy przy pomocy relacji (por. [1])



Rys. 1

$$Q = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, H\{i(t)\} dt, \tag{2}$$

gdzie $H\{i(t)\}$ oznacza transformację Hilberta funkcji $i(t)$ (por. [2]), tzn.

$$H\{i(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\tau)\, d\tau}{\tau - t}. \tag{3}$$

Zachodzi

$$\int_{-T}^{T} u(t)\, H\left\{i(t)\right\} dt = \int_{-T}^{T} u(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \right\} dt. \tag{4}$$

Wykorzystując funkcję $\Pi_T(t)$ (por.[1]) do zapisu wzoru (4) i zakładając, że dopuszczalna jest zmiana kolejności całkowania, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \Pi_T(t) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \right\} dt = - \int_{-}^{\infty} i(\tau) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\, \Pi_T(t) dt}{t - \tau} \right\} d\tau =$$

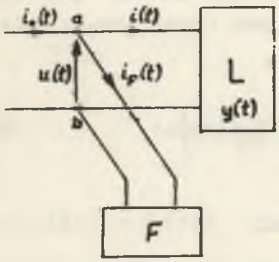
$$= - \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau)\, H\left\{u(\tau)\, \Pi_T(\tau)\right\} d\tau = - \int_{-T}^{T} i(\tau)\, H\left\{u(\tau)\right\} d\tau.$$

Wynika stąd, że dla mocy biernej Q ważna jest relacja

$$Q = - \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} i(t)\, H\left\{u(t)\right\} dt. \tag{5}$$

Niech L jest układem czasowo niezmienniczym, a $y(t)$ odpowiedzią tego układu na napięciowy impuls Diraca $\delta(t)$. Prąd $i(t)$ płynący do układu L jest dany przy pomocy relacji

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, u(t - \tau)\, d\tau. \tag{6}$$



Rys. 2

Między zaciski (a, b) wprowadzamy element F taki, aby prąd $i_F(t)$ pobierany przez układ F spełniał relację

$$i_F(t) = k\, H\left\{u(t)\right\}. \tag{7}$$

(por. rys. 2), gdzie k jest stałym współczynnikiem.

Można wykazać (na podstawie twierdzenia Parsevala zastosowanego do przebiegów transformowalnych według Fouriera lub faktu, że transformata Hilberta funkcji autokorelacji $\varphi(t)$ jest funkcją nieparzystą (por.[1]), że

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, H\left\{u(t)\right\} dt = H\left\{\varphi(o)\right\} = 0. \tag{8}$$

Stąd:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, i_F(t)\, dt = k \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, H\left\{u(t)\right\} dt = 0. \tag{9}$$

Czyli, że moc czynna (por. [1]) P_F pobierana przez element F jest równa zero.

Mamy (por. rys. 2)

$$i_o(t) = i(t) + i_F(t) \tag{10}$$

$$Q_o = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, H\left\{i_o(t)\right\} dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t)\, H\left\{i(t)\right\} dt + k \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H\left\{H\left\{u(t)\right\}\right\} u(t)\, dt.$$

Lecz (własność transformacji $H\left\{\cdot\right\}$)

$$H\left\{H\left\{u(t)\right\}\right\} = -\, u(t).$$

Stąd

$$Q_o = Q - k \cdot U^2, \tag{11}$$

gdzie Q_o jest mocą bierną pobieraną przez układ (L + F).

Kompensacja mocy biernej w rozważanym układzie polega na minimalizacji wielkości Q_o. W przypadku kompensacji zupełnej $Q_o = 0$. Otrzymamy

$$k = \frac{Q}{U^2}. \tag{12}$$

Równanie (10) możemy obecnie napisać w postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_o(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau + \frac{Q}{U^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)\, d\tau}{\tau - t}, \tag{13}$$

gdzie $y_o(t)$ jest szukaną funkcją przejścia układu (L + F).

Równanie (13) jest równaniem splotowym. Korzystając z ogólnie przyjętej symboliki, otrzymamy

$$y_o(t) * u(t) = y(t) * u(t) + \left(\frac{Q}{U^2}\right)\left(-\frac{1}{\pi t}\right) * u(t) \tag{14}$$

lub (korzystając z transformacji Fouriera)

$$Y_o(\omega)\, U(\omega) = Y(\omega)\, U(\omega) + \left(\frac{Q}{U^2}\right) \cdot j\,\mathrm{sgn}\,\omega\, U(\omega). \tag{15}$$

Czyli

$$y_o(t) = y(t) + \left(\frac{Q}{U^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\pi t}\right) \tag{16}$$

$$Y_o(\omega) = Y(\omega) + \left(\frac{Q}{U^2}\right) \cdot j\,\mathrm{sgn}\,\omega. \tag{17}$$

Jak widać kompensacja mocy biernej Q sprowadza się de realizacji elementu F, którego funkcją przejścia jest

$$y_F(t) = \left(\frac{Q}{U^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\pi t}\right), \tag{18}$$

tzn. element realizujący transformację Hilberta. Z równań (16) i (17) wynika także, że (z wyjątkiem współczynnika $\left(\frac{Q}{U^2}\right)$) szukana funkcja przejścia $y_o(t)$ jest niezależna od przyłożonego napięcia $u(t)$. Jest to ważne, ponieważ wprowadzenie do istniejącego układu L nowego elementu F może spowodować zmianę przebiegu napięcia. Występujący w równaniu (16), (17) i (18) współczynnik $\left(\frac{Q}{U^2}\right)$ możemy napisać w postaci (por. [1])

$$\frac{-\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, H\left\{\varphi(t)\right\} dt}{\varphi(o)}. \tag{19}$$

Co oznacza, że rozważany współczynnik nie jest bezpośrednio zależny od przyłożonego napięcia $u(t)$, lecz od jego funkcji autokorelacji.

Układy parametryczne

Gdy układ L jest układem o parametrach zmiennych w czasie, to jego odpowiedź na napięciowy impuls Diraca $\delta(t-\tau)$ wynosi $y(t,\tau)$. Czyli, że jest ona zależna od chwili τ wystąpienia impulsu między zaciskami (a,b). Prąd $i(t)$ płynący do układu L jest w tym przypadku dany przy pomocy relacji

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau. \tag{20}$$

Połóżmy

$$y(t,\tau) = y(t,\ t-\lambda) = n(t,\lambda). \tag{21}$$

Wykorzystując (21) do zapisu (20), otrzymamy

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t,\lambda)\, u(t-\lambda)\, d\lambda. \tag{22}$$

Zbadamy zachowanie się układu pod wpływem przyłożonego napięcia

$$u(t) = \cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t}\right\}, \tag{23}$$

przy czym przyjmiemy, że ω jest rzeczywistą, zmienną pulsacją przebiegu $u(t)$.

Wprowadzając (23) do równania (22), otrzymamy

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} n(t,\lambda)\, e^{j\omega(t-\lambda)}\, d\lambda\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} n(t,\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda\right\}.$$

Czyli

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{N(t,\omega)\, e^{j\omega t}\right\}, \tag{24}$$

gdzie $N(t,\omega)$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $n(t,\lambda)$ względem zmiennej niezależnej λ.

Mamy

$$N(t,\omega) = R(t,\omega) + j\,X(t,\omega) \tag{25}$$

$$R(t,-\omega) = R(t,\omega);\ X(t,-\omega) = -X(t,\omega).$$

Relację (24) możemy zapisać w postaci

$$i(t) = \sqrt{R^2 + X^2}\cos(\omega t + \varphi), \tag{26}$$

gdzie

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{X(t,\omega)}{R(t,\omega)}. \tag{27}$$

Dla mocy czynnej P (por.[1]) oraz mocy biernej Q (por.(5)) pobieranych przez układ L zachodzi

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sqrt{R^2 + X^2}\cos(\omega t + \varphi)\cos\omega t\,dt \tag{28}$$

$$Q = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sqrt{R^2 + X^2}\cos(\omega t + \varphi)\sin\omega t\,dt. \tag{29}$$

Po elementarnych przekształceniach, otrzymamy

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\sqrt{R^2 + X^2}\cos(2\omega t + \varphi)\,dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}R(t,\omega)\,dt \tag{30}$$

$$Q = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}\sqrt{R^2 + X^2}\sin(2\omega t + \varphi)\,dt - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T}\int_{-T}^{T}X(t,\omega)\,dt. \tag{31}$$

Jak widać, obie moce zawierają wyrazy pulsujące z podwójną częstotliwością i ogólnie zależne są od pulsacji ω napięcia wymuszającego $u(t)$.

LITERATURA

1. Nowomiejski Z.: Moc w układach elektrycznych o przebiegach nieokresowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" z.36, 1972.
2. Nowomiejski Z.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalformigen Vorgängen. "Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik", 8, s. 244-254, 1967.

ТЕОРИЯ КОМПЕНСАЦИИ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ

С о д е р ж а н и е

В работе изложены теоретические вопросы компенсации реактивной мощности в системах, неизменяющихся во времени с произвольно установленным протеканием. Показано влияние пульсации напряжения питания на потребление активной и реактивной мощности в системах с параметрами, изменяющимися во времени.

THEORY OF REACTIVE POWER COMPENSATION

S u m m a r y

The theory of reactive power compensation in time invariable systems with any established runs is presented in this elaboration. The influence of supply voltage pulsation on the consumption of active and reactive power in systems having time variable parameters is shown.