ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973

Seria: ELEKTRYKA z. 42 Nr kol. 402

Zofia Cichowska
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

OBLICZANIE PRĄDÓW ZWARCIA I NAPIĘĆ POWROTNYCH PRZY ZASTOSOWANIU TRANSFORMATY FUNKCJI OBCIĘTEJ

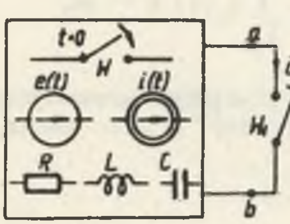
Streszczenie. Wykorzystano transformatę funkcji obciętej do obliczeń w układzie, w którym zamknięcie lub otwarcie wyłącznika następuje w czasie trwania stanu nieustalonego. Rozważania zilustrowano przykładami.

Wstęp

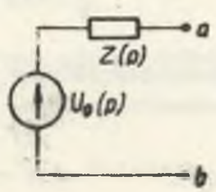
Zastosowanie metody Thèvenina-Nortona do obliczania przebiegu napięcia powrotnego na wyróżnionym wyłączniku lub przebiegu prądu zwarcia w wyróżnionej gałęzi jest proste, gdy układ pracował w stanie ustalonym i w chwili $t = 0$ następuje zamknięcie czy otwarcie rozpatrywanego wyłącznika. Obliczenie komplikuje się, gdy układ znajduje się w stanie nieustalonym spowodowanym, np. załączeniem, czy zmianą parametrów w chwili $t = 0$ i jeszcze w czasie trwania stanu nieustalonego następuje zamknięcie czy otwarcie wyłącznika. Zastosowanie w tym przypadku funkcji obciętych i ich transformat znacznie ułatwia analizę.

Obliczenie prądu zwarcia

Rozważmy układ aktywny przedstawiony na rys. 1, w którym stan nieustalony spowodowany jest zamknięciem wyłącznika W w chwili $t = 0$, i w którym interesuje nas wyznaczenie przebiegu prądu $i_z(t)$, jaki popłynie przez wyłącznik W_1 po jego zamknięciu w chwili $t = t_1$.



Rys. 1



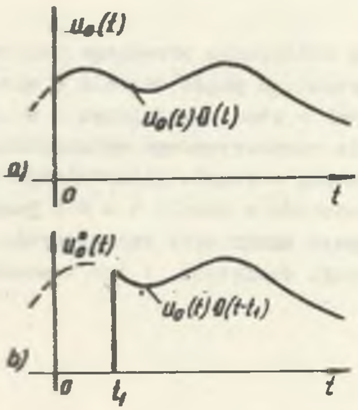
Rys. 2

Stosując twierdzenie Thèvenina o zastępczym generatorze napięcia można w miejsce układu aktywnego (na lewo od zacisków a b) wprowadzić zastępczy dwójnik aktywny przedstawiony na rys. 2. $Z(p)$ jest operatorową impedancją układu zawartego między zaciskami a b przy zwartych wszystkich SEM i rozwartych SPM, a $U_o(p)$ jest transformatą napięcia na zaciskach a b przy otwartym wyłączniku W_1. Przebieg tego napięcia (przykładowo przedstawiony na rys. 3a) obliczymy jako odwrotną transformatę Laplace'a

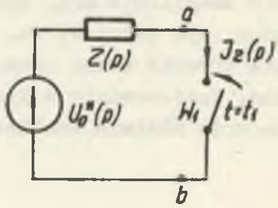
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{U_o(p)\right\} = u_o(t)\,\mathbb{1}(t). \tag{1}$$

Dla obliczenia prądu zwarcia płynącego przez wyłącznik W_1, należy rozpatrzyć funkcję obciętą dla czasów $t < t_1$ (rys. 3b)

$$u_o^*(t) = u_o(t)\,\mathbb{1}(t - t_1). \tag{2}$$



Rys. 3



Rys. 4

Transformata tego napięcia wynosi

$$U_o^*(p) = \int_0^\infty u_o(t)\,\mathbb{1}(t - t_1)\, e^{-pt}\, dt = \int_{t_1}^\infty u_o(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{3}$$

Schemat zastępczy służący do wyznaczenia prądu płynącego przez wyłącznik W_1 przedstawiono na rys. 4.

Transformatę prądu obliczamy jako

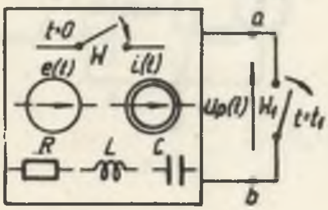
$$J_z(p) = \frac{U_o^*(p)}{Z(p)}, \tag{4}$$

a przebieg czasowy

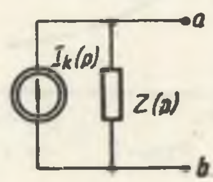
$$i_z(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{J_z(p)\right\}. \tag{5}$$

Obliczenie napięcia powrotnego

Rozważmy z kolei układ aktywny (rys. 5), będący w stanie nieustalonym spowodowanym zamknięciem wyłącznika W w chwili $t = 0$, w którym interesuje nas wyznaczenie przebiegu napięcia powrotnego $u_p(t)$ powstającego na wyłączniku W_1 otwierającym się w chwili $t = t_1$. Stosując twierdzenie Nortona o zastępczym generatorze prądu można w miejsce układu aktywnego wprowadzić zastępczy dwójnik aktywny przedstawiony na rys. 6.



Rys. 5



Rys. 6

Podobnie jak poprzednio $Z(p)$ jest operatorową impedancją układu widzianego od strony zacisków a b przy zwartych SEM i rozwartych SPM, a $I_k(p)$ jest transformatą prądu płynącego w gałęzi z wyłącznikiem W_1 gdy jest on zamknięty. Przebieg tego prądu (rys. 7a) wyznaczamy stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I_k(p)\right\} = i_k(t)\mathbb{1}(t). \tag{6}$$

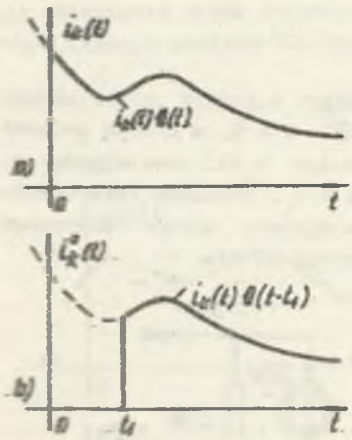
Aby wyznaczyć napięcie powrotne $u_p(t)$, należy rozpatrzyć funkcję obciętą dla czasów $t < t_1$ (rys. 7b)

$$i_k^*(t) = i_k(t)\mathbb{1}(t - t_1), \tag{7}$$

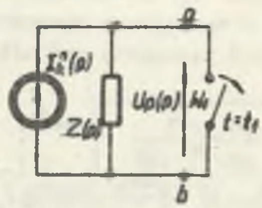
której transformata wynosi

$$I_k^*(p) = \int_{t_1}^{\infty} i_k(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{8}$$

Schemat zastępczy służący do wyznaczenia napięcia powrotnego na wyłączniku W_1 przedstawiono na rys. 8.



Rys. 7



Rys. 8

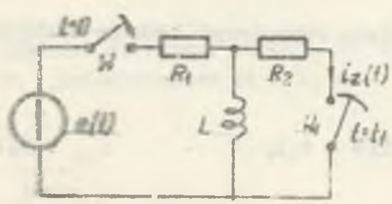
Transformatę napięcia obliczymy jako

$$U_p(p) = I_k^*(p)\, Z(p), \tag{9}$$

a przebieg czasowy

$$u_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_p(p)\right\}. \tag{10}$$

<u>Przykład 1</u>



Rys. 9

W obwodzie przedstawionym na rys. 9 należy wyznaczyć przebieg prądu $i_z(t)$, który popłynie przez wyłącznik W_1, jeżeli wyłącznik W został zamknięty w chwili $t = 0$, a wyłącznik W_1 zamknięty w chwili $t = t_1$. $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$.

Transformata napięcia na zaciskach otwartego wyłącznika W_1 przy zastosowaniu metody symbolicznej ma postać

$$\hat{U}_o(p) = \frac{\hat{E}_m pL}{(p - j\omega)(R_1 + pL)},$$

a przebieg czasowy

$$\hat{u}_o(t) = \left(\frac{\hat{E}_m j\omega L e^{j\omega t}}{R_1 + j\omega L} + \frac{\hat{E}_m R_1 e^{-\frac{R_1}{L}t}}{R_1 + j\omega L}\right)\mathbf{1}(t).$$

Funkcja obcięta $\hat{u}_o^*(t) = \hat{u}_o(t)\,\mathbf{1}(t - t_1)$ (po wprowadzeniu prostych przekształceń, które umożliwiają korzystanie z twierdzenia o przesunięciu przy przejściu na formę operatorową) ma postać

$$\hat{u}_o(t) = \left[\hat{A}\, e^{j\omega(t-t_1)} + \hat{B}\, e^{-\frac{R_1}{L}(t-t_1)}\right]\mathbf{1}(t - t_1),$$

a transformata

$$\hat{U}_o^*(p) = \frac{\hat{A}e^{-pt_1}}{p - j\omega} + \frac{\hat{B}e^{-pt_1}}{p + \frac{R_1}{L}},$$

przy czym

$$\hat{A} = \frac{\hat{E}_m j\omega L e^{j\omega t_1}}{R_1 + j\omega L}; \quad \hat{B} = \frac{\hat{E}_m R_1 e^{-\frac{R_1}{L}t_1}}{R_1 + j\omega L}.$$

Impedancja układu widziana od strony wyłącznika W_1 przy zwartej SEM e(t)

$$Z(p) = R_2 + \frac{R_1 pL}{R_1 + pL} = (R_1 + R_2)\frac{R' + pL}{R_1 + pL},$$

gdzie

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Transformata prądu $i_z(t)$

$$\hat{J}_z(p) = \frac{\hat{U}_o^*(p)}{Z(p)} = \frac{\hat{A}}{R_1 + R_2} \cdot \frac{(R_1 + pL)\, e^{-pt_1}}{(p - j\omega)(R' + pL)} + \frac{\hat{B}}{R_1 + R_2} \cdot \frac{L e^{-pt_1}}{R' + pL}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a i przechodząc z funkcji symbolicznej na przebieg czasowy otrzymamy

$$i_z(t) = \mathrm{Im}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\hat{J}_z(p)\right]\right\} = \left[J_m \sin(\omega t + \alpha) + J' e^{-\frac{R'}{L}(t - t_1)}\right] \mathbf{1}(t - t_1),$$

gdzie

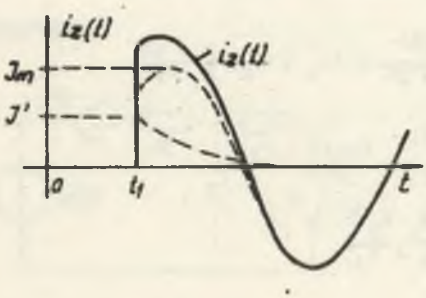
$$J_m = \frac{E_m \omega L}{(R_1 + R_2) Z'}; \quad \alpha = \psi - \varphi' + \frac{\pi}{2}$$

$$Z' = \sqrt{(R')^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi' = \mathrm{arc\ tg}\, \frac{\omega L}{R'}$$

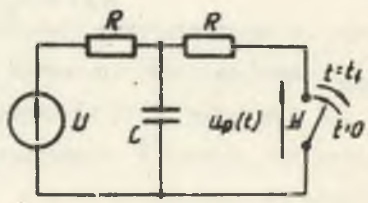
$$J' = \frac{E_m R_1}{R_1 + R_2}\left[\sin(\psi - \varphi_1)\, e^{-\frac{R_1}{L} t_1} - \frac{\omega L R_1}{(R_1 + R_2) Z_1 Z'} \sin(\omega t_1 + \psi - \varphi_1 - \varphi' - \frac{\pi}{2})\right.$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L^2)}; \quad \varphi_1 = \mathrm{arc\ tg}\, \frac{\omega L}{R_1}.$$

Na rys. 10 przedstawiono przebieg prądu $i_z(t)$ linią ciągłą.



Rys. 10



Rys. 11

Przykład 2

W obwodzie przedstawionym na rys. 11 należy wyznaczyć przebieg napięcia na wyłączniku W, jeżeli wyłącznik ten został zamknięty w chwili t=0, a po czasie t_1 otwarty. U = const. Dla $t < 0$ w obwodzie panował stan ustalony.

Transformata prądu płynącego przez zamknięty wyłącznik W (z uwzględnieniem warunku początkowego na kondensatorze $u_c(0) = U$) ma postać

$$I_k(p) = \frac{U}{pR(pRC + 2)} + \frac{UC}{pRC + 2},$$

a przebieg czasowy

$$i_k(t) = \frac{U}{2R}\left(1 + e^{-\frac{2t}{RC}}\right)\mathbb{1}(t).$$

Funkcja obcięta prądu $i_k^*(t) = i_k(t)\,\mathbb{1}(t - t_1)$ ma postać

$$i_k^*(t) = \frac{U}{2R}\left(1 + e^{-\frac{2t_1}{RC}}\,e^{-\frac{2(t-t_1)}{RC}}\right)\mathbb{1}(t - t_1),$$

a transformata

$$I_k^*(p) = \frac{U}{2R}\left(\frac{1}{p} + \frac{e^{-\frac{2t_1}{RC}}}{p + \frac{2}{RC}}\right)e^{-pt_1}.$$

Impedancja układu widziana od strony wyłącznika W przy zwartej SEM U wynosi

$$Z(p) = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + pC}.$$

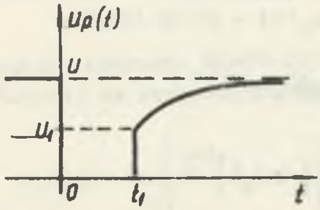
Transformata napięcia powrotnego na wyłączniku ma postać

$$U_p(p) = I_k^*(p)\,Z(p) =$$

$$= \frac{U}{2}\left[\frac{pRC + 2}{p(pRC+1)} + \frac{RCe^{-\frac{2t_1}{RC}}}{pRC + 1}\right]e^{-pt_1}.$$

Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymamy

$$u_p(t) = (U - U_1\, e^{-\frac{t-t_1}{RC}})\, 1(t - t_1),$$



Rys. 12

gdzie

$$U_1 = \frac{U}{2}(1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}).$$

Przebieg napięcia $u_p(t)$ przedstawiono na rysunku 12.

LITERATURA

1. Cichowska Z.: Transformata funkcji obciętej i jej zastosowanie w analizie obwodów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka", z. 36, 1973.
2. Doetsch G.: Praktyka przekształcenia Laplace'a. PWN, Warszawa 1964.
3. Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ОТРЕЗНОЙ ФУНКЦИИ
ДЛЯ РАСЧЕТА ТОКОВ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ
И НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗВРАТА

С о д е р ж а н и е

Использовано изображение отрезной функции для расчётов системы, в которой включение или отключение выключателя имеет место во время неустановившегося состояния. Рассуждения проиллюстрированы примерами.

APPLICATION OF A TRANSFORM OF A CUT-OFF FUNCTION FOR
CALCULATION OF SHORT-CIRCUIT CURRENTS AND RECOVERY VOLTAGES

S u m m a r y

The transform of a cut-off function has been used for calculation in a system where closing and opening of a circuit-breaker happens in the course of a transient state. The considerations are illustrated by some examples.