ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria : AUTOMATYKA z.59 Nr kol.694

Krzysztof BARON
Michał LATARNIK

Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

STEROWANIE STOCHASTYCZNIE OPTYMALNE ROZDZIAŁEM ZASOBÓW WODY W PRZYPADKU OKRESOWYM *

Streszczenie.

W niniejszej pracy rozważany jest przypadek sterowania ilościowym rozdziałem wody w systemie, w którym probabilistyczne charakterystyki dopływów, zapotrzebowań na wodę oraz współczynniki modelu sterowanego systemu są okresowe.
Zagadnienie sterowania sprowadzono do problemu optymalnego nadążania stanu systemu za zadaną trajektorią w obecności zakłóceń.
Sformułowano zagadnienie okresowego stochastycznie optymalnego sterowania oraz podano warunki wystąpienia takiego sterowania.
Sprecyzowano graniczny algorytm stochastycznie optymalnego okresowego sterowania oraz omówiono jego własności.

1. Wprowadzenie

Proces sterowania zasobami wody w zbiorniku i ich rozdziałem pomiędzy użytkowników podlega znacznym wpływom czynników losowych związanych głównie z dopływami do zbiornika i zapotrzebowaniami na wodę.

Cechą charakterystyczną statystycznych parametrów tych losowych wielkości jest cykliczność o dającym się zauważyć rocznym cyklu wahań. Cykliczność wynika z sezonowo zmiennego charakteru

---

* Praca niniejsza została wykonana w Instytucie Automatyki w ramach problemu rządowego PR-7, NB-31/RAu-1/1979.

dopływów do zbiornika w okresie roku oraz zmiennych w ciągu roku zapotrzebowań na wodę przez poszczególnych użytkowników zasobów.

W trakcie określania sterowania stochastycznie optymalnego dla układów charakteryzujących się cyklicznie zmiennymi statystycznymi parametrami rozkładów prawdopodobieństw zmiennych losowych oraz cyklicznie zmiennymi współczynnikami równań modelu uzyskuje się przebieg optymalnej wartości wskaźnika jakości S_n, w którym przy wystarczająco dużym przedziale $[N_o , N]$ trawania procesu można wydzielić składową zbliżającą się dowolnie blisko do periodycznej.

Przez S_n oznaczono tu optymalną wartość przyjętego wskaźnika osiąganą w przedziale $[n , N]$. Podstawową cechą szerokiej grupy układów, dla których w przebiegu wskaźnika S_n można wydzielić składową periodyczną przy odpowiednio dużym N, jest możliwość sformułowania dla nich granicznego algorytmu okresowego sterowania.

Do wyznaczenia tego algorytmu wystarczające są informacje o parametrach modelu i wymuszeniach zewnętrznych w przedziale czasu odpowiadającym okresowi wahań wskaźnika S_n.

Istotny wydaje się być fakt, że zastosowanie tego, na ogół prostego, algorytmu granicznego pozwala uzyskać dowolnie małe odchylenia względne $E\left(S^{*}_{No} - S_{No}\right) / E\left(S_{No}\right)$ oczekiwanej wartości wskaźnika S^{*}_{No}, uzyskanej przy zastosowaniu algorytmu granicznego od oczekiwanej wartości optymalnego wskaźnika S_{No}, jeśli tylko wystarczająco długi jest przedział sterowania $[N_o , N]$.

2. Sterowanie stochastycznie optymalne

Dla rozważanego zagadnienia sterowania rozdziałem zasobów wody wyróżniono w ramach systemu [3],[6] :
zbiornik oraz użytkowników systemu. W opisie systemu nie wyróżnia się sieci transportującej wodę ze zbiornika do użytkowników. Zakłada się bowiem, że brane tu będą pod uwagę tylko takie systemy, w których sieć zaprojektowano z nadmiarem zabezpieczającym przed pracą sieci na granicznych dopuszczalnych przepływach.

Bilans zgromadzonych zasobów podlegających sterowaniu w systemie można w n-tym kroku sterowania opisać równaniem:

$$h_{n+1} = h_n + \underline{d}_n - B^1_n \, k_n \qquad /1/$$

$$n = N_o , N_o + 1 , \ldots , N - 1,$$

gdzie:

h_n - poziom zasobów

$\underline{d}_n$ - dopływ do zbiornika ; zakładamy, że jest procesem losowym Gaussa - Markowa o okresowo zmiennych /cykl roczny/ funkcjach rozkładów prawdopodobieństwa,

k_n - wektor poboru wody przez poszczególnych odbiorców wody w systemie,

B_n^1 - macierz wierszowa złożona z jedynek, $\dim B_n^1 = 1 \cdot \dim k_n$,

N_o, N - liczby całkowite,odpowiednio początkowa i końcowa chwila sterowania,

h_{No}, k_{No} - zmienne losowe o znanych rozkładach prawdopodobieństwa.

Niech stan odbiorców wody będzie opisany równaniem:

$$\underline{x}_{n+1} = A_n^2 \underline{x}_n + B_n^2 k_n + w_n \qquad /2/$$

$$n = N_o, N_o + 1, \dots , N - 1$$

gdzie: $\underline{x}_n$ - wektor stanu odbiorców,

$\underline{x}_{No}$ - zmienna losowa o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa,

A_n^2 , B_n^2 - macierze o odpowiednich wymiarach,

w_n - zakłócenia w dostawach wody /np.opady atmosferyczne/ ; zakładamy, że jest to "biały szum" gaussowski o zerowej wartości oczekiwanej i kowariancji $E\left(w_n w_n^T\right) = W_n$.

Jako wskaźnik sterowania przyjmujemy następującą sumę:

$$J = \sum_{n=N_o}^{N} \left[\left(h_n - h_{zn}\right)^T Q_n^1 \left(h_n - h_{zn}\right) + \left(\underline{x}_n - \underline{z}_n\right)^T Q_n^2 \left(\underline{x}_n - \underline{z}_n\right)\right] +$$

$$+ \sum_{n=N_o}^{N-1} u_n^T H_n u_n \qquad /3/$$

gdzie:

h_{zn} - pożądany poziom zasobów wody w zbiorniku /polityka retencji/ ; zakładamy, że jest procesem losowym Gaussa - Markowa ;

z_n - wektor zapotrzebowań użytkowników na wodę ; zakładamy, że jest procesem losowym Gaussa - Markowa, $\dim z_n = \dim \underline{x}_n$,

$u_n = k_{n+1} - k_n$, $n = N_o, N_o+1, \ldots, K-1$ /3a/

- różnica pomiędzy ilościami wody skierowanej do poszczególnych użytkowników w kolejnych przedziałach czasu,

Q_n^1, Q_n^2 - symetryczne, dodatnio półokreślone macierze pozwalające z różnymi wagami traktować potrzeby poszczególnych użytkowników,

$\dim Q_n^1 = 1$, $\dim Q_n^2 = \dim \underline{x}_n \cdot \dim \underline{x}_n$

H_n - macierz symetryczna dodatnio określona o wymiarze $\dim k_n \cdot \dim k_n$,

- o procesach h_{zn}, z_n zakłada się, że ich funkcje rozkładów gęstości prawdopodobieństwa są określone /o cyklu rocznym/; dopuszcza się tutaj wzajemne skorelowanie dopływów $\underline{d}_n$, pożądanego poziomu zasobów w zbiorniku h_{zn} , oraz zapotrzebowań z_n.

Pierwsza grupa składników wyrażenia /3/, zależna od różnicy $(h_{zn} - h_n)$, reprezentuje sobą kary za odchylenie od pożądanego poziomu zasobów. Wprowadzenie tej grupy składników do wskaźnika jakości pozwala oddzielić rozpatrywany tu problem sterowania w normalnych eksploatacyjnych warunkach od przypadków awaryjnych /powódź $(h_n = h_{max})$, susza $(h_n = h_{min})$ /. Wieloletnia obserwacja środowiska systemu pozwala zwykle określić pożądaną tzw. politykę retencji - h_{zn}, przestrzeganie której wyklucza możliwość występowania $h_n = h_{max}$ lub $h_n = h_{min}$.
Nadążanie za pożądanym przebiegiem h_{zn} pozwala równocześnie na spełnienie wymagań tych użytkowników [3] , którzy do realizacji swoich potrzeb wymagają odpowiedniego poziomu zasobów /energetyka, środowisko naturalne/.

Druga grupa składników wskaźnika /3/, zależna od różnicy $(\underline{x}_n - z_n)$, reprezentuje sobą kary za nierealizowanie zapotrzebowań użytkowników systemu na wodę.

Natomiast trzecia grupa, zależna od różnic $k_{n+1} - k_n$, jest karą za nierównomieruośc przepływów w sieci dystrybucyjnej. Nierównomierność przepływów prowadzi zwykle do zwiększenia nakładów inwestycyjnych na sieć, ponieważ sieć musi wówczas zagwarantować /zgodnie z wcześniejszym założeniem/ realizację większych chwilowo przepływów.

Postawiony powyżej problem rozdziału wody w systemie wodno-gospodarczym można rozważać jako liniowo-kwadratowe zagadnienie optymalnego nadążania w obecności zakłóceń.

Przyjmując podstawienia:

$$x_n = \begin{bmatrix} h_n \\ \underline{z}_n \\ k_n \end{bmatrix}, \quad d_n = \begin{bmatrix} \underline{d}_n \\ w_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_n = \begin{bmatrix} h_{zn} \\ z_n^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz odpowiednie macierze:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -B_n^1 \\ 0 & A_n^2 & B_n^2 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \qquad B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad Q_n = \begin{bmatrix} Q_n^1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:
I - macierz jednostkowa o wymiarach: $\dim k_n \cdot \dim k_n$,

można łącznie zapisać równania /1/, /2/, /3a/ w postaci:

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n u_n + d_n \qquad /4/$$

$$n = N_0, N_0+1, \dots, N-1$$

oraz podać łączną postać pierwotnego wskaźnika jakości /3/:

$$J = \sum_{n=N_0}^{N} (x_n - p_n)^T Q_n (x_n - p_n) + \sum_{n=N_0}^{N-1} u_n^T H_n u_n \qquad /5/$$

Zakładamy całkowitą sterowalność [5] układu /4/ w każdej chwili n oraz brak wpływu sterowania u_n na wartości zmiennych losowych d_m, p_{m+1} określonych dla chwili $m \leq n$, czyli d_n, p_{n+1}, d_{n-1}, p_n, ... , d_{N_0}, p_{N_0+1}.

Zakładamy następującą postać równań wielkości mierzonych, wyjść i mierzonych dopływów:

$$y_n = C_n x_n + v_n^1 \qquad /6/$$

$$r_n = d_n + v_n^2 \qquad /7/$$

$$n = N_o, N_o+1, \dots, N$$

gdzie: y_n, r_n - wektory pomiarów odpowiednio wyjścia i dopływów,

C_n - macierz o odpowiednim wymiarze,

v_n^1, v_n^2 - wektory błędów pomiarowych; zakładamy, że są gaussowskimi białymi szumami o zerowej wartości średniej i kowariancjach odpowiednio V_n^1 i V_n^2, niezależnymi od innych zmiennych.

Oznaczmy przez $\vec{y}_n$ wektor informacji bieżącej dotyczącej układu /4/÷/7/, wykorzystywany do wyznaczenia sterowania.
Niech $\vec{y}_n = \left\{ y_{No}^T, \dots, y_n^T, r_{No}^T, \dots, r_l^T, p_{No}^T, \dots, p_k^T, u_{No}^T, \dots, u_{n-1}^T \right\}^T$,

Wartości r_l, p_k mogą być znane również z wyprzedzeniem $(l,k > n)$ lub opóźnieniem $(l,k < n)$ względem aktualnej chwili n.
Wprowadzając wektor pełnej informacji o układzie /4/,/5/ - $\vec{y}_n^c$, można podać prawo optymalnego sterowania oraz określić osiąganą przy optymalnym sterowaniu wartość wskaźnika jakości /korzystając np. z metody programowania dynamicznego/.

Dla przypadku pełnej informacji algorytm sterowania optymalnego określony jest następująco:

$$u_n^c = - G_n \left(R_{n+1} A_n x_n + \sum_{i=n}^{N-1} L_{n+1,i} d_i + \sum_{j=n+1}^{N} M_{n+1,j} p_j \right) \qquad /8/$$

Wektor pełnej informacji w rozpatrywanym przypadku przyjmuje postać :

$$\vec{y}_n^c = \left[x_n^T, d_n^T, p_{n+1}^T, d_{n+1}^T, \dots, p_{N-1}^T, d_{N-1}^T, p_N^T \right]^T$$

i posiada zmienny wymiar $\left[2\left(N - n\right) + 1 \right] \cdot \dim x_n$.

Wartość wskaźnika jakości osiągana przy optymalnym sterowaniu jest określona zależnością:

$$S_n^c = x_n^T R_n x_n + 2 \sum_{i=n}^{N-1} x_n^T L_{n,i} d_i + \sum_{i,j=n}^{N-1} d_i^T F_{i,j}^n d_j +$$

$$+ 2\sum_{j=n}^{N} x_n^T M_{n,j}\, p_j + \sum_{i,j=n}^{N} p_i^T T_{i,j}^n\, p_j +$$

$$+ 2\sum_{i=n}^{N-1} \sum_{j=n+1}^{N} d_i^T G_{i,j}^n\, p_j \qquad /9/$$

$n = N_o, N_o+1, \ldots, N-1$

gdzie: R_n - macierz spełniająca macierzowe równanie Riccati'ego:

$$R_n = Q_n + A_n^T \left(I - R_{n+1}\alpha_n\right) R_{n+1} A_n \qquad /10/$$

z warunkiem końcowym $R_N = Q_N$, przy czym

$$\alpha_n = B_n^T \left(B_n^T R_{n+1} B_n + H_n\right)^{-1} B_n . \qquad /10a/$$

Pozostałe macierze zależności /8/, /9/ określone są wzorami:

$$G_n = \left(B_n^T R_{n+1} B_n + H_n\right)^{-1} B_n \qquad /10b/$$

$$L_{n+1,i} = A_n^T \left(I - R_{n+1}\alpha_n\right) L_{n+2,i} \quad ; \; i=n+1,\ldots,N-1, \qquad /10c/$$

przy czym $L_{n+1,n} = R_{n+1}$

$$M_{n+1,j} = A_n^T \left(I - R_{n+1}\alpha_n\right) M_{n+2,j} \quad , \; j = n+1,\ldots,N, \qquad /10d/$$

przy czym $M_{n,n} = -Q_n$

$$F_{n,i}^n = \left(I - R_{n+1}\alpha_n\right) L_{n+1,i} \quad , \; i=n,\ldots,N-1 \qquad /10e/$$

$$F_{i,j}^n = F_{i,j}^{n+1} - L_{n+1,i}^T\, \alpha_n\, L_{n+1,j} \quad ; \; i,j=n+1,\ldots,N-1, \qquad /10f/$$

przy czym $F_{n,n}^{n+1} = R_{n+1}$

$$G_{n,i}^n = \left(I - R_{n+1}\alpha_n\right) M_{n+1,i} \quad , \; i = n+1,\ldots,N \qquad /10g/$$

$$G_{i,j}^n = G_{i,j}^{n+1} - L_{n+1,i}^T\, \alpha_n\, M_{n+1,j} \quad , \; \begin{array}{l} i = n+1,\ldots,N-1 \\ j = n+1,\ldots,N , \end{array} \qquad /10h/$$

przy czym $G^n_{n,n} = 0$

$$T^n_{i,j} = T^{n+1}_{i,j} - M^T_{n+1,i}\,\alpha_n\,M_{n+1,j} \quad ; \quad i,j = n+1,\dots,N\,, \qquad /10i/$$

przy czym $T^n_{n,n} = Q_n$; $T^n_{n,i} = 0$; $i = n+1,\dots,N$

Ze względu na nieznajomość przyszłych wartości wielkości losowych wchodzących do wektora $\vec{y}^c_n$, nie można wyznaczyć optymalnego sterowania /8/ dla pierwotnego wskaźnika /5/. Przyjmując zatem założenie o znajomości funkcji rozkładów prawdopodobieństwa określonych zmiennych losowych można poszukiwać w rozważanym układzie algorytmu sterowania stochastycznie optymalnego $u_n = a^o_n(\vec{y}_n)$, minimalizującego wtórny wskaźnik jakości, będący warunkową /ze względu na $\vec{y}_n$/ wartością oczekiwaną wskaźnika pierwotnego /5/, czyli :

$$E\left[J(a^o_n)\right] = \operatorname*{Min}_{a_n} E\left[\sum_{n=N_o}^{N} (x_n - p_n)^T Q_n (x_n - p_n) + \sum_{n=N_o}^{N-1} a^T_n(\vec{y}_n)\, H_n\, a_n(\vec{y}_n)\right].$$

Wyznaczone w oparciu o zasadę stochastycznej równoważności [2] prawo stochastycznie optymalnego sterowania jest funkcją ocen składowych wektora $\vec{y}^c_n$ i przyjmuje postać:

$$u_n = -G_n\left(R_{n+1} A_n \hat{x}_n + \sum_{i=n}^{N-1} L_{n+1,i}\,\hat{d}_i + \sum_{j=n+1}^{N} M_{n+1,j}\,\hat{p}_j\right) \qquad /11/$$

$$n = N_o,\ N_o+1,\ \dots,\ N-1,$$

gdzie: $\hat{x}_n$, $\hat{d}_i$, $\hat{p}_j$ – warunkowe wartości oczekiwane składowych wektora $\vec{y}^c_n$, wyznaczone przy znajomości $\vec{y}_n$.

$$\hat{x}_n = E_{|\vec{y}_n}(x_n)$$

$$\hat{d}_i = E_{|\vec{y}_n}(d_i) \quad , \quad i = n,\dots,N-1$$

$$\hat{p}_j = E_{|\vec{y}_n}(p_j)\ , \quad j = n+1,\dots,N$$

Warunkowa ocena wartości wskaźnika jakości /9/ wyraża się przy sterowaniu stochastycznie optymalnym następująco:

$$S_n = E_{|\vec{y}_n}(S_n^c) = E_{|\vec{y}_n}(x_n^T R_n x_n) + 2\sum_{i=n}^{N-1} E_{|\vec{y}_n}(x_n^T L_{n,i} d_i) +$$

$$+ \sum_{i,j=n}^{N-1} E_{|\vec{y}_n}\left(d_i^T F_{i,j}^n d_j\right) + 2\sum_{i,j=n}^{N} E_{|\vec{y}_n}\left(x_n^T M_{n,j} p_j\right) +$$

$$+ 2\sum_{i=n}^{N-1}\sum_{j=n+1}^{N} E_{|\vec{y}_n}\left(d_i^T G_{i,j}^n p_j\right) +$$

$$+ \sum_{i,j=n}^{N} E_{|\vec{y}_n}\left(p_i^T T_{i,j}^n p_j\right) + E_{|\vec{y}_n}(D_n)\ . \qquad /12/$$

gdzie:
$$D_n = \tilde{u}_n^{c\,T}\left(B_n^T R_{n+1}\beta_n + H_n\right)\tilde{u}_n^c + D_{n+1}$$

z warunkiem końcowym $D_N = 0$.

Wektor $\tilde{u}_n^c = u_n^c - u_n$ jest odchyłką sterowania statystycznie optymalnego od optymalnego, wyznaczonego przy znajomości $\vec{y}_n^c$.

Ze względu na założony gaussowski charakter procesów losowych do wyznaczenia ocen składowych $\vec{y}_n^c$ - $\hat{x}_n$, $\hat{d}_i$, $\hat{p}_j$ można np. użyć rozszerzonego filtru Kalmana [2],[5].

3. Zagadnienia okresowego sterowania stochastycznie optymalnego. Graniczny algorytm okresowy

W definicji okresowego sterowania stochastycznie optymalnego wykorzystuje się informację o zachowaniu się optymalnej wartości wskaźnika jakości S_n, uzyskanej w przedziale $[n\ ,\ N]$,przy czym bierze się pod uwagę ocenę przyrostu tego wskaźnika w przedziale Ω chwil

$$E\left(S_n - S_{n+\Omega}\right)$$

$$N_o \leqslant n < n+\Omega \leqslant N$$

gdzie : $\Omega = 1,2,3,\ldots$

Definicja 1.

Sterowanie stochastycznie optymalne nazywać będziemy okresowym o okresie Ω_p, jeśli istnieje taka liczba $\Delta S > 0$, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją przedziały chwil N_1, N_2 /N_1, N_2 - liczby naturalne/ takie, że przy $N_0 + N_1 \leq n < n + \Omega \leq N - N_2$ nierówność

$$\Delta S - \varepsilon < E(S_n - S_{n+\Omega}) < \Delta S + \varepsilon$$

jest spełniona dla $\Omega = \Omega_p$, a nie jest spełniona dla $0 < \Omega < \Omega_p$.

Można zauważyć, że dla n należących do przedziału $[N_0+N_1, N-N_2]$ w przebiegu $E(S_n)$ występuje obok składowej liniowo malejącej interesujący nas składnik odbiegający co najwyżej o ε od periodycznego o okresie Ω_p.

Definicję 1 jest sens wprowadzić dla tych układów, dla których przedział $[N_0, N]$ jest wystarczająco długi. Wymaganie to wynika z warunku $N - N_0 > N_1 + N_2$ oraz ze związku pomiędzy liczbą ε, a N_1 i N_2, przy czym zwykle zmniejszenie ε wymaga wzrostu N_1 i N_2.

W rozważanym przypadku liniowo-kwadratowym wyznaczone sterowanie stochastycznie optymalne $u_n = a_n^o(\vec{y}_n)$ jest sterowaniem okresowym, jeśli współczynniki modelu /równanie stanu i wyjścia, wskaźnika jakości/ oraz parametry wymuszeń spełniają określone warunki.

Twierdzenie 1.

Sterowanie stochastycznie optymalne dla układu /4/÷/7/ jest okresowe o okresie podstawowym $\Omega_p \geq 1$ w sensie definicji 1, jeśli dla każdej chwili n z przedziału $N_0 \leq n \leq N - \Omega_p$ oraz $m = 0, \ldots, \Omega_p - 1$ są dla $\Omega = \Omega_p$ spełnione warunki:

a/ $A_n = A_{n+\Omega}$

b/ $B_n = B_{n+\Omega}$

c/ $C_n = C_{n+\Omega}$

d/ $H_n = H_{n+\Omega}$

e/ $Q_n = Q_{n+\Omega}$

f/ $V_n^1 = V_{n+\Omega}^1$

g/ $V_n^2 = V_{n+\Omega}^2$

h/ $E(d_n d_{n+m}^T) = E(d_{n+\Omega} d_{n+\Omega+m}^T)$

i/ $E(d_n p_{n+1+m}^T) = E(d_{n+\Omega} p_{n+1+\Omega+m}^T)$

j/ $E(p_n p_{n+m}^T) = E(p_{n+\Omega} p_{n+\Omega+m}^T)$

k/ $E(d_n) = E(d_{n+\Omega})$

l/ $E(p_n) = E(p_{n+\Omega})$

m/ istnieje jednoznaczne okresowe /o okresie Ω/ rozwiązanie równania Riccati'ego /10/

oraz dla każdej wartości Ω z przedziału $0 < \Omega < \Omega_p$ co najmniej jeden spośród warunków a/ ÷ m/ nie jest spełniony.

Istnienie okresowego rozwiązania równania Riccati'ego /10/ jest zagwarantowane, jeśli tylko są spełnione warunki:

R1. zachodzą równości a/, b/, d/, e/

R2. pary $[A, B(n+m)]$ dla $N_0 \leq n \leq N-\Omega$ i $m = 0,\dots,\Omega-1$ są całkowicie sterowalne, czyli dla każdej wartości $m = 0,\dots,\Omega-1$ rząd $[B(n+m), AB(n+m), \dots, A^{\dim x_n - 1} B(n+m)] = \dim x_n$

gdzie:

$$A = A(n+\Omega, n) = A_{n+\Omega-1} A_{n+\Omega-2} \cdots A_n$$

$$B(n+m) = [A(n+\Omega, n+m+1) B_{n+m}, B(n+m+i)]$$

dla $i = 0,\dots,\Omega-1$,

przy czym: $B(n+m+\Omega-1) = B_{n+m+\Omega-1}$

Warunki R1, R2 zapewniają istnienie granicy:

$$\lim_{N_2 \to \infty} R_n = R_n^* = R_{n+\Omega}^* .$$

W dowodzie twierdzenia 1 wykorzystywać można algorytm graniczny sterowania okresowego, który w rozpatrywanym problemie odpowiada granicznej postaci prawa sterowania /8/ przy $N_2 \to \infty$. Graniczny algorytm okresowy przyjmuje postać:

$$u_n^* = -G_n^*\left(R_{n+1}^* A_n \hat{x}_n + (I-\gamma)^{-1} \sum_{m=0}^{\Omega_p-1} \left(L_{n+1,n+m}^* \hat{d}_{n+m} + M_{n+1,n+m+1}^* \hat{p}_{n+m+1} \right)\right) \qquad /14/$$

gdzie: G_n^*, $L_{n+1,n+m}^*$, $M_{n+1,n+m+1}^*$ - macierze określone wzorami /10b/ ÷ /10d/ dla $R_n = R_n^*$

$$\gamma = \sum_{i=0}^{\Omega_p-1} A_{n+i}^T \left(I - R_{n+1+i}^* \alpha_{n+i}^*\right)$$

α_{n+i}^* - macierz określona wzorem /10a/ przy $R_n = R_n^*$.

Oznaczmy przez S_n^* wartość wskaźnika jakości uzyskaną w przedziale $[n,N]$ przy sterowaniu określonym przez graniczny algorytm okresowy. Można wykazać, że dla $\Delta S > 0$ i $\varepsilon_1 > 0$ istnieje wymagane N_1 (ponieważ $\varepsilon_1 \geqslant W_1 w_1^{N_1}$ gdzie: $w_1 < 1$; $W_1 < \infty$), że dla $N_o + N_1 \leqslant n < n + \Omega \leqslant N$ nierówność

$$\Delta S - \varepsilon_1 < E\left(S_n^* - S_{n+\Omega}^*\right) < \Delta S + \varepsilon_1 \qquad /15/$$

jest spełniona dla $\Omega = \Omega_p$ oraz nie jest spełniona dla $0 < \Omega < \Omega_p$.

Z drugiej strony dla $\varepsilon_2 > 0$ istnieje takie N_2 $\left(\varepsilon_2 \geqslant W_2 \cdot w_2^{N_2}, \right.$ gdzie: $w_2 < 1$, $\left. W_2 < \infty\right)$ oraz $K \geqslant 0$, że warunki:

$$K - \varepsilon_2' < E\left(S_n^* - S_n\right) < K + \varepsilon_2' \qquad /16a/$$

$$K - \varepsilon_2 < E\left(S_{n+\Omega}^* - S_{n+\Omega}\right) < K + \varepsilon_2 \qquad /16b/$$

są spełnione dla $N_o < n + \Omega \leqslant N - N_2$

i dla $\Omega = \Omega_p$ oraz nie spełnione dla $0 < \Omega < \Omega_p$,

przy czym $0 \leqslant \varepsilon_2' \leqslant \varepsilon_2$.

Zauważmy, że

$$E\left(S_n - S_{n+\Omega}\right) = E\left(S_n - S_n^*\right) + E\left(S_{n+\Omega}^* - S_{n+\Omega}\right) +$$
$$+ E\left(S_n^* - S_{n+\Omega}^*\right).$$

Przyjmując $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3}$, otrzymuje się dla

$$N_o + N_1 \leqslant n < n + \Omega \leqslant N - N_2$$

wymaganą nierówność :

$$\Delta S + \varepsilon < E\left(S_n - S_{n+\Omega}\right) < \Delta S + \varepsilon$$

Pozwala to stwierdzić istnienie stochastycznie optymalnego sterowania okresowego .

Równocześnie dla $\Delta S > 0$ i dowolnie małego $\eta\,(N - N_o)$ można uzyskać:

$$0 < \frac{E\left(S_{N_o}^* - S_{N_o}\right)}{E\left(S_{N_o}\right)} < \eta\left(N - N_o\right)$$

Zastosowanie granicznego algorytmu okresowego zamiast stochastycznie optymalnego pozwala dla odpowiednio dużych przedziałów sterowania $[N_0, N]$ uzyskać dowolnie małe odchylenia względne oczekiwanych wartości wskaźników jakości przy sterowaniu wykorzystującym algorytm graniczny oraz algorytm stochastycznie optymalny.

4. Uwagi końcowe.

1. Rozważane zagadnienie sterowania rozdziałem zasobów wodnych udało się sprowadzić do liniowo-kwadratowego problemu optymalnego nadążania w obecności zewnętrznych wymuszeń.

2. Zastosowanie okresowego algorytmu granicznego w miejsce stochastycznie optymalnego pozwala dla odpowiednio długich przedziałów sterowania uzyskać dowolnie małe odchylenia względne oczekiwanych wartości wskaźników jakości otrzymanych odpowiednio przy wykorzystaniu algorytmu granicznego i sterowania stochastycznie optymalnego.

3. Do wyznaczenia okresowego algorytmu granicznego wystarczająca jest informacja o modelu oraz zakłóceniach w przedziale o długości równej okresowi wahań składowej periodycznej wskaźnika jakości.

4. Okresowe algorytmy graniczne są przydatne głównie dla procesów o dostatecznie długim czasie trwania /dla tzw. procesów o biegu ciągłym/.

5. Celowe wydaje się /szczególnie dla systemów wielowymiarowych/ wykrywanie okresowości w sterowaniu optymalnym w oparciu o przebieg optymalnego wskaźnika jakości /jednowymiarowego/.

6. Sterowanie stochastycznie optymalne jest okresowe, jeśli w rozwiązywanym zagadnieniu optymalizacyjnym występuje okresowość rozwiązań problemów sterowania i estymacji.

Autorzy dziękują Prof. R.GESSINGOWI i współpracownikom z Zespołu Teorii Sterowania za uwagi i dyskusje nad przedstawioną pracą.

LITERATURA

[1] Anderson B., Moore J.: Linear Optimal Control, Englewood Clifs, New Jersey, 1971.

[2] Gessing R.: Uogólniona zasada stochastycznej równoważności i jej zastosowania, Arch. Autom. i Telemech. 1977, tom XXII, z.4.

[3] Lambor J.: Gospodarka wodna na zbiornikach retencyjnych. Wyd. "Arkady", Warszawa 1962 .

[4] Latarnik M.: Sterowanie zbliżone do optymalnego w obecności zakłóceń, Praca doktorska, Politechnika Śląska, 1973.

[5] Meditch J.S.: Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT, Warszawa 1975.

[6] Mitosek H.: Optymalizacja statystycznych modeli retencjonowania podanych przez P.A.P. Morana i Z. Kaczmarka, Arch. Hydrot., z.3, 1973.

[7] Suligowski Z.: Zużycie wody w gospodarstwach domowych, Arch. Hydrot., z.1, 1978.

[8] Raport z pracy zleconej: Metoda i algorytmy sterowania stochastycznie optymalnego zbiorem obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Cz.II. Badania teoretyczne i symulacyjne.
Politechnika Śląska, Instytut Automatyki, 1980, NB-31/RAu-1/1979.

STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL OF THE WATER RESOURCES DISTRIBUTION IN THE PERIODIC CASE

Summary.

In the paper the distribution problem of water resources in the economic system is considered. Statistics of the inflows, [ ] the water demand, and the coefficients of the system model are periodic. Problem of stochastic optimal periodic control is formulated and steady state periodic optimal law for linear quadratic model of the water system is specified.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАЗДЕЛОМ РЕСУРСОВ ВОДЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Резюме.

В работе рассматривается проблему управления разделом ресурсов воды в экономической системе при периодических статистических характеристиках притоков и потребностий на воду а также при периодических коэффициентах модели системы. Представлено свормирование проблемы периодического стохастического оптималного управления и указано граничный альгоритм оптимального периодического управления при линейно-квадратной модели системы.