ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria: AUTOMATYKA z. 59 Nr kol. 694

ANDRZEJ ŚWIERNIAK
Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

ROZDZIAŁ ZASOBÓW WODNYCH W PRZYPADKU DOPŁYWÓW MODELOWANYCH PROCESAMI MARKOWA I RZĘDU

Streszczenie. W pracy przedstawia się strategię stochastycznie optymalnego rozdziału zasobów wodnych w strukturze dwupoziomowej. Zakłada się przy tym różną informację w punktach decyzyjnych wyższego i niższego poziomu oraz przyjmuje się statyczny model odbiorcy i markowski model dopływów do systemu.

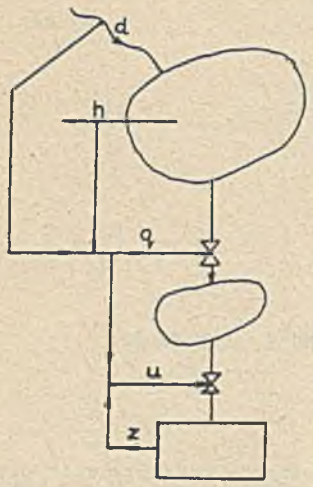
1. WPROWADZENIE

Sterowanie w dużym systemie, jakim jest system wodno-gospodarczy, jest możliwe jedynie przy wykorzystaniu struktury hierarchicznej umożliwiającej dekompozycję zarówno obliczeniową, jaki informacyjną zadania. W niniejszej pracy rozwija się podejście zaproponowane w pracy [1], zakładające różnicę informacji niższego i wyższego poziomu i wprowadzające niekonwencjonalne elastyczne ograniczenie koordynacyjne. W celu uzyskania analitycznego rozwiązania rozważa się bardzo uproszczony model systemu składającego się z jednego magazynu /zbiornika/, użytkowników scharakteryzowanych przez statycznego zunifikowanego odbiorcę oraz zbiorników buforowych umożliwiających dekompozycję zadania oraz czyniących założenie o uśrednianiu realnym.

2. MODEL SYSTEMU

Na rys. 1 przedstawiono rozważany model systemu. Zmianę poziomu wody w zbiorniku retencyjnym można opisać równaniem stanu:

$$h_{i+1}=h_i+d_{i+1}-q_i \qquad i=0,1,\ldots,N-1 \qquad /1/$$



Rys. 1. Model systemu

gdzie: h_i jest mierzonym w i-tym momencie decyzyjnym poziomem wody w zbiorniku, d_{i+1} jest sumarycznym dopływem pomiędzy i-tym a i+1-szym momentem decyzyjnym, a q_i jest decyzją wyższego poziomu o przydziale zasobów na ten okres dla użytkowników. Użytkownicy są scharakteryzowani przez zapotrzebowania z_i zunifikowanego odbiorcy w poszczególnych okresach, które są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładach ograniczonych. Pobory wody przez użytkowników w tych okresach u_i, będące zmiennymi decyzyjnymi niższego poziomu, realizowane są poprzez zbiorniki buforowe, których dostatecznie duża pojemność umożliwia dekompozycję zadania, realizację u_i bez ograniczeń. Model odbiorcy jest więc modelem statycznym. Straty w systemie wyraża pierwotny wskaźnik jakości

$$I = \sum_{i=o}^{N-1} (u_i - z_i)^2 \qquad /2/$$

przy czym N jest horyzontem sterowania. Sumaryczne dopływy miesięczne d_i muszą być traktowane jak zmienne losowe. Dobrym modelem [2] są tu procesy Markowa I rzędu; a zatem ewolucję dopływów opisuje równanie:

$$d_{i+1} = c_i d_i + V_i \qquad i = 0,1,\ldots,N-1 \qquad /3/$$

gdzie V_i są zmiennymi losowymi niezależnymi o rozkładach ograniczonych.

Uzupełnieniem modelu są ograniczenia wynikające z dopuszczalnego maksymalnego i minimalnego poziomu wody w zbiorniku retencyjnym oraz dopuszczalnych przepływów między zbiornikiem retencyjnym a buforowym.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACYJNEGO

Minimalizacja pierwszego wskaźnika jakości jest niemożliwa ze względu na istnienie niepewności w modelu i wskaźniku jakości. Istnieje zatem potrzeba wprowadzenia wtórnego wskaźnika jakości w postaci wartości oczekiwanej wskaźnika pierwotnego, przy czym minimalizacja będzie dokonywana nie po wartościach sterowań, lecz po funkcjach informacji dostępnej na poszczególnych poziomach. Informacja ta na niższym poziomie składa się w i-tej chwili z zapotrzebowań z_i oraz decyzji wyższego poziomu q_i, a na wyższym poziomie z pomiaru poziomu h_i oraz dopływu do i-tej chwili d_i. Koordynacja odbywa się poprzez elastyczne ograniczenie o postaci równości oceny u_i z wyższego poziomu/warunkowej wartości oczekiwanej/ i decyzji q_i. Problem optymalizacyjny ma zatem postać:

$$\min_{\{a_i\},\{b_i\}} J = \min E \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ a_i(b_i(h_i, d_i), z_i) - z_i \right\}^2 \qquad /4/$$

gdzie:

$$\{a_i\} = (a_0 , a_1 , \ldots, a_{N-1})$$

$$\{b_i\} = (b_0 , b_i , \ldots, b_{N-1})$$

przy ograniczeniach dla $i = 0,1,\ldots,N-1$

$$h_{i+1} = h_i + c_i d_i + V_i - q_i \qquad /5/$$

$$d_{i+1} = c_i d_i + V_i \qquad /6/$$

$$E\Big|_{h_i , d_i} u_i = q_i \qquad /7/$$

$$Q_{min} \leqslant q_i \leqslant Q_{max} \qquad /8/$$

$$H_{min} \leqslant h_i + c_i d_i - q_i \leqslant H_{max} \qquad /9/$$

przy czym

$$u_i = a_i(q_i , z_i) \qquad /10/$$

$$q_i = b_i(h_i , d_i) \qquad /11/$$

$$E(V_i) = 0\ , \quad E(V_i V_i^T) = \tilde{V}_i\ , \quad V_{min} \leqslant V_i \leqslant V_{max} \qquad /12/$$

Ograniczenie /5/ wynika z uwzględnienia równania /3/ w /1/, natomiast ograniczenie /9/ wynika z faktu, że jednokrokowa ocena poziomu nie może przekroczyć dopuszczalnych poziomów bezpiecznych, tzn.:

$$H_{min} \leqslant E_{|h_i,\, d_i}\, h_{i+1} \leqslant H_{max}$$

Jak można zauważyć, problem wyznaczania sterowań dolnego poziomu jest problemem statycznym, podczas, gdy na górnym poziomie problem jest problemem dynamicznym, przy czym zbiór ograniczeń na sterowanie $Q(h, d)$, wynikający z relacji /8/, /9/, jest w chwili i-tej równoległościanem.

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU OPTYMALIZACYJNEGO

Zgodnie z zasadą Min - E [3] optymalny ciąg decyzji niższego poziomu może być znaleziony z równania Bellmana:

$$S_i(q_i, z_i, h_i, d_i) = \min_{u_i} \Big\{ (u_i - z_i)^2 + E_{|z_i, h_i, d_i} \min_{q_{i+1}} E_{|h_{i+1}, d_{i+1}}$$

$$S_{i+1}(q_{i+1}, z_{i+1}, h_{i+1}, d_{i+1}) \Big\} \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad /13/$$

z warunkiem końcowym $S_N = 0$ i przy ograniczeniu /7/.

Zastosowanie mnożników Lagrange'a [1] daje postać sterowania optymalnego:

$$u_i^o = q_i + z_i - E(z_i)$$

Występująca w /14/ bezwarunkowa wartość oczekiwana z_i wynika z niezależności statystycznej z_i i jest oceną tej wielkości z wyższego poziomu. Możliwość wyznaczenia u_i dla wszystkich i wynika z faktu, że drugi składnik sumy w równaniu /13/ nie zależy od u_i.

Wyznaczenia decyzji optymalnych wyższego poziomu można dokonać z równania funkcyjnego:

$$\bar{S}_i(h_i,d_i) = \min_{q_i} E_{h_i,d_i}\{(q_i - E(z_i))^2 + \bar{S}_{i+1}(h_{i+1},d_{i+1})\} \qquad /17/$$

$$i = 0,1,\ldots,N-1$$

z warunkiem końcowym $\bar{S}_N(h_N, d_N) = 0$,

przy czym $q_i \in Q(h_i, d_i)$

Ponieważ zbiór $Q(h, d)$ jest wypukły i zwarty, natomiast minimalizowany wskaźnik jest ściśle wypukły, więc [4] istnieje punktowo-punktowe odwzorowanie $q(h,d)$ dla wszystkich h,d, dla których zbiór $Q(h,d)$ jest niepusty.

Warunkiem wystarczającym, aby $Q(h,d)$ był niepusty, jest spełnienie we wszystkich krokach sterowania relacji:

$$Q_{min} + H_{min} \leqslant h_i + c_i d_i \leqslant Q_{max} + H_{max} \qquad /18/$$

Aby zachodził warunek /18/ wystarczy, by

$$\min_i d_i + V_{min} - V_{max} \geqslant Q_{min}, \quad \max_i d_i + V_{max} - V_{min} \leqslant Q_{max}$$

$$H_{min} \leqslant h_o \leqslant H_{max}, \qquad Q_{min} \leqslant c_o d_o \leqslant Q_{max}$$

Przy czym wartości $\min_i d_i$ i $\max_i d_i$ można wyznaczyć przy znanych d_o oraz współczynnikach c_i rekurencyjnie z zależności

$$d_{i\,max} = \begin{cases} c_{i-1}\, d_{i-1\,max} + V_{max} & c_{i-1} \geqslant 0 \\ c_{i-1}\, d_{i-1\,min} + V_{max} & c_{i-1} < 0 \end{cases}$$

$$d_{i\,min} = \begin{cases} c_{i-1}\, d_{i-1\,min} + V_{min} & c_{i-1} \geqslant 0 \\ c_{i-1}\, d_{i-1\,max} + V_{min} & c_{i-1} < 0 \end{cases}$$

$$\max_i d_i = \max_i d_{i\,max}, \qquad \min_i d_i = \min_i d_{i\,min}$$

Można zatem przystąpić do wyznaczania ciągu optymalnych decyzji wyższego poziomu. Wprowadzając wektor stanu $x_i = \begin{bmatrix} h_i \\ d_i \end{bmatrix}$, można zapisać równania stanu w postaci:

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i q_i + C_i V_i \qquad /19/$$

zbiór ograniczeń $Q(x)$ w postaci

$$Q_{min} \leqslant q_i \leqslant Q_{max}$$

$$D_i x_i - H_{max} \leqslant q_i \leqslant D_i x_i - H_{min} \qquad /20/$$

a równanie funkcyjne /17/ w postaci:

$$\bar{S}_i(x_i) = \min_{q_i} E_{|x_i} \left\{ q_i^2 - 2q_i E z_i + L_i + \bar{S}_{i+1}(x_{i+1}) \right\}, \qquad /21/$$

przy czym

$$L_i = \{E(z_i)\}^2, \quad A_i = \begin{bmatrix} 1 & c_i \\ 0 & c_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_i = [1 \ c_i]$$

Można udowodnić indukcyjnie, że:

$$\bar{S}_i(x_i) = x_i^T P_i x_i + 2R_i x_i + F_i \qquad /22/$$

Prawdziwość /22/ wynika z faktu, że optymalne prawo sterowania jest afiniczne względem x_i, przyjmując jedną z pięciu możliwych form:

$$q_i = \begin{cases} \left.\begin{matrix} Q_{min} \\ D_i x_i - H_{max} \end{matrix}\right\} & q_i^o \notin Q(x_i) \\ q_n^o = M_{i+1} x_i + N_{i+1} & q_i^o \in Q(x_i) \\ \left.\begin{matrix} D_i x_i - H_{min} \\ Q_{max} \end{matrix}\right\} & q_i^o \notin Q(x_i) \end{cases}$$

gdzie:

$$M_{i+1} = -(1 + B_i^T P_{i+1} B_i)^{-1} B_i^T P_{i+1} A_i$$

$$N_{i+1} = -(1 + B_i^T P_{i+1} B_i)^{-1} (R_{i+1} B_i - E(z_i))$$

a w ostatnim kroku $M_N = 0$, $N_N = E(z_{N-1})$, $P_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$R_N = [0 \quad 0], \; F_N = 0 .$$

Oczywiście, wartości P_i, R_i, F_i są różne we wszystkich pięciu przypadkach, ale można skonstruować tablicę dla rekurencyjnego wyznaczania tych współczynników. Chociaż w każdym kroku procesu znajdowania odpowiedniej decyzji konieczne jest wykonanie siatki na x_i, to proces ten jest prostszy niż w przypadku klasycznej metody siatek. Istotną własnością, którą należy tu wykorzystać, jest ciągłość optymalnych funkcji $b_i(x_i) = b_i(h_i, d_i)$.

Tablica 1

Sposób wyznaczania współczynników dla optymalnych decyzji sterujących

q_i	P_i	R_i	F_i
Q_{min}	$A_i^T P_{i+1} A_i$	$A_i^T(P_{i+1} B_i Q_{min} + R_{i+1})$	$Q_{min}^2(1+B_i^T P_{i+1} B_i) + L_i + 2Q_{min}(B_i^T R_{i+1} - E(z_i)) + F_{i+1} + tr(\tilde{V}_i C_i^T P_{i+1} C_i)$
$D_i x_i - H_{max}$	$D_i^T D_i + (A_i + B_i D_i)^T \cdot P_{i+1} \cdot (A_i + B_i D_i)$	$-D_i^T(H_{max} + E(z_i)) + -(A_i + B_i D_i)^T (P_{i+1} B_i \cdot H_{max} - R_{i+1})$	$H_{max}^2(1+B_i^T P_{i+1} B_i) + L_i + -2H_{max}(B_i^T R_{i+1} - E(z_i)) + F_{i+1} + tr(\tilde{V}_i C_i^T P_{i+1} C_i)$
$M_{i+1} x_i + N_{i+1}$	$M_{i+1}^T M_{i+1} + (A_i + B_i M_{i+1})^T \cdot P_{i+1} (A_i + B_i M_{i+1})$	$M_{i+1}^T (N_{i+1} - E(z_i)) + (A_i + B_i M_{i+1})^T \cdot (P_{i+1} B_i N_{i+1} + R_{i+1})$	$N_{i+1}^2(1+B_i^T P_{i+1} B_i) + L_i + 2N_{i+1}(B_i^T R_{i+1} - E(z_i)) + F_{i+1} + tr(\tilde{V}_i C_i^T P_{i+1} C_i)$
$D_i x_i - H_{min}$	$D_i^T D_i + (A_i + B_i D_i)^T \cdot P_{i+1} (A_i + B_i D_i)$	$-D_i^T(H_{min} + E(z_i)) + (A_i + B_i D_i)^T (P_{i+1} B_i \cdot H_{min} - R_{i+1})$	$H_{min}^2(1+B_i^T P_{i+1} B_i) + L_i + 2H_{min}(B_i^T R_{i+1} - E(z_i)) + F_{i+1} + tr(\tilde{V}_i C_i^T P_{i+1} C_i)$
Q_{max}	$A_i^T P_{i+1} A_i$	$A_i^T(P_{i+1} B_i Q_{max} + R_{i+1})$	$Q_{max}^2(1+B_i^T P_{i+1} B_i) + L_i + 2Q_{max}(B_i^T R_{i+1} - E(z_i)) + F_{i+1} + tr(\tilde{V}_i C_i^T P_{i+1} C_i)$

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona w pracy metoda znajdowania optymalnych decyzji w dwupoziomowej strukturze rozdziału zasobów wodnych opiera się na rozwiązaniu równań programowania dynamicznego z uwzględnieniem niekonwencjonalnych ograniczeń. Chociaż przedyskutowano jedynie bardzo prosty model systemu, można łatwo zaproponowaną metodę zastosować do przypadku, w którym nie dysponujemy dokładnymi pomiarami h_i, d_i, lecz ich warunkowymi ocenami, a także do przypadku, w którym na wyższym poziomie oprócz zmiennej decyzyjnej q_i pojawia się sterowany odpływ zrzut jałowy . Wówczas jedynie wzrasta liczba możliwych kombinacji "podejrzanych" o optymalność [5]. Niewielką komplikację wprowadza także zwiększenie liczby podsystemów użytkowników, z których każdy scharakteryzowany jest przez odpowiedniego, zunifikowanego odbiorcę, o ile utrzymamy w mocy założenie o odpowiedniej wielkości zbiornikach buforowych. Natomiast rozważenie problemu większej liczby powiązanych ze sobą zbiorników wymagałoby znacznie bardziej skomplikowanych obliczeń.

Na zakończenie pragnę podziękować dr.M.Latarnikowi za dyskusję i cenne uwagi dotyczące zbioru dopuszczalnych sterowań.

LITERATURA

[1] Gessing R.: Metoda dekompozycji i koordynacji statystycznie optymalnego statycznego rozdziału zasobów. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z. 54, 1980.

[2] Kaczmarek Z.: Podstawy gospodarki zbiornikowej. Archiwum Hydrotechniki, z 1, 1963.

[3] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXI, z.4, 1976.

[4] Kleindorfer P., Glover K.: Linear Convex Stochastic Optimal Control with Applications in Production Planning, IEEE Trans. on AC, February 1973.

[5] Świerniak A.: Stochastic Optimization Strategy for the Water Resources

Allocation System (w przygotowaniu).

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОДЯНЫХ РЕСУРСОВ В СЛУЧАЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИТОКОВ.

Резюме :
В работе рассматривается проблема стохатической оптимизации в иерархической системе распределения ресурсов.Применяется модель притоков в виде марковских процессов первой степени.

WATER RESOURCES ALLOCATION IN THE CASE OF A FIRST ORDER MARKOVIAN MODEL OF INFLOWS

Summary:
Water resources allocation hierarchical system in which the information are different on lower and higher levels is discussed in the paper. A customer is characterized by static demands and inflows are assumed to be Markovian processes.