ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria : AUTOMATYKA z.59 Nr kol.694

KONRAD WOJCIECHOWSKI
Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

METODA APROKSYMACJI ORTOGONALNEJ W ZADANIU OPTYMALNEGO ROZDZIAŁU CZASOWEGO

Streszczenie. W pracy rozpatruje się możliwość wykorzystania metody aproksymacji ortogonalnej do rozwiązania zadania optymalnego rozdziału czasowego w wersji sformułowanej w pracy [4]. Przedstawia się kilka wariantów rozwiązania.

1. Wprowadzenie

W pracy [4] omawiano ogólny problem optymalnego rozdziału wody w systemie wodno-gospodarczym i pokazano sposób dekompozycji zadania globalnego na dwa zadania częściowe: optymalnego rozdziału przestrzennego i optymalnego rozdziału czasowego. W pracy [5] przedstawiono rozwiązanie obu tych zadań dla przykładowej sieci. Pierwsze z nich w rozpatrywanym przykładzie posiadało rozwiązanie analityczne, drugie rozwiązano metodą siatek.

Niniejsza praca jest poświęcona analizie rozwiązania zadania optymalnego rozdziału czasowego na drodze zastosowania ortogonalnych aproksymacji dla funkcji optymalnej jakości, praw sterowań i gęstości rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych niepewnych.

Nawiązując do pracy [4], równanie rekurencyjne powierzchni optymalnej jakości ma postać:

$$S_n /x_n/ = \min_{Q_{1n}|x_n} \left[R/Q_{1n}/ + \mathop{E}_{x_n} S/x_{n+1}/ \right] \qquad /1/$$

gdzie $R\,/Q_{1n}/$ jest funkcją otrzymaną w wyniku rozwiązania zadania optymalnego rozdziału przestrzennego w n-tym kroku przy przepływach Q_{1n}, traktowanych jako parametry. Przepływy te są związane z węzłami sieci zawierającymi zbiorniki. Wektor x_n określa stan sieci w chwili n-tej. Fizycznie składowe tego wektora reprezentują ilości wody zgromadzonej w poszczególnych węzłach - zbiornikach systemu.

Ograniczenia, przy których rozwiązywane jest zadanie /1/, mają postać:

$$x_{n+1} = x_n + A_{11}\, Q_{1n} + A_{13}\, Q_{3n} \qquad /2/$$

$$\underline{x} \leqslant x_n \leqslant \overline{x} \qquad /3/$$

$$\underline{Q_1} \leqslant Q_{1n} \leqslant \overline{Q_1} \qquad /4/$$

Zakładając, że zmiennymi niepewnymi są zawarte w wektorze $Q_{3(\cdot)}$ dopływy do systemu o rozkładach $p\,/Q_{3(\cdot)}/$, można równanie /1/ przepisać w postaci:

$$S_n/x_n/ = \min_{Q_{1n}|x_n} \left[R/Q_{1n}/ + \int_{\underline{Q_{3n}}}^{\overline{Q_{3n}}} S_{n+1}\,(x_n+A_{11}Q_{1n}+A_{13}Q_{3n})\,p\,(Q_{3n})\,dQ_3 \right] \qquad /5/$$

W dalszej części pracy dla uproszczenia indeksacji rozpatrywać się będzie jedynie pojedynczy n-ty etap zadania optymalizacji dynamicznej, przy czym indeksy etapu występować będą tylko w odniesieniu do funkcji optymalnej jakości.

2. Aproksymacja ortogonalna

Zakłada się, że dane są następujące układy funkcji ortonormalnych:

1. $e_i/x/ \ : 0 \leqslant x \leqslant x_{max}\,, \quad i = 1,2,..,I$

$$\int_0^{x_{max}} e_i/x/\; e_j/x/\; dx = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2. $f_i/Q/ \ : Q_{min} \leqslant Q \leqslant Q_{max}\,, \quad i = 1,2,\,..,\,J$

$$\int_{Q_{min}}^{Q_{max}} f_i/Q/\; f_j/Q/\; d\,Q = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

3. $g_i/x/ \ : \ 0 \leqslant x \leqslant x_{max}, \quad i = 1,2,..,\,K$

$$\int_0^{x_{max}} g_i/x/\; g_j/x/\; dx = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Wielkości Q_{min}, Q_{max}, x_{max}, wyznaczające zakresy zmienności argumentów, są maksymalne względem składowych i odpowiednich wektorów, tj.:

$$Q_{min} = \min_i \; Q_{i\,min}$$

$$Q_{max} = \max_i Q_{i\ max}$$

$$x_{max} = \max_i x_{i\ max}$$

Funkcje układu 1 związane są z aproksymacją powierzchni optymalnej jakości. Dla rozpatrywanego n-tego etapu mamy:

$$s_{n+1}/x_{n+1}/ \cong s^T_{n+1}\ e/x/$$

gdzie:

$$s^T_{n+1} = \left[s_{1\ n+1}, \dots s_{I\ n+1}\right],\ s_{i,n+1} \in R$$

$$e^T/x/ = \left[e_1/x/, \dots, e_I/x/\right].$$

Funkcje układu 2 wykorzystywane są do aproksymacji gęstości rozkładów prawdopodobieństwa wektora dopływów Q_3.

$$p/Q_{3i}/ \cong p^T_i\ f/Q/$$

$$i = 1,2..,L \text{ indeks składowej wektora } Q_3$$

$$p^T_i = \left[p_{1i}, \dots, p_{Li}\right],\ p_{(\cdot)i} \in R$$

$$f^T/Q/ = \left[f_1/Q/, \dots, f_y/Q/\right],$$

Funkcje układu 3 związane są z aproksymacją praw sterowań, tj.:

$$Q_{1j}/x/ \cong q^T_j\ g/x/$$

$$j = 1,2,..,M \text{ indeks składowej wektora } Q_1$$

$$q^T_j = \left[q_{1j}, \dots, q_{Kj}\right],\ g_{(\cdot)j} \in R$$

$$g^T/x/ = \left[g_1/x/, \dots, g_K/x/\right].$$

W pracy nie rozpatruje się problemów związanych z: wyborami możliwych układów funkcji ortogonalnych jednej lub wielu zmiennych, dopuszczalnymi zakresami zmienności argumentów, oszacowaniem błędu aproksymacji. Omówienie powyższych problemów można znaleźć w pracach [1], [2], [3]. Dla jasności dalszych rozważań przypomina się jedynie, że w przypadku przestrzeni L_2 /a,b/, optymalne w sensie błędu średniokwadratowego współczynniki rozwinięcia funkcji f/z/ w układzie funkcji ortonormalnych φ_i /z/ i = 1, ..., I wyrażają się wzorami:

$$\alpha_i = \int_a^b f/z/\ \varphi_i/z/\ dz,$$

tj. najlepszą aproksymacją funkcji f/z/ w układzie φ_i/z/ jest:

$$f^*/z/ = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \varphi_i /z/,$$

gdzie współczynniki α_i nie zależą od I. W dalszych rozważaniach pracy funkcje f/z/, f^*/z/ są utożsamiane. W przypadku gdy aproksymowana funkcja f/z/ jest określona tylko w skończonym zbiorze punktów $p \triangleq \{ z_1, \dots, z_p \}$, wtedy współczynniki jej rozwinięcia w układzie φ_i/z/ i = 1, .., I wyrażają się wzorami:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} f/z_j/ \varphi_i /z_j/$$

oraz najlepsza aproksymacja funkcji f /z/ ma postać:

$$f^*/z/ = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \varphi_i /z/$$

3. Optymalizacja jednokrokowa

Uwzględniając przyjęty sposób aproksymacji można wynikającą z uśredniania całkę, występującą w równaniu /5/, przedstawić następująco:

$$\int_{\underline{Q}_3}^{\overline{Q}_3} S_{n+1}(x+A_{11}Q_1+A_{13}Q_3)\, p\,(Q_3)\, d\, Q_3 = s^T_{n+1}\, h(x+A_{11}Q_1) \qquad /6/$$

gdzie: $h^T/x+A_{11}Q_1/ = \left[h_1/x+A_{11}Q_1/, \dots, h_I/x+A_{11}Q_1/ \right]$

Funkcje $h_{/./}$ /x + A_{11} Q_1/ zależą od współczynników p rozwinięcia funkcji p /Q_3/ gęstości rozkładu.

W szczególnym przypadku, gdy wektor Q_3 posiada tylko jedną składową, powyższą zależność można wyrazić następująco:

$$h/x + A_{11}\, Q_1/ = \Phi\, /x + A_{11}\, Q_1/\, p$$

gdzie Φ jest macierzą I x J-wymiarową, zaś p wektorem współczynników rozwinięcia funkcji p /Q_3/, tj.:

$$p\, /Q_{31}/ = p^T f\, /Q/$$

Podstawiając /6/ do prawej strony równania /5/ otrzymujemy następujące zadanie minimalizacji:

$$\min_{Q_1|x} \left[R\ /Q_1/ + s^T_{n+1}\ h\ /x + A_{11}\ Q_1/ \right] \qquad /7/$$

przy ograniczeniach: $\underline{Q}_1 \leqslant Q_1 \leqslant \overline{Q}_1$

$$\bigwedge_{Q_3} /\ \underline{x} \leqslant x + A_{11}\ Q_1 + A_{13}\ Q_3 \leqslant \overline{x}\ / \qquad /8/$$

Ograniczenie /8/ przy założeniu ograniczoności rozkładu dopływów Q_3 przyjmuje równoważną postać:

$$\underline{x} - x - A_{13}\ \underline{Q}_3 \leqslant A_{11}\ Q_1 \leqslant \overline{x} - x - A_{13}\ \overline{Q}_3$$

4. Rekurencja dla współczynników powierzchni optymalnej jakości

W wyniku rozwinięcia funkcji S_{n+1} /x/ w szereg o współczynnikach s_{n+1} równanie /7/ należy przekształcić w równanie rekurencji dla tych współczynników. W tym zakresie możliwe są następujące metody.

4.1. Metoda analityczna

Wprowadźmy zbiór $\Omega = \left\{ x : \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \right\}$ oraz zbiory Ω_j $j = 1,..,J$ takie, że $\Omega_1 \cap ... \cap \Omega_J = \Omega$. Dodatkowo zbiory Ω_j posiadają tę właściwość, że w każdym z nich jest dane analityczne prawo sterowania.

$$\overset{o}{Q}_1 = \begin{cases} \overset{o}{Q}_{11}\ /x/ & \text{dla } x \in \Omega_1 \\ \overset{o}{Q}_{1j}\ /x/ & \text{dla } x \in \Omega_j \\ \overset{o}{Q}_{1J}\ /x/ & \text{dla } x \in \Omega_J \end{cases}$$

Wtedy równanie rekurencyjne określające nowe współczynniki s_n ma postać:

$$s_{in} = \sum_{j=1}^{J} \left\{ \int_{\Omega_j} \left[R\ /\overset{o}{Q}_1\ /x// + s^T_{n+1}\ h/x + A_{11}\overset{o}{Q}_1\ /x// \right] e_i\ /x/\ dx \right\},$$

w której odpowiednie całki po zbiorach częściowych Ω_j w szczególnie prostych przypadkach mogą być wyznaczone analitycznie.

4.2. Metoda z aproksymacją praw sterowania

Jednokrokowy problem minimalizacji /patrz p.3/ rozwiązujemy numerycznie dla różnych wartości x, traktowanych jako parametr. W szczególności wartości x można wybierać jako punkty odpowiedniej, niezbyt gęstej ze względu na regularność funkcji $\overset{\circ}{Q}_1/x/$ siatki. Znając wartości funkcji $Q_1/x/$ w punktach $x_1, \ldots, x_p$ można wyznaczyć jej współczynniki rozwinięcia w układzie funkcji $g/x/$ /patrz p. 2/. Stąd dla prawa sterowania j - tego przepływu mamy:

$$\overset{\circ}{Q}_{1j}/H/ = q_j^T g/x/$$

gdzie: i - ty współczynnik wyraża się wzorem:

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{Q}_{1j}/x_k/ g_i/x_k/$$

Współczynniki $q_{/./,j}$ $j=1, \ldots,$ wyznaczane są równocześnie dla jednej wartości $x_{/./}$.

Ostatecznie prawo sterowania dla wektora przepływów Q_1 można zapisać:

$$\overset{\circ}{Q}_1/x/ = \left[q_j^T\right] g/x/$$

gdzie: $\left[q_j^T\right]$ jest macierzą o wierszach q_j^T.

Uwzględniając powyższe, równanie rekurencyjne dla współczynników s_k można napisać w postaci:

$$s_{i\,k} = \int_{\Omega} \Big\{ R/\left[q_j^T\right] g/x//+ + s_{k+1}^T h/x+A_{11}\left[q_j^T\right] g/x// \Big\} e_i/x/\,dx$$

4.3. Metoda bezpośrednia

W metodzie tej rozwiązuje się problem minimalizacji /7/,/8/, w punktach x_j siatki zmiennej x, bez aproksymacji uzyskiwanych praw sterowania. Równanie rekurencyjne na współczynniki s_k ma wtedy postać:

$$s_{i\,k} = \sum_{j=1}^{p} \Big\{ R\left[\overset{\circ}{Q}_1/x_j/\right] + + s_{k+1}^T h\left[x_j + A_{11}\overset{\circ}{Q}_1/x_j/\right] \Big\}\, e/x_j/$$

5. Wnioski

Analizując przedstawione metody i odpowiadające im równania rekurencyjne dla współczynników s można stwierdzić , że w każdym przypadku występuje operacja optymalizacji statycznej przy ograniczeniach, wykonywana wielokrotnie. Stąd głównie jej efektywność decydować będzie o wymaganych nakładach obliczeniowych. Pomijając przypadek, w którym rozwiązanie uzyskuje się na drodze numerycznej można stwierdzić, że prawdopodobnie najefektywniejsza będzie metoda z aproksymacją praw sterowania. Graniczna liczba zbiorników systemu możliwego do optymalizacji tą metodą zależeć będzie od wielkości siatki, ta zaś od właściwości funkcji Q_1^0 /x/.

LITERATURA

[1] Paszkowski S.: Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa. PWN, Wa-wa 1975.

[2] Courant R, Hilbert D.: Metody matiematiczeskoj fiziki. GTTI, Moskwa-Leningrad 1951.

[3] Ajzerman M.A., Brawerman E.M., Rozener L.I.: Metod potencjalnych funkcji w teorii obuczenia maszin. Izd."Nauka",Moskwa 1970.

[4] Duda Z., Wojciechowski K.: Optymalne sterowanie rozdziałem wody w systemie. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej (w druku).

[5] Metoda i algorytmy sterowania stochastycznie optymalnego zbiorem obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Cz.II. Badania teoretyczne i symulacyjne. Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОЙ АПРОКСИМАЦИ В ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассматрываемся применение метода ортогональной апроксимации для решения задачи оптимального временного распределения воды представленого в работе [4].

ORTHOGONAL APPROXIMATION METHOD IN THE OPTIMAL RESOURCES ALLOCATION PROBLEM

S u m m a r y

The orthogonal approximation method is proposed to solve the optimal resources allocation problem which has been formulated in [4] ..