ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria : AUTOMATYKA z.59 Nr kol.694

Zdzisław Duda
Instytut Automatyki
Politechnika Śląska

OPTYMALNE STEROWANIE ROZDZIAŁEM WODY W SYSTEMIE

Streszczenie. W pracy rozpatruje się zadanie optymalnego rozdziału wody w systemie wodno-gospodarczym przy uwzględnieniu ograniczeń transportowych i ograniczeń pojemności zbiorników oraz niepewności w charakterystykach odbiorców i dopływu do systemu. Pokazuje się sposób dekompozycji zadania globalnego na zadania rozdziału czasowego i przestrzennego w sieci wraz z metodą rozwiązania tego ostatniego dla sieci o strukturze drzewa.

1. Wprowadzenie

W pracy rozważa się problem optymalnego rozdziału zasobów wodnych pomiędzy odbiorców ustalonego systemu wodno-gospodarczego. Formułując odpowiednie zadanie sterowania optymalnego starano się uwzględnić te zadania częściowe, które odpowiadają wyróżnionym aspektom problemu fizycznego oraz pokazać sposób dekompozycji zadania globalnego na wspomniane zadania częściowe. Są to kolejno: rozdział czasowy, rozdział przestrzenny, zmienne niepewne i modele niepewności, ograniczenia pojemności zbiorników i przepustowości rurociągów oraz dyskretyzacja czasowa.

Praca jest oparta na opracowaniu wykonanym w Zespole Teorii Sterowania kierowanym przez prof. dr. hab. inż. R. Gessinga w ramach kierunku 01 Problemu Rządowego PR-7, koordynowanego przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej.

W pracy wykorzystuje się pewne wyniki z prac [1], [2], dotyczące np. tzw. zasady minimalizacji i uśredniania.

2. Opisowe sformułowanie zadania

Słownie zadanie optymalnego rozdziału zasobów wodnych w rozpatrywanym systemie wodnogospodarczym można sformułować następująco:

Dany jest system zawierający zbiorniki i odbiorców połączonych siecią rurociągów. Do systemu dopływa woda, która może być gromadzona w zbiornikach lub rozdzielana odbiorcom.

Niedostarczenie odbiorcy wymaganej przez niego ilości wody powoduje powstanie strat. Zadaniem sterowania, podejmowanego w ustalonych dyskretnych chwilach czasu, jest ustalenie takiego ciągu decyzji o rozdziale, że suma strat liczonych za wybrany ciąg chwil jest minimalna.

Zakłada się, że w chwili podejmowania decyzji przyszłe wartości natężeń dopływu wody do systemu jak również przyszłe zapotrzebowania odbiorców są wielkościami niepewnymi. Dla obu tych wielkości przyjmuje się probabilistyczne modele niepewności.

3. Opis systemu

3.1. Struktura systemu

Struktura systemu opisana jest przez odpowiedni graf skierowany. Węzły grafu odpowiadają zbiornikom lub połączeniom rurociągów. Gałęzie grafu przedstawiają odcinki rurociągów. Zwrot danej gałęzi określa kierunek przepływu. Wprowadza się fikcyjny węzeł-zbiornik, z którego rozpoczynają się gałęzie reprezentujące dopływy do systemu i w którym kończą się gałęzie odpowiadające poborom. W zapisie analitycznym wykorzystującym macierz węzłowo-gałęziową mamy:

$$\frac{d}{dt} x^{*} = A\, q^{*} \qquad /1/$$

gdzie: $x^{*T}_{1x/d+s/} \triangleq \left[x^{T}_{1xd},\ 0^{T}_{1xs} \right]$ – wektor stanu systemu.

Składowe wektora x^{*} reprezentują ilości wody zgromadzonej w poszczególnych węzłach systemu. Spośród wszystkich węzłów d-węzłów zawiera zbiornik, s- węzłów nie ma możliwości gromadzenia wody.

$q^{*T}_{1x/p+r+s/} \triangleq \left[q^{T}_{1\,1xp},\ q^{T}_{2\,1xr},\ q^{T}_{3\,1xt} \right]$ – wektor natężeń przepływów gałęziowych.

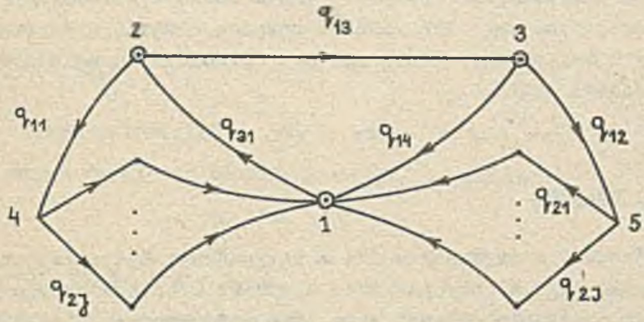
Pierwszych p składowych wektora q reprezentuje przepływy związane z węzłami zawierającymi zbiorniki. Kolejne r składowych wektora q stanowią przepływy związane tylko z węzłami o zerowej pojemności. Ostatnie t składowych to przepływy o znanym, deterministycznie lub z niepewnością natężeniu. Dodatkowo oznaczamy:

$q^{T} \triangleq \left[q^{T}_{1},\ q^{T}_{2} \right]$ – wektor nieznanych natężeń przepływów.

Odpowiednio do zdefiniowanych powyżej struktur wektorów x^{*} i q^{*} macierz A ma następującą strukturę blokową:

$$A_{/d+s/x/p+r+t/} \triangleq \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11_{dxp}} & 0_{dxr} & A_{12_{dxt}} \\ \hline A_{21_{sxp}} & A_{22_{sxr}} & A_{23_{sxt}} \end{array}\right]$$

Przykładowy graf otrzymany po uzupełnieniu fikcyjnym węzłem 1 przedstawiono na rys. 1. Węzły zawierające pojemności oznaczone są podwójnymi kółkami.



$$q_1^T = [q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}]$$

$$q_2^T = [q_{21}, \dots, q_{23}, \dots, q_{2j}]$$

$$q_3^T = [q_{31}]$$

Rys.1. Graf sieci

3.2. Ograniczenia

W rozpatrywanym systemie zakłada się występowanie trzech typów ograniczeń. Pierwsze z nich mają postać:

$$\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q} \qquad /2/$$

Ograniczenie $\overline{q}$ wynika z maksymalnej przepustowości rurociągu lub koryta rzeki, ograniczenie dolne $\underline{q}$ może oznaczać niedopuszczalność zmiany kierunku przepływu, wtedy $q = 0$ lub wartość przepływu nienaruszalnego w rzece. Ograniczenia pojemności zbiorników mają postać:

$$\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x} \qquad /3/$$

Wielkość $\overline{x} - \underline{x}$ określa tzw. objętość roboczą zbiornika. W przypadkach niektórych zbiorników można przyjąć $\underline{x} = 0$.

Ostatnie z omawianych ograniczeń jest związane z wyborem wielkości sterujących. Mogą być nimi przepływy w wybranych gałęziach grafu; obowiązuje wtedy ograniczenie:

$$A_{21} q_1 + A_{22} q_2 + A_{23} q_3 = 0 \qquad /4/$$

Maksymalna liczba niezależnych przepływów jest równa liczbie gałęzi drzewa danego grafu. Jeżeli wybrane do sterowania przepływy nie tworzą drzewa, obowiązują oprócz /2/, /4/ dodatkowe ograniczenia. W pracy zakłada się wariant pierwszy, tj. jedynie ograniczenia w postaci /2/, /4/. Zmiennymi sterującymi mogą być również różnice ciśnień wytwarzane przez pompy. Należy w takim przypadku w postaci ograniczeń uwzględnić równania oczkowe danego grafu.

3.3. Wskaźnik jakości

Wskaźnik jakości sterowania można w przypadku rozpatrywanego systemu interpretować jako straty powstałe w wyniku niedostarczenia odbiorcom wymaganych przez nich ilości wody. Tak interpretowany wskaźnik ma następującą postać analityczną

$$J = \int_0^T \| C q - z \|_W^2 \, dt \qquad /5/$$

gdzie: z^T_{1xu} - wektor zapotrzebowań wody

$C_{ux/p+r/}$ - macierz odbiorców

T - horyzont sterowania.

Możliwe są też inne postaci wskaźnika, w których funkcja podcałkowa zależy również od różnic poziomów wody w wybranych zbiornikach /zbiorniki końcowe sieci/ względem zadanej wartości tego poziomu. Z uwagi na zakres pracy wskaźników takich dalej nie będziemy rozpatrywać. Zadanie sterowania optymalnego sprowadza się do minimalizacji wskaźnika /5/ względem przepływów q /t/ przy ograniczeniach /1/, /2/, /3/.

3.4. Dyskretyzacja

Zakładamy, że decyzje o rozdziałach wody podejmowane są w wyróżnionych chwilach dyskretnych. Okres dyskretyzacji oznaczmy przez T_i. Dla rozwiązania problemu dyskretnego należy dokonać dyskretyzacji równań /1/

ograniczeń /2/, /3/ oraz wskaźnika /5/.

Dla równania /1/ mamy:

$$x^*_{/k+1/T_i} = x^*_{kT_i} + A \cdot \int_{kT_i}^{/k+1/T_i} q^* /t/\, dt$$

lub w zapisie uproszczonym

$$x^*_{k+1} = x^*_k + A \cdot Q^*_k \qquad /6/$$

gdzie: $Q^*_k = T_i\, q^*/t/$

przy dodatkowym założeniu $q^*/t/ = \mathrm{const},\ t \in [kT_i, /k+1/\, T_i]$.

Przy tym samym założeniu ograniczenie /2/ ma postać:

$$\underline{Q} \leq Q_k \leq \overline{Q} \qquad /7/$$

gdzie: $\underline{Q} = T_i \cdot \underline{q}$, $\overline{Q} = T_i \cdot \overline{q}$.

Ograniczenie /3/, dotyczące poziomów wody w zbiornikach, nie zmienia swojej postaci. Wskaźnik jakości /5/ w wyniku dyskretyzacji przyjmuje postać:

$$J = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{N} \| C\, Q_i - Z_i \|^2_W$$

gdzie: $\alpha = 1/T_i$, $N = \mathrm{ent}\ \frac{T}{T_i}$, $Z_i = T_i\, z_i$.

Warto podkreślić, że powyższą dyskretyzację przeprowadzono przy warunku stałości odpowiednich zmiennych w okresie T_i. Stąd niedopuszczalne jest uzmiennianie w czasie wielkości otrzymanych w wyniku rozwiązania problemu dyskretnego. Powyżej przeprowadzona dyskretyzacja nie dotyczy zmiennych niepewnych. Dane są one już w postaci zdyskretyzowanej.

4. Zmienne niepewne i modele niepewności

W dotychczasowych rozważaniach /patrz postać wskaźnika jakości/ nie podkreślano faktu występowania w zadaniu zmiennych niepewnych i płynących stąd konsekwencji. Zmiennymi takimi są: wektor dopływów Q_{3i} do systemu oraz wektor zapotrzebowań Z_i. Przyjmuje się probabilistyczny model niepewności oraz niezależność tych zmiennych w poszczególnych chwilach dyskretnych $i \in [1,N]$. Stąd zmienne te mogą być opisane przez odpowiednie rozkłady gęstości prawdopodobieństwa dla każdej z chwil dyskretnych należących do horyzontu sterowania.

Konsekwencją wystąpienia losowych zmiennych Q_{3i}, Z_i jest losowość wskaźnika. W rozpatrywanym w pracy problemie wprowadzamy wskaźnik wtórny będący wartością średnią wskaźnika. Mamy:

$$J = \mathcal{L} \cdot E \sum_{i=1}^{N} \| C \cdot Q_i - Z_i \|_W^2 \qquad /8/$$

5. Minimalizacja wskaźnika jakości

W ujęciu formalnym zadanie optymalnego rozdziału wody pomiędzy odbiorców sprowadza się do minimalizacji wskaźnika /8/ względem ciągu decyzji Q_i przy ograniczeniach /6/, /7/, /3/. Zakłada się, że sterowanie odbywać się będzie w układzie zamkniętym, tj. $Q_i = Q_i\ /x_i/$, gdzie x_i jest wektorem stanu systemu w chwili i -tej, zdefiniowanym w p. 3.1. pracy. Mamy kolejno:

$$J^0 = \min_{\{Q_i/x_i/\}} . E \sum_{i=1}^{N} \| C \cdot Q_i - Z_i \|_W^2 =$$

$$= \min_{Q_1/x_1/} E \Big\{ \|C.Q_1 - Z_1\|_W^2 + \min_{Q_2/x_2/} E \Big\{ \|C.Q_2 - Z_2\|_W^2 + \ldots + \Big| x_1$$

$$+ \min_{Q_{N-1}/x_{N-1}/} E \Big\{ \|C.Q_{N-1} - Z_{N-1}\|_W^2 + \Big| x_{N-1}$$

$$+ \min_{Q_N/x_N/} E \Big\{ \|C.Q_N - Z_N\|_W^2 \Big| x_N \Big\} \Big\} \ldots \Big| \qquad /9/$$

Postaci /9/ odpowiada następujące równanie rekurencyjne opisujące ewolucję powierzchni optymalnej jakości:

$$S_n\ /x_n/ = \min_{Q_n/x_n/} E \Big\{ \|C.Q_n - Z_n\|_W^2 + S_{n+1}\ /x_{n+1}/ \Big| x_n \Big\} \ldots \qquad /10/$$

Powracając do założeń z p. 3.1, zgodnie z którymi wektor Q_n może być przedstawiony w postaci:

$$Q_n^T = \left[Q_{1n}^T,\ Q_{2n}^T \right]$$

gdzie tylko składowe wektora Q_{1n} występują w bilansach poszczególnych węzłów - zbiorników oraz wykorzystując fakt, że zmienne losowe Z_n i Q_{3n}

są niezależne, można prawą stronę równania /10/ przekształcić następująco:

$$\min_{Q_n/x_n/} E\left\{\|C.Q_n - Z_n\|_W^2 + S_{n+1}/x_{n+1}/\right\}_{|x_n} =$$

$$= \min_{[Q_{1n}^T/x_n/, Q_{2n}^T]} E\left\{\|C.Q_n - Z_n\|_W^2 + S_{n+1}/x_{n+1}/\right\}_{|x_n} =$$

$$= \min_{Q_{1n}/x_n/} \min_{Q_{2n}|Q_{1n}/x_n/} E\left\{\|C.Q_n - Z_n\|_W^2 + S_{n+1}/x_{n+1}/\right\}_{|x_n} =$$

$$= \min_{Q_{1n}/x_n/} \left\{ \min_{Q_{2n}|Q_{1n}/x_n/} E_{|x_n} \|C.Q_n - Z_n\|_W^2 + E_{|x_n} S_{n+1}/x_{n+1}/\right\} \quad \dots /11/$$

Rozwiązywane w każdej dyskretnej chwili n, zadanie:

$$\min_{Q_{2n}|Q_{1n}/x_n/} E_{|x_n} \|C \cdot Q_n - Z_n\|_W^2$$

będziemy nazywali dalej zadaniem rozdziału przestrzennego w sieci, nawiązując do struktury, w której główne zbiorniki retencyjne współpracują z siecią o pojemnościach węzłów pomijalnie małych w porównaniu z pojemnością zbiorników.

Pomijając indeks chwili bieżącej oraz uwzględniając, że zmienne losowe Z, Q_3 nie zależą od stanu x, możemy napisać ostateczną formę zadania rozdziału przestrzennego:

$$R/Q_1/ = \min_{Q_2|Q_1} E\|C \cdot Q - Z\|_W^2 \quad \dots /12/$$

przy ograniczeniach:

$$A_{21} \cdot Q_1 + A_{22} Q_2 + A_{23} Q_3 = 0 \quad \dots /13/$$

$$\underline{Q} \leq Q \leq \overline{Q} \quad \dots /14/$$

Podstawiając /12/ do /11/ otrzymamy następującą zmodyfikowaną postać równania /10/

$$S_n/x_n/ = \min_{Q_{1n}/x_n/} \left\{R/Q_{1n}/ + E_{|x_n} S_{n+1}/x_{n+1}/\right\} \dots /15/$$

przy ograniczeniach:

$$x_{n+1} = x_n + A_{11} Q_{1n} + A_{12} Q_{3n} \quad \text{... /16/}$$

$$\underline{Q}_1 \leq Q_{1n} \leq \overline{Q}_1 \quad \text{... /17/}$$

Zadanie /12/, /13/, /14/ oraz zadanie /15/, /16/, /17/ mogą być rozwiązywane niezależnie. Pierwsze z nich określa optymalny rozdział przestrzenny a do jego rozwiązania potrzebna jest jedynie znajomość zapotrzebowań i ich opis probabilistyczny. Rozwiązanie drugiego zadania określa strategię prowadzenia zbiorników i do jego rozwiązania potrzebna jest funkcja R $/Q_1/$, otrzymana z rozwiązania zadania pierwszego lub przyjęta w oparciu o dane doświadczalne.

6. Optymalny rozdział przestrzenny

Przy wyborze metody rozwiązania zadania optymalnego rozdziału przestrzennego należy mieć na uwadze: postać średniej wartości funkcji strat, wymiar wektora Q_2 oraz liczbę ograniczeń typu /14/. W skrajnym przypadku, gdy funkcja strat jest kwadratowa, ograniczenia /14/ nie występują, a sieć ma strukturę drzewa, rozwiązanie można znaleźć w postaci analitycznej. W innych przypadkach na ogół potrzebne są metody numerycznego poszukiwania minimum. Poniżej omawia się dwie wybrane metody rozwiązania zadania optymalnego rozdziału przestrzennego, wykorzystujące ideę programowania dynamicznego.

6.1. Rozdział pomiędzy odbiorców

Dla celów rozpatrywanej metody załóżmy, że średnią wartość funkcji strat przedstawić można następująco:

$$E \| C \cdot Q - Z \|^2_W = \sum_{i=1}^{M} L_i /Q_i, \cdot/$$

gdzie Q_i są przepływami dostarczanymi poszczególnym odbiorcom, tj. wektor Q_2 można przedstawić w postaci:

$$Q_2^T \triangleq \left[\overset{*}{Q}{}_2^T, Q_{21}, \ldots Q_{2i}, \ldots, Q_{2M} \right]$$

Przy powyższych założeniach można prawą stronę wyrażenia /12/ przedstawić jako:

$$\min_{Q_2|\cdot} E \| C \cdot Q - Z \|^2_W = \min_{Q_2|\cdot} \sum_{i=1}^{M} L_i /Q_i, \cdot/ =$$

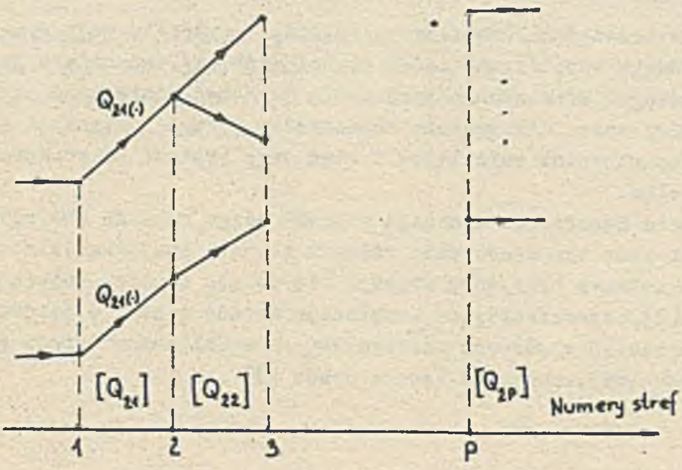
$$= \min_{[Q_{21}, \ldots, Q_{2M}]} \sum_{i=1}^{M} L_i /Q_i, \cdot/$$

Ograniczenia mają postać /13/, /14/, przy czym ograniczenie /13/ zawiera warunek $\sum_{i=1}^{M} Q_1 = const.$

Tak przeformułowane zadanie można rozwiązać metodą programowania dynamicznego. Stanem jest ilość zasobów pozostałych do rozdzielenia pomiędzy pozostałych odbiorców.

6.2. Rozdział w sieci

Załóżmy, że sieć ma strukturę drzewa przedstawioną na rys. 2.



Rys.2. Struktura drzewa

i w związku z tym można ją podzielić na strefy. W każdej ze stref podejmowane są decyzje o rozdziale przepływu pomiędzy wycinki rurociągów leżących w danej strefie. Ostatnia P-ta strefa zawiera odbiorców wody.

Załóżmy, że wektor Q_2, względem którego przeprowadzana jest minimalizacja wyrażenia /12/, ma postać następującą:

$$Q^T \hat{=} \left[Q_{21}^T, \ldots, Q_{2j}^T, \ldots, Q_{2P}^T\right] \qquad \ldots /18/$$

Na podstawie powyższego założenia i przyjętej struktury sieci wyrażenia /12/ można przepisać jak następuje:

$$\min_{Q_2|Q_1} E\|C \cdot Q - Z\|^2_W = \min_{[Q_{21}^T,\dots,Q_{2P}]|Q_1} E\|C \cdot Q - Z\|^2_W =$$

$$= \min_{Q_{21}|Q_1} \min_{Q_{22}|Q_{21}} \dots \min_{Q_{2P}|Q_{2,P-1}} E\|C \cdot Q - Z\|^2_W$$

co wyjaśnia ideę rozwiązania.

7. Uwagi dodatkowe

Efektywne rozwiązanie zadania optymalnego rozdziału wody wymaga również efektywnego rozwiązania zadań częściowych, tj. rozdziału przestrzennego i czasowego. Rozwiązania tych zadań mogą być znalezione analitycznie lub numerycznie. Rozwiązanie analityczne wymaga rezygnacji z ograniczeń na przepustowości rurociągów i stąd jego praktyczna stosowalność nie jest wielka.

Rozwiązania numeryczne wymagają naogół dużego nakładu obliczeniowego. Możliwe jest przy tym stosowanie różnych technik znajdywania rozwiązania. W najprostszym przypadku stosuje się metodę siatek. Poświęcona jest temu praca [2],przedstawiająca kombinację metody siatek z metodą analityczną. W bardziej złożonych przypadkach stosować można metody aproksymacji ortogonalnej,czemu poświęcono pracę [3] .

LITERATURA

[1] Gessing R.: Zasada minimalizacji i uśredniania jako metoda wyznaczania algorytmów sterowania statystycznie optymalnego. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, t. XXI, z.4, 1976.

[2] Metoda i algorytmy sterowania stochastycznie optymalnego zbiorem obiektów w systemie wodno-gospodarczym. Cz. II. Badania teoretyczne i symulacyjne. Praca zlecona przez Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1980.

[3] Wojciechowski K. :Metoda aproksymacji ortogonalnej w zadaniu optymalnego rozdziału czasowego.Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej (w druku).

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВОДЫ В СИСТЕМЕ

Резюме

В работе рассматривается задачу оптимального распределения воды в системе.Приняется во внимание транспортные ограничения,ограничения ёмкости водохранилища,а также неуверенность в характеристиках потребителей и притока до системы.Показывается способ декомпозиции общего задания на задачи часового и пространственного распределения.

OPTIMAL CONTROL OF THE WATER DISTRIBUTION SYSTEM

Summary.

The problem of optimal water distribution in the water economic system is considered.The transport limitations,the limitations of capacity of the reservoir and an unreliability of customers' characteristic as well as an affluent are taken into account.The method of decomposition of the whole problem is shown in the paper.